



CEBİR BİLİMSEL BİR SANATTIR



TOPLAM HER DOĞRULTUDA AYNIDIR

BÜTÜN, PARÇADAN BÜYÜKTÜR





Pİ'Yİ İNCELEMEK EVRENİ İNCELEMEK GİBİ

MATEMATİK KİTABI



EVRENİN HER AN HER YERDE ÇINLAYAN MÜZİĞİ

SONSUZ ÇEŞİTLİLİK VE SINIRSIZ ÇAPRAŞIKLIK





ÇARPMAYI TOPLAMAYA DÖNÜŞTÜRMEK

BEŞGENLERİN HOŞ BİR GÖRÜNÜMÜ VARDIR





NE KADAR OLASI?



ÖNSÖZ **MATT PARKER**

ALFA

BÜYÜK FİKİRLERİ KOLAYCA ANLAYIN

ASTRONOMİ KİTABI
BİLİM KİTABI
DİNLER KİTABI
EDEBİYAT KİTABI
EKONOMİ KİTABI
FELSEFE KİTABI
İŞLETME KİTABI

KLASİK MÜZİK KİTABI
MİTOLOJİ KİTABI
PSİKOLOJİ KİTABI
SANAT KİTABI
SHAKESPEARE KİTABI
SHERLOCK HOLMES KİTABI
SİNEMA KİTABI

SİYASET KİTABI
SOSYOLOJİ KİTABI
SUÇ KİTABI
TARİH KİTABI
UZAY YOLU KİTABI
FEMİNİZM KİTABI
MATEMATİK KİTABI

DİZİNİN DİĞER KİTAPLARI

MATEMATİK
KİTABI

ALFA

ALFA | DK | Penguin Random House

Alfa Yayınları: 3870
Başvuru: 30

MATEMATİK KİTABI

Orijinal Adı The Maths Book
İngilizce Aslından Çeviren Arda Barişta

1. Basım: 2020
ISBN 978-625-449-037-8

Sertifika No: 43949

Yayıncı ve Genel Yayın Yönetmeni M. Faruk Bayrak
Genel Müdür Vedat Bayrak
Yayın Yönetmeni Mustafa Küpüşoğlu
Kıdemli Sanat Editörü Gillian Andrews
Kıdemli Editörler Camilla Hallinan, Laura Sandford
Sanat Yönetmeni Karen Self
Tasarım Uygulama Elif Çepikkurt

Alfa Basım Yayım Dağıtım Ltd. Şti.
Alemdar Mahallesi, Ticarethane Sokak No: 15 34110 Cağaloğlu, İstanbul/Türkiye
Tel: (0212) 511 53 03 - 513 87 51 - 512 30 46 • Faks: (0212) 519 33 00
www.alfakitap.com info@alfakitap.com

A WORLD OF IDEAS: SEE ALL THERE IS TO KNOW (www.dk.com)
Çin'de üretilmiştir. Printed in China.

KATKIDA BULUNANLAR

KARL WARSI, DANIŞMAN EDİTÖR

Karl Warsi, Birleşik Krallık'taki okul ve kolejlerde uzun yıllar matematik öğretti. 2000 yılında matematik kitapları yayımlamaya başladı, hem Birleşik Krallık hem de dünya genelinde ortaokul ve lise öğrencilerine yönelik çok satan ders kitabı dizileri çıkardı. Eğitimde kaynaşma yaklaşımına bağlılığının yanında, farklı yaşlardaki insanların öğrenme yollarının da farklı olduğu görüşü doğrultusunda çalışmalar yürütmektedir.

JAN DANGERFIELD

Eski matematik öğretmeni ve yine bu alanda kıdemli bir sınav değerlendirme uzmanı olan Jan Dangerfield, İngiltere'deki Eğitim Değerlendirme Uzmanları Odasının (Chartered Institute of Educational Assessors) ve İngiliz Kraliyet İstatistik Bilim Akademisinin (Royal Statistical Society) üyesidir. İngiltere Matematik Tarihi Bilim Akademisine (British Society for the History of Mathematics) 30 yıldan uzun zamandır üyedir.

HEATHER DAVIS

İngiliz yazar ve eğitimci Heather Davis 30 yıldır matematik öğretmenliği yapıyor. Hodder Education için ders kitapları yayımladı ve İngiltere'deki Matematik Öğretmenleri Derneğinin (Association of Teachers of Mathematics) yayımlarını yönetti. Birleşik Krallık'ta ve uluslararası alanda çalışan sınav kurullarına kurs veriyor ve öğrencilere yönelik zenginleştirme etkinlikleri hazırlayıp düzenliyor.

JOHN FARNDON

Bilim ve doğa üzerine yazdığı popüler kitapları geniş çapta yayımlanan John Fardon, aldığı ödüllerin yanı sıra İngiltere Kraliyet Bilimler Akademisinin (Royal Society) verdiği Gençlik Bilim Kitabı Ödülü'ne beş kez aday gösterildi. Uluslararası boyutta övgü alan *The Oceans Atlas*, *Do You Think You're Clever?* ve *Do Not Open*'ın da içinde bulunduğu ve çeşitli konuların işlendiği yaklaşık 1000 kitap yazdı ve ortak çalışma yürüttü. Ayrıca *Science* ve *Science Year by Year* gibi kitaplara katkıda bulundu.

JONNY GRIFFITHS

Jonny Griffiths, Cambridge Üniversitesi, Open Üniversitesi ve East Anglia Üniversitesinde matematik ve eğitim üzerine öğrenim gördükten sonra Birleşik Krallık'ın Norfolk kontluğundaki Paston Sixth Form Kolejinde 20 yıldan uzun bir süre matematik dersi verdi. Yarattığı popüler matematik web sitesi Risps sayesinde 2005-2006'da Gatsby Üyesi Öğretmen (Gatsby Teacher Fellow) ilan edildi. 2016'da, matematik öğrencilerine yönelik Ritangle yarışmasını hayata geçirdi.

TOM JACKSON

25 yıldır yazarlık yapan Tom Jackson, yetişkinlere ve çocuklara yönelik 200'ün üzerinde kurmaca dışı kitap yazdı, ayrıca çeşitli bilim ve teknoloji konularında bundan daha da çok kitaba katkıda bulundu. Bunların arasında Numbers: *How Counting Changed the World; Everything is Mathematical*, Marcus du Sautoy ile çıkardığı bir kitap dizisi ve Carol Vorderman ile çıkardığı *Help Your Kids with Science* bulunuyor.

MUKUL PATEL

Matematik eğitimini Londra'daki Imperial Kolejinde alan Mukul Patel pek çok bilim dalında yazıp çiziyor ve ortak çalışmalar yürütüyor. Çocuklara yönelik bir matematik kitabı olan *We've Got Your Number*'ın yazarıdır ve Tilda Swinton'ın seslendirdiği senaryoları bulunmaktadır. Ayrıca çağdaş dans koreografları için çok sayıda beste yaptı ve mimarlar için ses yerleştirmeleri tasarladı. An itibariyle yapay zekâdaki etik sorunlarını inceliyor.

SUE POPE

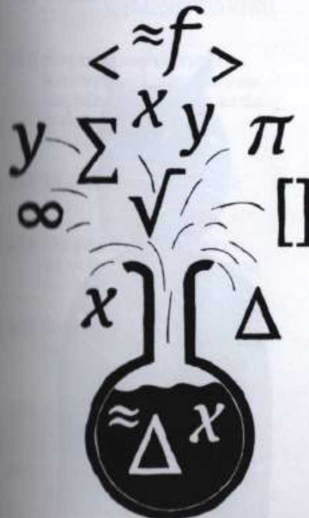
Matematik eğitimcisi Sue Pope uzun bir süredir Matematik Öğretmenleri Derneğinin (Association of Teachers of Mathematics) üyesi ve bu kurumun konferanslarında, öğretmenlikte matematiğin tarihi üzerine ortaklaşa seminerler veriyor. Kısa bir süre önce, geniş bir kitle için yayımlanan *Enriching Mathematics in the Primary Curriculum*'un ortak editörlüğünü yaptı.

MATT PARKER, FOREWORD

Aslen Avustralyalı bir matematik öğretmeni olan Matt Parker şu anda tek kişilik güldürü oyuncusu, matematik iletişimcisi, Numberphile ve Stand-up Maths kanallarındaki videoları 100 milyondan fazla kez izlenmiş bir YouTube yayıncısı. Matt, Festival of the Spoken Nerd kapsamında canlı güldürü gösterileri sergiliyor, hatta Royal Albert Hall'u tamamen dolduran seyircilerin önünde Pi sayısını canlı olarak hesaplamışlığı bile var. BBC ve Discovery kanallarında televizyon ve radyo programı da sunuyor. 2019'da çıkan kitabı *Humble Pi: A Comedy of Maths Errors*, Sunday Times'ın çoksatanlar listesinin zirvesine yerleşti.

İÇİNDEKİLER

ORTAÇAĞ
500–1500

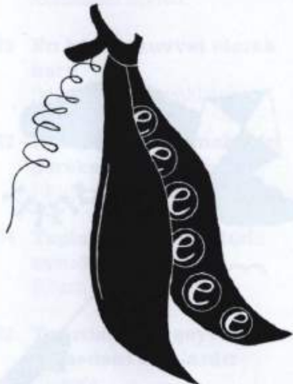




RÖNESANS
1500–1680



AYDINLANMA
1680–1800





19. YÜZYIL
1800–1900





MODERN MATEMATİK
1900–GÜNÜMÜZ











ÖNSÖZ

Matematiği tek bir kitapta baştan sona özetlemek insanın gözünü korkutan ve doğrusu istenirse imkânsız bir iş. İnsanlık matematiği binyıllardır araştırıp keşfediyor. Uygulama bakımından, türümüzün ilerlemesi adına matematikten yararlandık ve aritmetiğin ve geometrinin geliştirilmesiyle ilk şehirlerin ve uygarlıkların temelleri atıldı. Felsefi bakımdan, matematiği salt düşüncedeki bir eylem olarak kullanıp örüntüleri ve mantığı araştırdık.

Şaşırtıcıdır, bütün bir bilim dalı olarak matematiği bir çırpıda tanımlamak güçtür. "Matematik" çoğu kişinin sandığı gibi düpedüz "sayılarla alakalı şeyler" değildir. Bu tanımla, bu kitapta işlenen geometri ve topolojinin büyük bir bölümü dahil bir yığın matematik konusu dışarıda kalır. Elbette ki sayılar, matematiğin en ezoterik alanlarının dahi anlaşılmasında çok yararlı araçlardır ancak şu var ki, matematiğin en ilginç tarafı sayılar değildir. Sadece sayılara odaklanmak, tek bir ağaca bakarken ormanı görememek olur.

Matematiği tanımlamak için benim kullandığım "matematikçilerin yapmaktan keyif aldığı şeyler" tabiri, pek hoş bir döngüsel düşünce olmakla beraber hiç mi hiç faydalı değildir. Aslına bakılırsa, *Büyük Fikirler: Basit Bir Açıklama* fena bir tanım değil. Matematik, en büyük fikirler için en basit açıklamaları bulma girişimi olarak görülebilir. Örüntüleri bulma ve onları özetleme gayretidir matematik. Bu örüntülerin bazıları, piramit inşa etmek ve toprağı bölmek için gereken kullanışlı üçgenleri içerir. Başka örüntüler de soyut cebrin yirmi altı seyrek grubunun tamamını sınıflama girişiminde kullanılır. Bu iki örüntü türü de hem fayda hem de karmaşıklık bakımından çok farklı problemler olmakla birlikte çağlardır matematikçilerin saplantısı haline geldi.

Matematiğin tamamını bir düzene koymanın kesin bir yöntemi olmasa da ona tarih sırasına göre bakmak fena bir yöntem değil. Bu kitapta da, insanların matematiği keşfettiği tarihi yolculuğu, onu sınıflama ve doğrusal bir ilerleme düzenine kavuşturmada kullanılıyor. Bu gayret cesurca olduğu kadar zorludur. Mevcut matematik bilgimizin kaynağını farklı zaman ve kültürlere ait tesadüfi insanlar biriktirmiştir.

Bu sebeple, örneğin sihirli karelerle ilgili kısa bölüm binlerce yılı ve bütün bir yerküreyi içine alır. Sayıların her sıra, sütun ve köşegende toplamları daima aynı olacak şekilde dizildiği sihirli kareler eğlence amaçlı matematiğin en eski alanlarından biridir. Hikâyesi MÖ 9. yüzyılda Çin'de başlar, ardından MS 100'e ait Hint metinleri üzerinden ortaçağ Arap bilginleri, Rönesans Avrupası ve son olarak çağımızın Sudoku tarzı bulmacalarına atlar. 2001'de geometrik karelerle son bulan 3000 yıllık bir tarih, bu kitapta mecburen sadece iki sayfada işleniyor. Matematik tarihinin ufacık bir kesitini kaplasa bile, sihirli kareyle, hakkında buraya asla sığmayacak kadar çok gelişme yaşanacaktır. Bir bütün olarak bu kitap, önemli durakları özenle seçilmiş bir matematik gezintisi olarak görülmelidir.

Matematiğin küçücük bir kısmını bile incelemek, insanlığın yaptığı atılımın boyutunu anımsatmak için fazlasıyla yeterli. Öte yandan, aynı incelemenin sonucunda, matematiğin eksik kaldığı yerler de meydana çıkıyor: Kadınların alenen matematik tarihinin dışında bırakılması gibi şeyler göz ardı edilemez. Yüzyıllar boyunca pek çok yetenek çarçur edildi, pek çok kadının hakkı teslim edilmedi. Ama umuyorum ki, artık matematikçilerin çeşitliliğinde iyiye gidiyor, tüm insanları matematiği keşfetmeye ve öğrenmeye özendiriyoruz-dur.

Çünkü zaman içinde matematik bütün halinde büyümeye devam edecek. Bu kitap yüzyıl önce yazılmış olsaydı 280'inci sayfaya kadar yazılanlar hemen hemen aynı kalırdı. Sonra da biterdi. Ne Emmy Noether'in halka kuramı, ne Alan Turing'in bilgisayarı ne de Kevin Bacon'a ait ayrımın altı derecesi olurdu. Hem 100 yıl sonrası için de bunun geçerli olacağına kuşku yok. Günümüzden 100 yıl sonra çıkacak baskıda, 325'inci sayfada kalınan yerden devam edilip bize tamamen yabancı gelen örüntüler işlenecektir. Herkes matematikle ilgilenebileceğinden bu yeni matematiği kimin, nerede ve ne zaman keşfedeceği de bilinmez. 21. yüzyılda matematikteki en büyük atılımı yapmak istiyorsak tüm insanları kucaklamamız gerekiyor. Umarım bu kitap, herkese bu yönde emek verme arzusu aşılar.

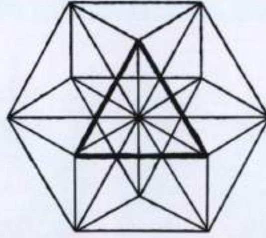
MATT PARKER

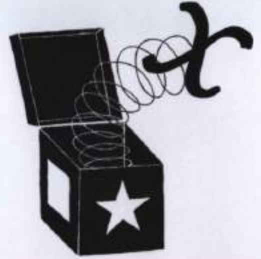
Matt Parker

GİRİŞ









Matematiğin geçmişi tarihöncesine dek uzanır. İlk insanlar önce bir şeyleri saymanın ve nicelemenin yollarını buldular. Bu sayede sayı, büyüklük ve şekil kavramlarının taşıdığı birtakım örüntü ve kuralları saptamaya başladılar. Toplama ve çıkarmanın temel ilkelerini keşfettiler; örneğin iki şey (ister çakıl taşı olsun isterse yemiş ya da mamut) diğer iki şeye eklendiğinde sonucun dört şey ettiğini buldular. Şimdi böylesi fikirler bize apaçık görünse de onların zamanına göre derin bir anlayış gerektiriyordu. Yine bu fikirler, her şeyden önce, matematik tarihinin bir icat hikâyesinden ziyade keşif hikâyesi olduğunu açıkça gösteriyor.

> Özünde şair olmayanın matematikçi olması imkânsızdır.
>
> **Sofya Kovalevskaya**
> **Rus matematikçi**

İlk uygulamalar

Matematiksel keşif süreci, insanların niceleme ihtiyacı duyduğu şeyleri sayma yollarını geliştirdiği tarihöncesi çağlarda başladı. Kemik veya sopa üzerine çetele tutmak bunun en basit tekniğiydi. Bir şeylerin sayısını kaydetmenin ilkel ama güvenilir bir yoluydu. Zamanla, sayılara sözcükler ve simgeler verildi ve ilk sayı sistemi evrilmeye başladı; böylece, ek öğelerin tedarik edilmesi ya da bir stokun erimesi gibi temel aritmetik işlemleri ifade eden bir araç elde edildi.

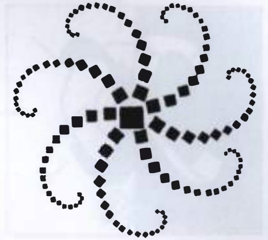
Avcı-toplayıcılar ticarete ve çiftçiliğe yöneldikçe ve toplumlar gelişip karmaşıklaştıkça, aritmetik işlemler ve bir sayısal sistem her tür faaliyetin vazgeçilmez araçları haline geldi. Yağ, un gibi sayılamayan malların ya da arsaların ticareti, stoklarının tutulması ve vergilendirmesi için ölçüm sistemleri geliştirilip ağırlık ve uzunluk gibi ölçülere sayısal bir değer verildi. Hesaplamalar da daha karmaşık bir hal alınca, buna karşılık toplama ve çıkarmadan geliştirilen çarpma ve bölme kavramları, örneğin, arazi alanlarının hesaplanmasını olanaklı kıldı.

İlk uygarlıklarda, matematikteki bu yeni keşifler ve bilhassa uzaydaki cisimlerin ölçümü, inşaat ve alet yapımında bilgi birikimi sunacak geometri alanının temelini oluşturdu. Söz konusu ölçümleri uygulamalarda kullanan insanlar birtakım örüntülerin belirdiğini fark ettiler. Bu örüntüler sonradan işlerine yarayabilirdi. Basit ve doğruluk düzeyi yüksek bir yöntem olan gönye alma yoluyla üç, dört ve beş birimlik kenarlara sahip bir üçgen oluşturarak dik açı elde edilebilir. Bu hassas alet ve bilgi birikimi olmadan Mezopotamya ve Antik Mısır'ın yolları, kanalları, zigguratları ve piramitleri inşa edilemezdi.

Bu matematik keşiflerine yeni uygulama alanları (astronomide, denizcilikte, mühendislikte, muhasebede, vergilemede vb.) bulundukça daha başka örüntüler ve kavramlar ortaya çıktı. Uygulama ile keşfin karşılıklı bağımlılığına dayalı bu işleyiş, kadim uygarlıkların matematiğe ayrı ayrı zemin hazırlamasına aracı oldu ve aynı zamanda matematiğin kendisinin yararına olan bir merakı doğurdu: Soyut matematik.

İlk soyut matematikçiler MÖ ilk binyılın ortalarında Yunanistan'da, kısa süre sonra da Hindis-





tan ve Çin'de ortaya çıkmaya başlayarak matematiğin uygulamacı öncülerinin (mühendis, astronom ve önceki uygarlıkların araştırmacılarının) bıraktığı mirası geliştirdiler. Bu ilk matematikçiler keşiflerinin elverişli uygulamalarıyla pek ilgilenmeseler de araştırmalarını yalnızca matematikle sınırlı tutmadılar. Sayı, şekil ve süreçlerin niteliklerine yönelik araştırmalarında, kozmosun doğası hakkında metafizik soruları beraberinde getiren evrensel kural ve örüntülere rastladılar ve hatta bu örüntülerin mistik nitelikler barındırdığını ileri sürdüler.

Buna bağlı olarak, matematik çoğu zaman felsefe için tamamlayıcı bir bilim dalı olarak görülüyordu. Farklı çağlarda yaşamış birçok önemli matematikçi aynı zamanda filozof, birçok önemli filozof da matematikçi olunca bilimin bu iki dalı arasındaki bağlar günümüze kadar ulaştı.



Geometri ebedi varlıkların bilimidir.

Pisagor

Antik Yunan matematikçisi

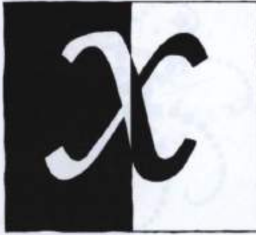


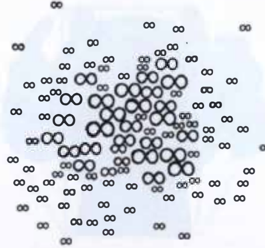
Aritmetik ve cebir

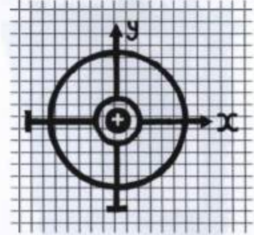
Bugün anladığımız şekliyle matematiğin tarihi, diğer bir deyişle matematikçilerin bu kitabın büyük bölümünü oluşturan keşif, keşif, kavrayışları işte böyle başladı. Bu, tek tek düşünürlerin ve onların düşünceleri kadar toplumların ve kültürlerin de bir hikâyesidir; kadim Mezopotamya ve Mısır'dan Yunanistan'a, Çin'e, Hindistan'a, İslam İmparatorluğuna, Rönesans Avrupası'na, oradan da modern dünyaya uzanan, sürekli gelişen bir düşünce zinciridir. Matematik evrildikçe kapsamındaki dalların birbirlerinden hem ayrık hem de bağlantılı olduğu fark edildi.

Sayı ve nicelik araştırmaları (günümüzdeki adıyla aritmetik), ilk ve pek çok bakımdan en temel araştırma alanıydı. Kökü Yunanca arithmos ("sayı") sözcüğüne dayanan aritmetiğin temeli, bir şeyleri saymak ve sayısal değerler atamanın yanı sıra sayılarla yapılabilen ekleme, çıkarma, çarpma ve bölme gibi işlemlerle ilgilidir. Konusu sayıların nitelikleri, hatta bizzat sayılar kavramı olan araştırmaların altında basit bir sayı sistemi kavramı yatar. π, e, gibi sabitler veya asal sayılar, irrasyonel sayılar gibi bazı sayılar özel bir merak ve kayda değer bir araştırma konusudur.

Matematiğin bir diğer belli başlı alanı olan cebir, matematiğin yapısını ve düzenini inceler ve bu yönüyle diğer her alanla belli düzeyde alakalıdır. Cebri aritmetikten ayıran şey, değişkenleri (bilinmeyen sayıları) temsilen harf ve benzeri simgeleri kullanmasıdır. Basit biçimiyle cebir, bu simgelerin matematikte (mesela denklemlerde) kullanımına ilişkin temel kurallara odaklanan matematik dalıdır. Denklemleri, hatta hayli karmaşık ikinci derece denklemleri çözme yöntemlerinin kökeni Babillilere uzanır; öte yandan, işlemleri basitleştirmek adına simgelerin kullanılmasına önayak olanlar, Arapça al-jabr'dan türetilmiş cebir (algebra) sözcüğünü kendilerine borçlu olduğumuz İslamiyetin Altın Çağı matematikçileriydi. Cebirdeki daha yakın tarihli atılımlar sayesinde soyutlama düşününün cebirsel yapı incelemesinde kullanılmaya başlanması, soyut cebir olarak bilinen çalışma alanını ortaya çıkardı.







Geometri ve kalkülüs

Matematiğin başlıca alanlarından bir üçüncüsü, uzay kavramı ve cisimlerin uzaydaki ilişkilerine odaklanan geometridir: geometrik şekillerin biçim, boyut ve konumlarının incelenmesi. Mühendislik ve inşaat projelerinde, arazi ölçüm ve bölüştürmesinde, denizcilik ve takvim çıkarmaya dönük astronomik gözlemlerde ele alınan cisimlerin fiziksel ölçülerine açıklık getirilmesi gibi ticari faaliyetlerle ilgili uygulamalar, geometrinin doğuşunda etkili oldu. Geometrinin bir dalı olan trigonometrinin (üçgenlerin özelliklerinin incelenmesi) bu uğraşlarda bir hayli yararlı olduğu anlaşıldı. Geometri, belki de çok somut olduğundan, çok sayıda kadim uygarlık için matematiğin köşe taşıydı ve diğer alanlarda problem çözme ve ispat için araç görevi gördü.

Bilhassa, matematikle geometrinin neredeyse eşanlamlı olduğu Antik Yunan için geçerliydi bu. Pisagor, Platon ve Aristoteles gibi büyük matematikçi filozofların mirasını toplayıp sağlamlaştıran Öklit'in, esasını geometri ile mantığın bir birleşimine bağladığı matematik ilkeleri yaklaşık 2000 yıl boyunca bu çalışma alanının temeli olarak kabul edildi. Gelgelelim 19. yüzyılda klasik Öklitçi geometriye alternatif önerileri getirilince, hem uzaydaki cisimlerin hem de uzayın kendi doğasının ve özelliklerinin incelendiği topoloji gibi yeni araştırma alanlarının önü açıldı.

> Matematikte soru sorma hüneri, problem çözmekten daha kıymetlidir.
> **Georg Cantor**
> **Alman matematikçi**

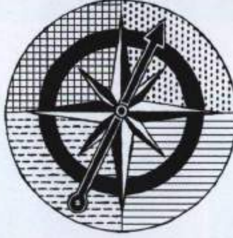
Klasik dönemden beri matematik statik durumlarla (şeylerin, verilen herhangi bir andaki haliyle) ilgilenmişti. Sürekli değişimin ölçülmesinde veya hesaplanmasında araç görevi göremiyordu. 17. yüzyılda Gottfried Leibniz ve Isaac Newton'ın birbirinden bağımsız olarak geliştirdiği kalkülüs, bu soruna bir yanıt sundu. Kalkülüsün iki dalı, integrasyon ve diferansiyel, böylesi şeyleri analiz etmeye yarayan yöntemlerdi: Değişimin tanımlanıp hesaplanışı, bir grafikteki eğrilerin eğimi ve bu eğrilerin altında kalan alan üzerinden yapılıyordu.

Kalkülüsün keşfedilmesiyle yeni bir analiz alanı da ortaya çıktı. İleride bu analiz yöntemiyle, 20. yüzyılın kuantum mekaniği ve kaos kuramı gibi alanlar arasında çok yakın bir ilişki kurulacaktı.

Mantığı yeniden ele almak

19. yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başlarında bir matematik alanı daha belirdi: Matematiğin temelleri. Bu sayede felsefe ve matematik arasındaki bağ yeniden işler hale geldi. Gottlob Frege ve Bertrand Russell'ın da içinde olduğu bilginler, tıpkı MÖ 3. yüzyılda Öklit'in yaptığı gibi, matematik ilkelerinin dayandığı mantık temellerini keşfetme arayışına girdiler. Çalışmaları, bizzat matematiğin doğasının, işleyişinin ve sınırlarının yeniden mercek altına alınması için teşvik edici bir unsur oldu. Temel matematik kavramlarına yönelik bu araştırma belki de en soyut alandır, bir nevi meta-matematiktir, bununla beraber modern matematiğin diğer her alanı için vazgeçilmez bir tamamlayıcıdır da.







Yeni teknoloji, yeni fikirler

Matematiğin bu çeşitli alanları (aritmetik, cebir, geometri, kalkülüs ve matematiğin temelleri) sırf kuramsal boyutta dahi araştırılmaya değer alanlar; buna karşılık akademik matematik konusunda toplumdaki genel algı, neredeyse akıl erdirilemez derecede soyut. Halbuki matematik keşifleri için çoğu zaman uygulama alanları bulunmuş, bilim ve teknolojideki ilerlemeler de matematiksel düşünmede yeniliklerin önünü açmıştır.

Matematik ve bilgisayarların kader ortaklığı bunun başlıca örneklerindendir. Bilgisayarların geliştirilmesindeki asıl amaç matematikçi, astronom ve diğer bilimcilerin tablo çıkarma ve benzeri "angarya" hesaplamalarını mekanik bir araca devretmekti. Bu mevcut yapıları, yeni bir matematiksel düşünmeyi gerekli kılıyordu. Önce mekanik, daha sonra elektronik bilgisayarların inşa edilmesinde matematikçilerin rolü en az mühendislerinki kadar büyüktü. İleride matematikle ilgili yeni fikirler keşfedildiğinde araç olarak bu bilgisayarlar kullanılabilecekti. Matematik teoremleri için yeni uygulama alanlarının gelecekte de bulunacağına şüphe yok; hâlâ çözülemeyen sayısız problem de buna eklendiğinde, yapılacak matematik keşiflerinin sonu gelmez gibi görünüyor.

Matematiğin hikâyesi, bu farklı alanların araştırılıp yenilerinin keşfedildiği hikâyelerin toplamıdır. Öte yandan bir o kadar da çözülmemiş problemlere yanıt bulmayı ya da yeni fikirlerin peşinden bilinmeyen topraklara gitmeyi kafasına koyan matematikçi kâşiflerin hikâyesidir; keza matematik yolculuklarında bir fikre rast gelip sonunun nereye varacağı merakıyla harekete geçenlerin de. Keşifler kimi zaman ezberleri bozup keşfedilmemiş alanlara kapı açan bir aydınlanma biçiminde, kimi zaman da önceki düşünürlerin fikirlerinin geliştirilmesi veya bu fikirler için elverişli uygulamalar bulunması sonucunda, "devlerin omzunda yükselerek" ortaya çıkıyordu.

Bu kitapta, matematikteki en eski keşiflerden günümüze dek uzanan çoğu "büyük fikir" sunulmakta ve bu sunum, konuya yabancıların da anlayabileceği bir dille, fikirlerin nerede bulunduğu, kimlerce keşfedildiği ve neden dikkate değer olduğu açıklanmaktadır. Bazıları tanıdık, bazılarıysa yabancı gelebilecek bu fikirleri anlamamız, onları üreten insan ve toplumlar hakkında bilgilenmemiz sayesinde, matematiğin her alandaki kullanışlılığına da matematikçilerin onda bulduğu zarafet ve güzelliğe de anlam verebiliriz. ■

> Doğru açıdan bakıldığı takdirde matematiğin, hakikatin yanı sıra barındırdığı üstün güzellik de görülür.
>
> **Bertrand Russell**
> **İngiliz filozof ve matematikçi**

ANTİK VE
DÖNEMLE
MÖ 6000-MS 500

KLASİK

R

MÖ y. 6000
Sümer kil tabletlerinde çeşitli **nicelik simgeleri** bir **sayısal sisteme** işaret eder.

MÖ y. 4000
Babilliler, **küçük bir koninin 1'i, büyük bir koninin 60'ı ifade ettiği** bir **60-tabanlı sayısal** sistemi getirirler.

MÖ y. 1650
Antik Mısır uygarlığı **alan ve hacim hesaplama yöntemlerini** tarif edip Rhind papirüsüne kaydederler.

MÖ y. 530
Pisagor **okul kurup** kendi **metafiziksel inançlarını** ve Pisagor teoremi dahil kendi **matematik keşiflerini** orada öğretir.

MÖ y. 430
Metapontolu Hippasos kesirlerle ifade edilemeyen **irrasyonel sayıları** keşfeder.

MÖ y. 387
Platon, **Atina'daki Akademisini** kurar. Girişin üzerindeki tabelada şu sözler yer alır: "Geometri bilmeyen giremez."

MÖ y. 300
Şimdiye dek yazılmış **en etkili** ders kitaplarından biri olan Öklit'in Öğeler'i, asal sayıların sonsuzluğunun ispatı gibi **matematik buluşlarını** içerir.

Bundan 40.000 yıl öncesi gibi kadim bir tarihte insanlar sayı saymak için odun ve kemik üzerine çetele çizgileri kazıyorlardı. Sayı ve aritmetik bilinçleri şüphesiz iptidai düzeydeydi. Matematik tarihi tam olarak, ancak sayısal sistemlerin ilk uygarlıklarca geliştirilmesiyle başladı. Bunların ilki MÖ 6. binyılda Batı Asya'da, dünyanın en eski tarımına ve şehirlerine ev sahipliği yapan Mezopotamya'da ortaya çıktı. Burada, Sümerler çetele çizgisi kavramını ayrıntılı bir şekilde inceleyip farklı nicelikleri göstermek için farklı simgeler kullandılar, Babillilerse bunları geliştirip (kama şeklindeki) çivi yazısı karakterlerinden oluşan karmaşık bir sayılar sistemi haline getirdiler. Yaklaşık MÖ 4000'den itibaren Babilliler inşaat, mühendislik ve toprak bölüşümü hesaplamaları gibi pratik problemleri çözmede ilkel geometri ve cebirden yararlandılar, ticaret yapmak ve vergi almak içinse aritmetik becerilerine başvurdular.

Benzer bir hikâye, biraz sonraki bir zamanın uygarlığı olan Antik Mısır uygarlığında yaşandı. Mısırlıların ticaret ve vergi sistemi karmaşık bir sayısal sistemi gerektiriyor, inşaat ve mühendislik çalışmalarıysa hem bir ölçüm aracına hem de bir miktar geometri ve cebir bilgisine dayanıyordu. Matematik becerilerini gökyüzünü gözlemlemek için de kullanabilen Mısırlılar böylelikle astronomik ve mevsimsel döngüleri hesaplayıp tahmin yürütüyor, dini yıl ve tarım yılı için takvim oluşturuyorlardı. Aritmetik ve geometri ilkelerine dönük araştırma alanını Mısırlılar erken bir tarihte, MÖ 2000'de tesis ettiler.

Yunan katılığı

MÖ 6. yüzyıldan itibaren Antik Yunan uygarlığının Doğu Akdeniz üzerindeki etkisi hızla arttı. Yunan bilginler Babillilerin ve Mısırlıların matematik düşününü hızla özümsediler. Yunanlar, Mısırlılardan türetilmiş 10-tabanlı (10 simgeli) bir sayısal sistemi kullanıyorlardı. Özellikle geometri, biçim ve simetrinin güzelliğini yücelten Yunan kültürüne çok uygundu. Matematik, Antik Yunan düşüncesinin köşe taşı haline gelerek sanatına, mimarisine, hatta felsefesine yansıdı. Geometri ve sayıların gizemli buldukları niteliklerinden etkilenen Pisagor ve müritleri, tarikat benzeri bir topluluk kurup evrenin ve onun kapsadığı her şeyin daya-

Pergeli Apollonius'un *Koni Kesitleri* sayesinde **geometride önemli ilerlemeler** sağlanır.

MÖ y. 200

Antik Çinliler kullandıkları siyah ve kırmızı bambu çubuklarla **negatif ve pozitif sayıları temsil eden bir sistemi** geliştirirler.

MÖ y. 150

Liu Hui, MÖ 10. yüzyıl kadar kadim tarihlerde yaşamış Çinli bilginlerce derlenmiş ***Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Bölüm*** üzerine önemli bir yorum çıkarır.

263

MÖ y. 250

Arşimet **çokgenlerden yararlanarak Pi sayısının bir yaklaşık değerini bulur.**

MÖ y. 150

Nicealı Hipparkos **ilk trigonometri tablolarını derler.**

MÖ y. 250

Diyofantus denklemlerdeki bilinmeyen kuvvetler için icat ettiği simgeleri *Arithmetica*'sında yayımlar.

470

Zu Chongzhi, sonraki binyıl boyunca geride bırakılamayacak bir hesaplamayla, **Pi sayısının yedi ondalık basamaklı** bir yaklaşık değerini bulur.

nağı olduğuna inandıkları matematik ilkelerini araştırmak uğruna çalıştılar.

Pisagor'dan yüzyıllar önce Mısırlılar, köşelerin dik açılı olduğundan emin olmak için kenarları 3, 4 ve 5 birim olan bir üçgeni inşaat aleti olarak kullanmışlardı. Bu fikir akıllarına gözlem sonucunda gelmiş, ardından bunu pratik bir kural olarak uygulamışlardı. İlkeyi katı bir kurallılıkla ortaya koymak üzere kolları sıvayan Pisagorcularsa, tüm dik açılı üçgenler için bu fikrin geçerli olduğuna dair ispatı öne sürdüler. Yunanların matematiğe en büyük katkısı işte bu ispat ve katılık anlayışıdır.

Platon'un Atina'daki Akademisi felsefe ve matematik araştırmalarına ayrılmış ve beş Platonik katıyı (dörtyüzlü, küp, sekizyüzlü, onikiyüzlü ve yirmiyüzlü) bizzat Platon tanımlamıştı. Başta Zenon olmak üzere diğer filozoflar, matematiğin temellerine mantıktan yaklaşmak suretiyle sonsuzluk ve değişim problemlerini gözler önüne serdiler. Tuhaf bir olgu olan irrasyonel sayıları dahi araştırdılar. Platon'un öğrencisi Aristoteles ise, mantıksal biçimlere dönük yöntemsel analizi sayesinde, tümevarım (örneğin gözlemlerden göz kararı bir çıkarımda bulunmak) ile tümdengelim (belirlenen öncüllerden, ya da aksiyomlardan, mantıksal aşamaları izleyerek belli bir vargıya ulaşmak) arasındaki farkı belirledi.

Bunu esas alan Öklit, *Öğeler*'inde aksiyomatik hakikatlerden yola çıkarak matematiksel ispatların ilkelerini açıkladı; *Öğeler* sonraki iki binyıl matematiğin dayanak noktası oldu. Diyofantus, benzer bir katılıkla, denklemlerindeki bilinmeyen sayıları temsilen simgelerin kullanımında öncü oldu; cebirde simgesel notasyon yönünde atılan ilk adımdı bu.

Doğuda yeni bir şafak sökümü

Yunanların egemenliği en sonunda Roma İmparatorluğunun yükselişiyle noktalandı. Romalılar matematiği araştırmaya değer bulmuyor, pratik bir araç olarak görüyorlardı. Aynı zamanda, Hindistan ve Çin'deki kadim uygarlıklar kendi sayısal sistemlerini geliştirdiler. Özellikle Çin matematiğinin en parlak dönemi, büyük oranda Liu Hui'nin Çin matematiği metinlerini elden geçirip kapsam kazandırdığı çalışması sayesinde MS 2. ve 5. yüzyıllar arasında yaşandı. ■

RAKAMLAR BASAMAKLARINA YERLEŞİR

KONUMSAL SAYILAR


2
1
3

KISACA

UYGARLIK
Babilliler

ALAN
Aritmetik

ÖNCE
40.000 yıl önce Avrupa ve Afrika'daki Taş Devri insanları odun veya kemiklere kazıdıkları çetele çizgileriyle sayı sayarlar.

MÖ 6000-5000 Sümerler geliştirdikleri eski hesaplama sistemleriyle arazi ölçümü yapar ve geceleyin gökyüzünü incelerler.

MÖ 4000-3000 Babilliler, geliştirdikleri 60-tabanlı sistemlerinde 1 için küçük bir koniyi, 60 için büyük bir koniyi, 10 için de kilden bir topu kullanırlar.

SONRA
MS 2. yüzyıl Çinliler 10-tabanlı konumsal sayı sistemlerinde abaküs kullanırlar.

MS 7. yüzyıl Hindistan'da Brahmagupta, sıfırı, sadece bir yer tutucu olarak değil başlı başına bir sayı olarak kullanır.



Gelişmiş bir sayı sistemi kullandığı bilinen ilk insanlar, Dicle ve Fırat nehirleri arasında, günümüzün Irak topraklarında yaşayan kadim bir uygarlık olan Mezopotamyalı Sümerlerdir. MÖ 6. binyıldan kalma Sümer kil tabletleri farklı nicelikleri gösteren simgeler içerir. Babillilerden sonra gelen Sümerler, imparatorluklarının idaresinde verimli matematik araçlarına ihtiyaç duydular.

Babillileri Mısır gibi komşularından farklı kılan, konumsal (basamak değerli) bir sayı sistemi kullanmalarıydı. Bu sistemlerde bir sayının değerini o sayının hem simgesi hem de konumu belirtir. Örneğin günümüzde, ondalık sayı sisteminde bir sayının içerdiği bir rakamın konumu, onun değerinin birler (ondan küçük), onlar, yüzler vb. büyüklüğünde olup olmadığını gösterir. Küçük bir simge kümesi daha büyük bir değerler yelpazesini temsil edebileceğinden böyle sistemler hesaplamayı daha verimli kılar. Antik Mısırlılarsa bunun aksine birler, onlar, yüzler, binler ve daha büyük değerler için farklı simgeler kullanıyordu ve basamak değerli sistemleri yoktu. Büyük sayıları temsil etmek için 50 veya daha çok hiyeroglif gerekebiliyordu.

Farklı tabanlar kullanmak

Günümüzde kullanılan Hint-Arap rakam sistemi, 10-tabanlı (ondalık) bir sistemdir. Dokuz rakam (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ve yer tutucu olarak bir adet sıfır olmak üzere yalnızca 10 simge kullanır. Babillilerin sisteminde bir hanenin konumu onun değerini belirttiğinden en küçük değerli hane daima en sağdadır. 10 tabanlı bir sistemde, mesela 22 ($2 \times 10^1 + 2$) gibi iki haneli bir sayıda, soldaki 2'nin değeri sağdakinin on katıdır. 22 sayısının sonuna başka hanelerin eklenmesiyle yüzler, binler ve 10'un daha büyük kuvvetleri meydana gelir. Ayrıca bir tamsayıdan sonra gelecek bir simgeyle (şimdiki standart notasyon ondalık virgülüdür) o sayı, kesir kısmından ayırılabilir ve bu kısımdaki rakamlardan her biri kendisinden önceki rakamın basamak değerinin onda birini temsil eder.

Babilliler daha karmaşık bir sis-

> Hesap yapmak, ağırlık ölçmek, gözlem yapmak bize bahşedilmiştir; bu, doğa felsefesidir.
> **Voltaire**
> **Fransız filozof**

Ayrıca bkz. Rhind papirüsü 32–33 ▪ Abaküs 58–59 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Sıfır 88–91 ▪ Fibonacci 106–11 ▪ Ondalık sayılar 132–37

tem olan altmışlık (60-tabanlı) bir sayı sistemiyle çalışıyorlardı. Muhtemelen kendilerine Sümerlerden miras kalan bu sistem günümüzde zamanı, daire içindeki açıları (360°= 6×60) ve coğrafi koordinatları ölçmek amacıyla dünya genelinde halen kullanılır. Sayı tabanı olarak neden 60'ı kullandıkları hâlâ kesin olarak bilinmiyor. Diğer birçok sayıya (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 ve 30) bölünebildiği için tercih edilmiş olabilir. Babilliler takvim yılları için de güneş yılını (365,24 gün) temel aldılar; bir yıldaki gün sayısı, 360'a (6 × 60) ek olarak festivallere ayrılan günlerdi.

Babillilerin altmışlık sisteminde tek bir simge, tek başına kullanılarak ve en fazla 9 kez tekrarlanarak 1'den 9'a kadar olan sayıları temsil ediyordu. 10 için, bir simgenin soluna koyulan ve 59'a kadar olan sayılarda iki ila beş kez tekrarlanan fakl bir simge kullanılıyordu. 60'taysa (60 × 1), 1 için kullanılan ilk simge yeniden kullanılıyor ama 1'in simgesine oranla daha sola koyuluyordu. Sistem 60-tabanlı olduğundan bunun gibi iki simge 61'i temsil ediyor, üç simgeyse 3661'i, yani 60 × (60)60^2 + 60 +1'i ifade ediyordu.

60-tabanlı sistemin bariz kusurları vardı. Bu sistem ister istemez 10-tabanlı bir sistemden daha fazla simge gerektiriyordu.

Ayrıca, altmışlık sistemde basamak değeri ve tamsayıları kesir kısımlarından ayırmaya yarayacak



Babil güneş tanrısı Şamaş, MÖ yaklaşık 1000 yılına tarihlendirilen bir kil tablette, eğitimini yeni tamamlamış ölçümcülere eskinin ölçüm aletleri olan bir çubuk ve sarılı ip veriyor.

Çivi yazısı

19. yüzyıl sonlarında akademisyenler, Irak ve çevresindeki Babil yerleşim yerlerinden çıkarılan kil tabletlerin üzerine işaretlenmiş (kama şekilli) "çivi yazısının" şifresini çözdüler. Harf ve sözcüklerin yanı sıra gelişmiş bir sayı sistemini gösteren bu işaretler bir iğnenin herhangi bir ucuyla nemli kile oyuluyordu. Mısırlılar gibi Babilliler karmaşık toplumlarını yönetmek için yazmanlara ihtiyaç duyuyordu ve matematiksel kayıtlar taşıyan çoğu tabletin yazmanların eğitildiği okullardan çıktığı düşünülmektedir. Günümüzde Babil matematiği hakkında çok şey keşfedilmiş bulunuyor. Bu keşifler çarpma, bölme, geometri, kesirler, karekökler, küpkökler, denklemler ve diğer biçimleri kapsıyor; bunun sebebi, Mısır papirüs rulolarının aksine, kil tabletlerin çıkarıldığında daha sağlam olması. Çoğu MÖ 1800 ve 1600 aralığına ait birkaç bin tablet dünyanın çeşitli yerlerindeki müzelerde korunmakta.



Simgelerin şeklini tanımlamak üzere Latince *cuneus* ("kama") sözcüğünden türemiş bir sözcük olan çivi yazısı (*cuneiform*) nemli kil, taş veya metal üzerine kazınıyordu.

1	11	21	31	41	51
2	12	22	32	42	52
3	13	23	33	43	53
4	14	24	34	44	54
5	15	25	35	45	55
6	16	26	36	46	56
7	17	27	37	47	57
8	18	28	38	48	58
9	19	29	39	49	59
10	20	30	40	50	60

Babillilerin 60-tabanlı sayı sistemi iki simgeden üretilmişti: tek başına 1'den 9'a kadar sayılar için birlikte kullanılabilen tekil birim simgesi ve 20, 30, 40 ve 50 için tekrarlanan 10 simgesi.

bir şey yüzyıllarca olmadı. Ne var ki MÖ 300 civarında Babilliler, sıfırı günümüzde yer tutucu olarak kullanmamıza benzer şekilde, değersizliği belirtmek için iki kama kullandılar; sıfırın ilk kullanımı muhtemelen buydu.

Diğer sayma sistemleri

Dünyanın öbür tarafındaki Mezoamerika'da, MÖ ilk binyılda Maya uygarlığı kendilerine ait ileri düzey numaralandırma sistemlerini görünüşte diğer uygarlıklardan apayrı bir şekilde geliştirdiler. Onlarınki muhtemelen el ve ayak parmaklarının kullanıldığı basit bir sayma yönteminden evrilmiş 20-tabanlı (yirmilik) bir sayı sistemiydi. Aslına bakılırsa 20-tabanlı sayı sistemleri dünyanın farklı yerlerinde, Avrupa'da, Afrika'da ve Asya'da kullanılıyordu. Dil çoğu zaman bu sistemin kalıntılarını barındırır. Örneğin Fransızcada *quatre-vingt* (4 × 20) şeklinde ifade edilir. Galliler ve İrlandalılar da bazı sayıları 20'nin katları olarak ifade eder. İngilizcedeyse bir score, 20'dir. Kitabı Mukaddes'teyse, örneğin, 90. Mezmur'da insan ömrünün "üç *score* ve on yıl" veya "dört *score* yıl" uzunluğunda olduğundan bahsedilir.

MÖ yaklaşık 500'den Çinlilerin Hint-Arap sayılarını resmen kullanmaya başladığı 16. yüzyıla kadar Çinliler sayıları temsil etmek için sayma çubuklarından yararlandılar. Bu, ilk ondalık basamak değerli sistemdi. Farklı miktarlardaki dikey ve yatay çubukları farklı şekillerde kullanarak, günümüzdeki ondalık sistem gibi bu sistemle de birler, onlar, yüzler ve 10'un diğer kuvvetleri ifade edilebiliyordu. Örneğin 45, 4×10^1'i (40) temsil eden dört yatay çubuk ve 5 × 1'i (5) temsil eden beş dikey çubukla yazılıyordu. Dört dikey çubuk ve ardından gelen beş dikey çubuksa 405'i 4 × 100 (veya 10^2) + 5 × 1'i simgeliyordu; yatay çubukların olmaması, sayıda hiç on bulunmadığı anlamına geliyordu. Hesaplamalar, çubuklar bir sayma tablası üzerinde hareket ettirilerek yapılıyordu. Pozitif ve negatif sayılar, sırasıyla, kırmızı ve siyah çubuklarla veya farklı (üçgen ve dikdörtgen) kesitli çubuklarla temsil ediliyordu. Roma rakamlarının Batıda bazen kullanıldığı gibi, sayma çubukları da Çin'de hâlâ zaman zaman kullanılmaktadır.

Çin'in basamak değerli sistemini Çin abaküsünde (*suanpan*) görmek mümkündür. Romalılar da benzer bir araç kullanıyordu ama geçmişi en az MÖ 200'e uzanan Çin abaküsü, boncukla sayı sayılan en eski araçlardandır. Günümüzde halen kullanılmakta olan Çinlilerin versiyonunda, merkezde bulunan bir çubuk ve birleri onlardan, yüzlerden vb. ayırmaya yarayan değişken sayıda dikey tel vardır. Her sütunda, çubuğun üst tarafında her biri 5 değerinde iki adet boncuk, alt tarafındaysa her biri 1 değerinde beş adet boncuk vardır.

Japonlar, Çin abaküsünü 14. yüzyılda kullanmaya başladılar ve kendi abaküsleri olan *soroban*'ı geliştirdiler. Soroban'ın merkezdeki çubuğu-

> Babil ve Asur uygarlıkları yok olup gitti, buna rağmen Babil matematiği hâlâ ilginçtir ve Babillilerin 60'lık ölçeği astronomide halen kullanılır.
>
> **G. H. Hardy**
> **İngiliz matematikçi**

> Başka herhangi bir sayı yerine 10'larla çalışıyor olmamız, sırf anatomimizden ileri gelir. Saymak için on parmağımızı kullanırız.
>
> **Marcus du Sautoy**
> **İngiliz matematikçi**

nun üst tarafında beş değerinde bir adet boncuk, alt tarafındaysa her sütunda her biri 1 değerinde dört boncuk bulunur. Hatta gençlerin *anzan* olarak bilinen, *soroban*'la akıldan hesap yapma becerilerini sergiledikleri yarışmalar yapılmaktadır.

Modern sayılama sistemi

Bugün dünya genelinde kullanılan Hint-Arap ondalık sisteminin kökeni Hindistan'dadır. MS 1. yüzyıl ile MS 4. yüzyıl arasında kalan zaman zarfında, basamak değeri kullanılarak sıfırla birlikte dokuz simge daha işe yarar hale getirildi ve tüm sayıların verimli bir şekilde yazılması böylelikle mümkün oldu.



Utagawa Toyohiro'nun The Red Snapper's Dream adlı eserinde, Japonların hem balıkçılar tanrısı hem de yedi şans tanrısından biri olan Ebisu, kârını hesaplamak için soroban kullanır.

9. yüzyılda Arap matematikçiler, sistemi benimseyip iyileştirdi. Tamsayıların küsuratını da ifade edebilmek adına ondalık işaretini kullanıma soktular. Üç yüzyıl sonra, Pisalı Leonardo (Fibonacci) *Liber Abaci* (1202) kitabı aracılığıyla Hint-Arap rakamlarını Avrupa'da yaygınlaştırdı. Roma rakamlarının ve geleneksel hesaplama yöntemlerinin yerine bu yeni sistemin kullanılması hakkındaki tartışmalar birkaç yüzyıl sürdüyse de, yeni sistem benimsendi ve matematikteki modern atılımların yolu açılmış oldu.

Elektronik bilgisayarların icadıyla diğer sayı tabanları, özellikle de 2-tabanlı bir sayı sistemi olan ikili sayı sistemi önem kazandı. 10 simge barındıran 10-tabanlı sistemden farklı olarak ikili sistemde yalnızca iki simge vardır: 1 ve 0. Konumsal bir sistem olmasına rağmen, her sütun 10'la değil 2'yle çarpılır; bu, 2^1, 2^2, 2^3 şeklinde de gösterilir. İkili sistemde 111 sayısı, $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, yani bizim ondalık sistemimizde 4 + 2 + 1 veya 7 anlamına gelir.

Tüm modern sayı sistemlerindeki gibi ikili sistemde de basamak değeri ilkeleri daima aynıdır. Babillilerin mirası olan basamak değeri büyük sayıları temsil etmek için etkili, kolay anlaşılır ve verimli bir yöntemdir. ■



13. veya 14. yüzyıla tarihlendirilmiş, sağ kalan en kadim Maya kitabı olan Dresden Kodeksi'nde Maya sayı simgeleri ve hiyeroglifleri resmedilmektedir.

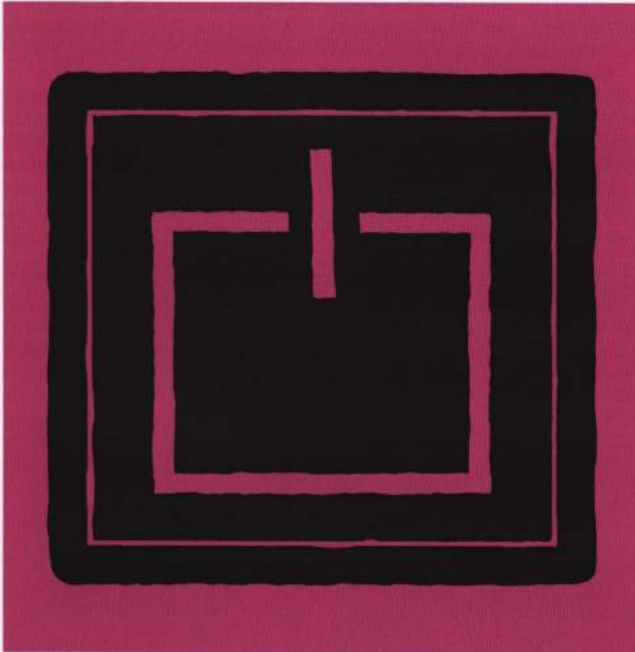
Maya sayı sistemi

MÖ yaklaşık 2000'den itibaren Orta Amerika'da yaşamış olan Mayalar, MÖ yaklaşık 1000'den itibaren astronomi ve takvim hesaplamaları yapmak için 20-tabanlı (yirmilik) bir sayı sistemi kullanıyorlardı. Onlar da Babilliler gibi güneş yılını temel alan, 360 gün ve festivallerle birlikte toplamda 365,24 günden oluşan bir takvimi kullanıyorlardı. Takvimleri, mahsullerinin yetişme döngülerini hesaplamalarına yardımcı oluyordu.

Maya sisteminde simgelerden yararlanılıyordu: 1'i temsil eden bir nokta ve 5'i temsil eden bir çubuk. Çubukların üzerine noktaları koyup oluşturdukları birleşimleri kullanarak 19'a kadar olan sayıları üretebiliyorlardı. En küçük sayılar en altta olmak üzere 19'dan büyük sayılar dikey yönde yazılıyordu. Bu şekilde, sonuçları yüz milyonları bulan hesaplamalar yaptıklarına dair deliller mevcuttur. MÖ 36'dan kalma bir yazıt, 4. yüzyıla gelindiğinde kullanımı yaygınlık kazanmış olan sıfırı simgelemek için kabuk şeklinde bir simge kullandıklarını ortaya koymaktadır. Mayaların sayı sistemi, İspanyolların 16. yüzyıldaki fethine dek Orta Amerika'da kullanımda kaldı. Ne var ki etkisinin daha fazla yayılması mümkün olmadı.

EN BÜYÜK KUVVET OLARAK KARE

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER



KISACA

UYGARLIKLAR
Mısırlılar (MÖ y. 2000)
Babilliler (MÖ y. 1600)

ALAN
Cebir

ÖNCE
MÖ y. 2000 Berlin papirüsünde Antik Mısır'da çözülmüş bir ikinci derece denklem kayıtlıdır.

SONRA
MS 7. yüzyıl Hintli matematikçi Brahmagupta, ikinci derece denklemleri sadece pozitif tamsayı kullanarak çözer.

MS 10. yüzyıl Mısırlı bilgin Ebu Kamil, ikinci derece denklemleri çözmek için negatif ve irrasyonel sayıları kullanır.

1545 İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano, cebrin kurallarını açıkladığı *Ars Magna* (*Büyük Marifet veya Cebrin Kuralları*) başlıklı eserini yayımlar.

İkinci derece denklemler, bilinmeyen sayıların en fazla 2'nci kuvvetini içine alan denklemlerdir: x^2'yi içerir ancak x^3'ü, x^4'ü vb. içermezler. Matematiğin başlıca özelliklerinden biri, denklemlerin gerçek problemlere çözüm üretmek amacıyla kullanılabilmesidir. İkinci derece denklemler, alanları ya da eğri güzergâhları (parabol gibi) barındıran problemler için çok kullanışlıdır ve bir top ya da roketin havadaki ilerleyişi gibi fiziksel olguları açıklarlar.

Antik köken

İkinci derece denklemlerin geçmişi dünyanın dört bir yanına yayılır. Bu denklemlerin bulunma-

Ayrıca bkz. İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Sıfır 88–91 ▪ Cebir 92–99 ▪ Binom teoremi 100–01 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–05 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31

İkinci derece denklemler **2 üssünü** içerdiğinden **iki boyutta** hesaplama yapılırken kullanılır.

Boyutların sayısı, denklemin barındırdığı **en yüksek gerçel çözüm sayısına** eşittir.

İkinci derece bir denklemin en fazla **iki, üçüncü derece bir denklemin** en fazla üç vb. gerçel çözümü vardır.

İkinci derece veya herhangi bir denklem **sıfıra eşitlenirse** (ör. $x^2 + 3x + 2 = 0$), bulunan **çözümlere kök adı verilir**.

İkinci derece bir denklemde bu **iki kök**, grafikte ikinci derece bir eğrinin **x eksenini kestiği** noktalardır.



Berlin papirüsü 1900 yılında Alman Mısır bilimcisi Hans Schack-Schackenburg tarafından kopyalanıp yayımlandı. Papirüsün içerdiği iki matematik probleminden biri, ikinci derece bir denklemdir.

sının sebebi muhtemelen, miras gereği toprak bölüştürme ya da toplama ve çarpma işlemlerini içeren problemleri çözme ihtiyacından doğdu.

İkinci derece denklemlerin günümüze ulaşabilen bir örneği, Berlin papirüsü olarak bilinen Antik Mısır metnidir (MÖ y. 2000). Problem şu bilgileri içerir: 100 kübitlik bir karenin alanı, ondan daha küçük olan iki karenin alanına eşittir. Küçük karelerden birinin kenarı, diğerinin kenarının yarısı ile çeyreğinin toplamı kadardır. Bu, modern notasyonda iki eşzamanlı denklemle ifade edilir: $x^2 + y^2 = 100$ ve $x = (1/2 + 1/4)$ $y = 3/4\,y$. Bunlar $(3/4\,y)^2 + y^2 = 100$ ikinci derece denklemi şeklinde basitleştirilip her iki karenin de kenar uzunluğu bulunabilir.

Mısırlılar "yanlış konum" adı verilen bir yöntemi kullanarak çözümü buluyorlardı. Bu yöntemle matematikçi genelde hesaplaması kolay olan uygun bir sayı seçer, ardından bu sayıyı kullanınca denklemin vereceği sonucu bulmak için çözümü hesaplar. Çıkan sonuç, denklemin doğru çözümünü vermesi için sayıyla nasıl oynamak gerektiğini gösterir. Örneğin Berlin papirüsü probleminde küçük karelerden büyük olanı için kullanılacak en basit uzunluk, problem çeyrek oranı içerdiğinden 4'tür. En küçük karenin kenarı içinse 3 kullanılır çünkü bu uzunluk diğer karenin kenarının $3/4$'ü kadardır.

Yanlış konum sayılarıyla oluşturulan iki karenin alanları sırasıyla 16 ve 9 çıkar. Bunlar toplandığında da toplam alan 25 eder. Bu, 100'ün sadece $1/4$'ü olduğundan Berlin papirüsüyle uyuşması için alanların dörtle çarpılması gerekmektedir. Dolayısıyla, 4 ve 3 yanlış basamak değerleri ikiyle çarpılarak 8 ve 6 çözümleri elde edilir.

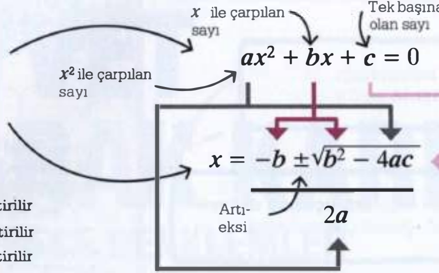
Babil kil tabletlerinde ikinci derece denklemlere dair başka kayıtlar da vardır. Bunlarda bir karenin köşegeni, beş ondalık basamakla gösterilir. YBC 7289 Babil tabletinde (MÖ y. 1800-1600) bulunan $x^2 = 2$ ikinci derece denk-

İkinci derece denklem formülü, ikinci derece denklemleri çözmenin bir yoludur. Modern uygulamada, ikinci derece denklemler x^2 ile çarpılan bir a sayısı, x ile çarpılan bir b sayısı ve tek başına duran bir c sayısı içerir. Formülde a, b ve c sayıları kullanılarak x'in nasıl bulunduğu aşağıdaki çizimde gösterilmektedir. İkinci denklemler, grafikte çözülmelerini kolaylaştırdığından çoğunlukla 0'a eşitlenir; eğrinin x ekseninini kestiği noktalar x'in çözümleridir.

İKİNCİ DERECE DENKLEM

İKİNCİ DERECE DENKLEM FORMÜLÜ

ÇÖZÜM YOLU



- *a* f rmüle yerleştirilir
- *b* f rmüle yerleştirilir
- *c* formüle yerleştirilir

lemi, dikdörtgenlerin inceltilip kare haline getirilmesiyle çözülür.

MS 7. yüzyılda Hintli matematikçi Brahmagupta, ikinci derece denklemlerin çözümü için, $ax^2 + bx = c$ biçimindeki denklemlerde işe yarayan bir formül çıkardı. O dönemin matematikçileri harf veya simge kullanmadığından çözümü sözcüklerle yazdı ama yine de yukarıda gösterilen modern formüle benzeyen bir çözümdü bu.

8. yüzyılda İranlı matematikçi El-Hârizmî ikinci derece denklemleri çözmek için, kareyi tamamlamak olarak bilinen geometrik bir çözüm kullandı. İkinci derece denklemler soyut cebir yerine araziyi konu alan gerçek problemlerin çözümünde kullanıldığı için 10. yüzyıla kadar geometrik yöntemler sık sık kullanıldı.

Negatif çözümler

Hintli, İranlı ve Arap bilginler o zamana kadar yalnızca pozitif sayıları kullanmıştı. $x^2 + 10x = 39$ denklemini çözdüklerinde 3 sonucunu buldular. Oysa bu, problemin iki doğru çözümünden biridir; diğeri -13'tür. x, -13'se, $x^2 = 169$ ve $10x =$ ¬-130'dur. Bir sayıya negatif bir sayının eklenmesi, o sayıdan kendisinin pozitif eşdeğerini çıkarmakla aynıdır; dolayısıyla $169 + -130 = 169 - 130 = 39$'dur.

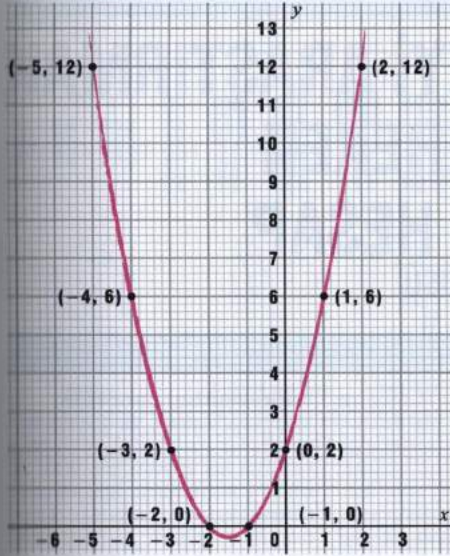
10. yüzyılda, Mısırlı bilgin Ebu Kamil Şuca, negatif sayılar ve cebirsel irrasyonel sayılardan (2'nin karekökü gibi) hem çözüm hem de katsayı (bilinmeyen bir nicelikle çarpılan sayılar) olarak faydalandı. 16. yüzyıla gelindiğinde matematikçilerin çoğu negatif çözümleri kabul etmiş ve rasyonel olmayan sayılar (irrasyonel kökler: tam olarak ondalık sayı biçiminde ifade edilemeyen kökler) içlerine sinmişti. Denklemleri sözcüklerle yazmak yerine sayı ve simgeleri kullanmaya da başlamışlardı. Matematikçiler ikinci derece denklemlerin çözümünde artık artı-eksi (±) işaretini kullanıyorlardı. $x^2 = 2$ denkleminin çözümü sadece $x = \sqrt{2}$ değil, $x = \pm\sqrt{2}$'dir. Artı-eksi simgesinin sebebi, iki negatif sayının çarpımının pozitif bir sayı olmasıdır. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ gibi $-\sqrt{2} \times -\sqrt{2} = 2$ de doğrudur.

1545'te *Büyük Marifet veya Cebrin Kuralları*'nı yayımlayan İtalyan bilgin Gerolamo Cardano, bu yapıtında şu problemi irdeliyordu: "Hangi iki sayının toplamı 10, çarpımı 40'tır?" Cardano problemden ikinci derece bir denklem çıktığını fark etti ve kareye tamamlama işlemini yaptığında $\sqrt{(-15)}$ sonucunu elde etti. O dönemde matematikçilerin elinde, çarpıldığında negatif bir sayı veren hiçbir sayı yoktu ama Cardano buna rağmen denklemin iki çözümünü bulmak için imkânsızı denemeyi ve eksi 15'in kareköküyle işlem yapmayı önerdi. $\sqrt{(-15}$ gibi sayılar sonraları "sanal" sayılar adıyla anıldı.

Denklemlerin yapısı

Modern ikinci derece denklemlerin görünüşü genellikle $ax^2 + bx + c = 0$ gibidir. a, b ve c bilinen sayıları, x ise bilinmeyen sayıyı temsil eder. Denklemler değişkenlerden (bilinmeyen sayılar için simgeler), katsayılar, sabitler (değişkenlerle çarpılmayan sayılar) ve işleçlerden (artı ve eşittir işareti gibi simgeler) oluşur. İşleçlerin ayırdığı kısımlar terimlerdir. Terimler sayı veya

> Siyaset şimdiki zaman içindir, bir denklemse sonsuzluk için.
>
> **Albert Einstein**

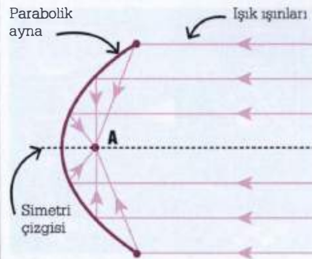


$y = ax^2 + bx + c$ ikinci derece fonksiyonunun grafiği, parabol adı verilen U şeklindeki bir eğriyi oluşturur. Bu ikinci derece fonksiyona ait (siyah renkli) noktalar bu grafikte gösterilmektedir ve $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$'dir. Bu, $x^2 + 3x + 2 = 0$. ikinci derece denklemini ifade eder. x'in çözümleri, $y = 0$ olduğu ve eğrinin x eksenini kestiği noktalardır: −2 ve −1.

değişken ya da ikisinin birleşimi olabilir. Modern ikinci derece denklemlerde dört terim bulunur: ax^2, bx, c ve 0.

Paraboller

Fonksiyon, değişkenler (çoğu zaman x ve y) arasındaki ilişkiyi tanımlayan bir terimler grubudur. İkinci derece fonksiyonlar genelde $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde yazılır ve grafikte gösterildiğinde parabol adı verilen bir eğriyi meydana getirir (bkz. yukarıda). $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel (sanal olmayan) çözümleri, şayet varsa, kök adını alır ve parabolün x eksenini kestiği noktalardır. Tüm paraboller x eksenini iki yerden kesmez. Parabolün x eksenine yalnızca bir kez temas etmesi, çakışan köklerin mevcut olduğu anlamına gelir (çözümler birbirine eşittir). Bu biçimdeki en basit denklem $y = x^2$'dir. Parabol, x eksenine temas etmiyor veya kesmiyorsa gerçel kök yoktur. Paraboller yansıtıcılık özellikleri sayesinde gerçek dünyada kullanışlıdır. Uydu antenler bu nedenle paraboliktir. Antenin aldığı sinyaller parabolden yansıyıp tek bir noktaya, alıcıya yönelir. ■



Parabolik cisimler özel yansıtıcılık özelliklerine sahiptir. Parabolik bir aynayla kendi simetri çizgisine paralel olan her ışık ışını yüzeyden aynı sabit noktaya (A) yansır.

Uygulamalar

İlk başta geometri problemlerinin hesaplamalarında kullanılmalarına rağmen ikinci derece denklemler günümüzde matematik, bilim ve teknolojinin birçok alanında önemli yer tutmaktadır. Örneğin fırlatılan bir cismin havada ilerleyişi ikinci derece denklemlerle modellenebilir. Havaya atılan bir cisim, yerçekimi sonucu tekrar aşağı düşecektir. İkinci derece fonksiyonla, fırlatılan cismin hareketi, yani cismin zaman içinde değişen yüksekliği tahmin edilebilir. İkinci derece denklemler zaman, hız ve uzaklık arasındaki ilişkinin modellenmesinde ve mercek gibi parabolik cisimlerle ilgili hesaplamalarda kullanılmaktadır. Ticarette kâr zarar öngörüsünde bulunmak için de kullanılmaktadırlar. Kâr hesabında, toplam gelirden üretim maliyetinin çıkarılması esastır; şirketler bu değişkenlerle, kâr fonksiyonu denen ikinci derece bir denklem oluşturarak kârlarını en üst düzeye çıkarmak amacıyla en uygun satış fiyatlarını hesaplarlar.



İkinci derece denklemler askeri uzmanlar tarafından, ABD ordusunda yaygın olarak kullandığı bu MIM-104 Patriot karadan havaya füzesi gibi, toplarla ateşlenen mermilerin güzergâhının modellemesinde kullanılmaktadır.



HER ŞEYİ ARAŞTIRMAK İÇİN GEREKEN DOĞRU HESAP

RHIND PAPİRÜSÜ

KISACA

UYGARLIK
Antik Mısırlılar
(MÖ y. 1650)

ALAN
Aritmetik

ÖNCE
MÖ y. 2480 Oyma taşlarda Nil nehrinin taşkın düzeyinin, kübit (yaklaşık 52 cm [20,5 inç]) ve aya (*palm*) (yaklaşık 7,5 cm [3 inç]) cinsinden ölçülen kayıtlarını alırlar.

MÖ y. 1800 Moskova papirüsünde, bir yarımkürenin yüzey alanı ve bir piramidin hacminin hesaplaması dâhil olmak üzere 25 matematik probleminin çözümü sunulur

SONRA
MÖ y. 1300 Berlin papirüsü üretilir. Bu papirüste Antik Mısırlıların ikinci derece denklemleri kullandığı ortaya koyulur.

MÖ 6. yüzyıl Yunan bilim insanı Thales, Mısır'a gidip buradaki matematik kuramlarını inceler.

Londra'dakiBritishMuseum'da yer alan Rhind papirüsünde bize Antik Mısır matematiğinin şaşırtıcı bir anlatımı sunulur. 1858'de Mısır'da satıldığı İskoç antikacı Alexander Henry Rhind'ın adını taşıyan papirüsü, Ahmose adlı bir yazıcı, 3500 yıldan fazla bir zaman önce daha kadim belgelerden kopyalamıştır. Ölçüleri 32 cm'ye (12,5 inç) 200 cm'dir (78,5 inç) ve aritmetik, cebir, geometri ve ölçüm üzerine 84 problem içerir. Bu ve Moskova papirüsü gibi diğer Antik Mısır arkeolojik eserlerine kaydedilen problemlerde alan, oran ve hacim hesaplamalarıyla ilgili teknikler açıklanmaktadır.



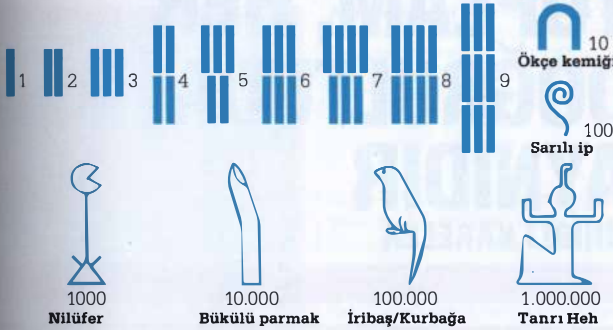
Mısır tanrılarından Horus'un Gözü, güç ve koruyuculuğun simgesiydi. Bazı kısımları paydaları 2'nin kuvvetleri olan kesirleri belirtmek için de kullanılıyordu. Örneğin göz yuvarlağı 1/4'ü, kaş 1/8'i temsil eder.

Representing concepts

Mısır sayı sistemi, ilk ondalık sayı sistemiydi. Rakamlar için bir çizgi ve 10'un her kuvveti için farklı bir simge kullanılıyordu. Simgeler tekrarlanarak da başka sayılar oluşturuluyordu. Bir kesir, üzerinde nokta olan bir sayı şeklinde gösteriliyordu. n'nin tamsayı olduğu $^1/_n$ birim kesrine en yakın kesir kavramı, Mısır'a özgü kesir kavramıydı. İkiyle çarpılan bir kesrin, başka bir birim kesirle toplanan bir birim kesir olarak yeniden yazılması gerekiyordu; örneğin modern notasyonla $^2/_3$, Mısır notasyonuyla $^1/_2 + {}^1/_6$'ydı ($^1/_3 + {}^1/_3$ değildi çünkü Mısırlılar aynı kesri tekrarlamıyordu).

Rhind papirüsünde yer alan 84 problemde, Antik Mısır'da yaygın olarak kullanılan matematik yöntemleri tarif edilir. Örneğin 24. problemde, kendisinin yedide biriyle toplamı 19 eden nicelik sorulur. Bunun karşılığı, $x + {}^x/_7 = 19$'dur. 24'üncü probleme uygulanan yaklaşım "yanlış konum" olarak bilinir. Ortaçağa kadar kullanılan bu teknik, deneme ve iyileştirmeye dayanır; bir değişken için en basit veya "yanlış" değer seçilir ve bir ölçekleme katsayısı (istenen niceliğin sonuca bölümü) kullanılarak uyarlanır.

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Pisagor 36–43 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Cebir 92–99 ▪ Ondalık sayılar 132–37



Antik Mısırlılar 1'den 9'a kadar sayıları göstermek için dikey çizgileri kullanıyorlardı. Özellikle taşa kazılanlar olmak üzere 10'un kuvvetleri hiyeroglif (resim simge) şeklinde tasvir edilirdi.

24. problemin çözümünde, yedide bir için, 7 sayısı ile en kolay şekilde sonuç bulunacağından değişken için ilk olarak 7 "yanlış" değeri kullanılır. 7 artı $\frac{7}{7}$ (veya 1) hesaplamasının sonucu 8'dir, 19 değil; bu nedenle bir ölçekleme katsayısına ihtiyaç vardır. 7 ile yürütülen tahminin istenen nicelikten ne kadar uzak olduğunu bulmak için, 19, 8'e ("yanlış" cevaba) bölünür. Çıkan sonuç, $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$'dir ($2\frac{3}{8}$ değildir çünkü Mısırlılarda çarpma işlemi, kesirleri ikiyle çarpma ve ikiye bölmeye dayalıydı); uygulanması gereken ölçekleme katsayısı budur. Dolayısıyla 7 (ilk "yanlış" değer), $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (ölçekleme katsayısı) ile çarpılarak $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ (veya $16\frac{5}{8}$) sonucu elde edilir.

Papirüsteki çoğu problem mal veya arazi paylarının hesaplanmasıyla alakalıdır. 41. problemde 9 kübit çapında, 10 kübit yüksekliğindeki silindirik bir dükkânın hacmi sorulmaktadır. İzlenen yöntemle, kenarı çapın $\frac{8}{9}$'u olan bir karenin alanı bulunur, ardından bu alan yükseklikle çarpılır. $\frac{8}{9}$ sayısı, bir karenin içine çizilecek bir dairenin karede kaplayacağı alana ilişkin bir oran olarak kullanılır. Bu yöntem 50. problemde, bir dairenin alanını bulmak için kullanılır: Dairenin çapından $\frac{1}{9}$ çıkarılır ve ortaya çıkan kenar uzunluğundan karenin alanı bulunur.

Hassasiyet düzeyi

Bir dairenin alanı, Antik Yunanlardan beri, dairenin yarıçapının karesi pi sayısıyla (π) çarpılarak (πr^2 şeklinde yazılır) bulunmuştur. Mısırlılarda Pi kavramı yoktu ancak Rhind papirüsündeki hesaplamaların gösterdiğine göre, Pi sayısının değerine çok yaklaşmışlardı. Daire alanı hesapları, dairenin çapının, yarıçapın iki katı ($2r$) olduğu dikkate alındığında, $(\frac{8}{9} \times 2r)^2$ olarak ifade edilebilir; bu da $(\frac{256}{81}\ r^2$ olarak basitleştirildiğinde Pi için $\frac{256}{81}$ karşılığı bulunur. Ondalık sistemde bu, Pi'nin doğru değerinden yaklaşık yüzde 0,6 daha büyüktür. ■

Kullanma kılavuzları

Rhind ve Moskova papirüsleri, Antik Mısır uygarlığının zirveyi gördüğü dönemden geriye kalan en eksiksiz matematik belgeleridir. Aritmetik, geometri ve geometrik ölçüm konularında uzman yazıcılarca özenle kopyalanmış ve muhtemelen başka yazıcıların eğitiminde de kullanılmışlardı. Büyük olasılıkla çağlarının en gelişmiş matematik bilgilerini aktarıyor olmalarına rağmen, akademik çalışmalar olarak görülmüyorlardı. Bunlar ticaret, muhasebe, inşaatın yanı sıra ölçüm ve hesaplama gerektiren diğer etkinlikler için kullanım kitapçıklarıydı.

Örneğin Mısırlı mühendisler piramitleri inşa ederken matematikten yararlandılar. Rhind papirüsünde bir piramidin eğrisiyle ilgili olarak *seked* (her 1 kübitlik alçalmada, eğrinin katettiği yatay mesafenin bir ölçüsü) kullanılarak yapılmış bir hesaplama bulunur. Bir piramidin kenarı ne kadar dikse *seked* değeri o kadar düşüktür.



Rhind papirüsünü yazan yazıcı, hieratik sayı yazma sistemini kullanmıştı. Bu elyazısı tarzı, karmaşık hiyeroglifleri çizmeye kıyasla daha derli toplu ve kullanışlıydı.



TOPLAM, HER DOĞRULTUDA AYNIDIR

SİHİRLİ KARELER

KISACA

UYGARLIK
Antik Çinliler

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MÖ 9. yüzyıl Çinlilerin *I Ching* (*Yi Ching*) yapıtında, sayıların kehanette kullanılan trigram ve heksagramları sergilenir.

SONRA
1782 Leonhard Euler, *Yeni bir sihirli kare türü üzerine araştırmalar* başlıklı yapıtında Latin karelerinden bahseder.

1979 Sudoku tarzındaki ilk bulmacayı New York'ta faaliyet gösteren *Dell Magazines* basar.

2001 İngiliz elektronik mühendisi Lee Sallows, sayılar yerine geometrik şekiller içeren, "geo-sihirli (*geomagic*) kareler" adlı sihirli kareleri icat eder.

Sihirli kare, her hücreye farklı bir tamsayının yerleştirildiği, **kare şeklindeki bir kafestir** (Üçe üç veya daha büyük).

Her **satır, sütun ve köşegendeki** sayıların toplamı **aynı çıkar**.

Bu **toplam, sihirli toplamdır**.

Üçe üç bir kafeste 1'den 9'a kadar sayılar binlerce farklı şekilde yerleştirilebilir. Bunlardan yalnızca sekizi, her satır, sütun ve köşegendeki sayıların toplamının (sihirli toplam) aynı olduğu bir sihirli kareyi meydana getirir. 1'den 9'a kadar olan sayıların toplamı 45'tir, keza satır ve sütunların üçünün de toplamı da. Dolayısıyla, sihirli toplam 45'in $1/3$'ü, yani 15'tir. Aslında bir sihirli karede yalnızca bir sayı birleşimi vardır. Diğer yedi birleşim, bu birleşimin döndürülmüş halleridir.

Antik köken

Sihirli kareler "eğlence amaçlı matematiğin" muhtemelen ilk örneğidir. Kökeni kesin olarak bilinmese de, bilindiği kadarıyla ilk defa söz edildiği Çin efsanesi *Lo Shu* (*Lo Nehri Yazması*) MÖ 650 tarihlidir. Efsanede, yıkıcı bir selle karşı karşıya olan Büyük Kral Yu'ya bir kaplumbağa görünür. Kaplumbağanın sırtındaki izler sihirli kare biçimindedir ve 1'den 9'a kadar sayıları yuvarlak noktalar temsil etmektedir. Bu efsaneden dolayı, tek ve çift sayıların dizilişinin (çift sayılar daima karenin köşelerindeydi) sihirli özelliklere sahip olduğuna inanılıyordu ve çağlar boyunca şans muskası olarak kullanıldı. Çin'deki fikirler İpek Yolu gibi ticaret yolları üzerinden yayıldıkça sihirli kareler diğer kültürlerin de ilgisini çekti.

MS 100 yılına ait Hint metinlerinde sihirli karelere değinilir. Parfüm miktarını ölçmek için kullanı-

Ayrıca bkz. İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Eratosthenes kalburu 66–67 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Fibonacci dizisi 106–11 ▪ Altın oran 118–23 ▪ Mersenne asal sayıları 124 ▪ Pascal üçgeni 156–61



Alman sanatçı Albrecht Dürer'e ait *Melencolia I* eserinde, çanın altında, dördüncü derece (kuartik) bir sihirli kare göze çarpar; nükteli bir şekilde karenin içine yerleştirilmiş 1514 sayısı, gravürün tarihidir.

lan, Hindistan'ın yazıya geçirilmiş ilk sihirli karesi (MS y. 550) *Brihat-Samhita* başlıklı kehanet kitabında belirir. Kadim uygarlıkların bilimi ile Avrupa Rönesansı arasında hayati bir köprü işlevi gören Arap bilginler, sihirli kareleri Avrupa'ya 14. yüzyılda tanıttı.

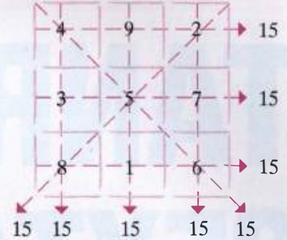
Farklı boyutlu kareler

Bir sihirli karedeki satır ve sütunların sayısına o sihirli karenin derecesi denir. Örneğin üçe üç bir sihirli karenin derecesi üçtür. İkinci derece sihirli kare yoktur çünkü böyle bir kare yalnızca tüm sayıların aynı olması halinde mümkündür. Derece yükseldikçe sihirli karelerin sayısı da artar. Dördüncü dereceyle sihirli toplamı 34 olan 880 sihirli kare meydana getirilir. Yüz milyonlarca beşinci derece (kuintik) sihirli kare vardır, altıncı derece sihirli karelerin sayısı ise henüz hesaplanmamıştır.

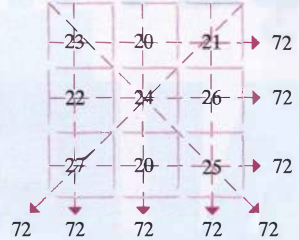
Sihirli kareler matematikçilerin hiç vazgeçmediği bir merak konusu oldu. 15. yüzyıl İtalyan matematikçisi ve *De viribus quantitatis*'in (*Sayıların gücü üzerine*) yazarı Luca Pacioli, sihirli kare koleksiyoncusuydu. 18. yüzyıl İsviçre'sindeki Leonhard Euler de sihirli karelere ilgi duymaya başladı ve Latin kareleri adını verdiği bir biçimini tasarladı. Latin karesindeki şekil veya simgelerden her satır ve sütunda yalnızca bir adet vardır.

Latin karesinden türetilen Sudoku meşhur bir bulmaca haline gelmiştir. 1970'lerde ABD'de icat edilen (ABD'de Sayı Konumu olarak adlandırılmıştı) Sudoku, 1980'lerde Japonya'da popüler olunca, "tekil rakamlar" anlamına gelen şimdiki bildik adını aldı. Bir Sudoku bulmacası, dokuza dokuz bir Latin karesidir ve getirilen ek bir kısıtlama uyarınca karenin alt bölümleri dokuz adet sayının tamamını içermelidir. ■

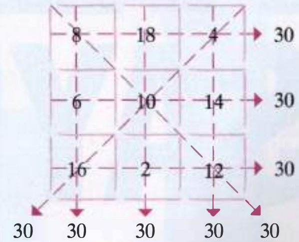
> Bir sihirbazın şimdiye dek yaptığı sihirli karelerin en sihirlisi.
>
> **Benjamin Franklin**
> **Keşfettiği bir sihirli kare hakkında**



Lo Shu sihirli karesinin sihirli toplamı 15'tir.



Burada, Lo Shu karesindeki tüm sayılara 19 eklenir, sihirli toplam 72'dir.



Burada, Lo Shu karesindeki tüm sayılar ikiyle çarpılmıştır; sihirli toplam 30'dur.

Bir sihirli kare elde edildikten sonra, karedeki her sayıya aynı nicelik eklense bile sonuçta yine bir sihirli kare ortaya çıkar.

TANRILARIN DA ŞEYTANLARIN DA NEDENİ SAYILARDIR

PİSAGOR



KISACA

KİŞİ
Pisagor
(MÖ y. 570-495)

ALAN
Uygulamalı geometri

ÖNCE
MÖ y. 1800 Babillilerden kalma Plimpton 322 kil tabletindeki hiyeroglif sayıların sütunları, Pisagor üçlüleriyle ilişkili birtakım sayılar içerir.

MÖ 6. yüzyıl Yunan filozof Miletli Thales, evrenin mitolojik olmayan bir açıklamasını ileri sürerek doğanın akılla yorumlanabileceği görüşünün ilk savunucusu olur.

SONRA
MÖ y. 380 Platon, *Devlet* yapıtının onuncu kitabında Pisagor'un ruh göçü kuramını benimser.

MÖ y. 300 Öklit, ilkel Pisagor üçlülerini bulmaya yarayan bir formül üretir.

6. yüzyıl Yunan filozofu Pisagor aynı zamanda ilkçağların en meşhur matematikçisidir. Matematik, bilim, astronomi, müzik ve tıpta ona mal edilen çok sayıdaki buluşun her biri ona ait olsa da olmasa da ömrünü matematik ve felsefeye adayan ve sayıları evrenin kutsal yapıtaşları olarak gören özel bir topluluğa hayat verdiğine şüphe yoktur.

Açılar ve simetri

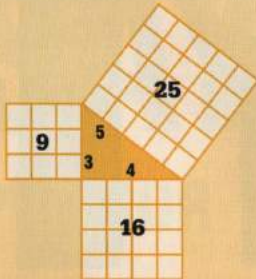
Pisagorcular geometride ustaydı, bu sebeple üçgenin üç açısının toplamının (180°) iki dik açının toplamına (90° + 90°) eşit olduğunu biliyorlardı. Bu hakikati 200 yıl sonra Öklit, üçgen beliti olarak tanımlayacaktı. Pisagor'un müritleri bazı çokyüzlülerden de haberdardı. Kusursuz derecede simetrik olan bu üç boyutlu şekiller (küp gibi) sonraları Platonik katılar olarak nitelendi.

Her şeyden önce, dik üçgenin kenarları arasındaki ilişkiyi tarif eden formül söz konusu olunca ilk akla gelen, Pisagor'un kendisidir. Pisagor teoremi adıyla ünlenen $a^2 + b^2 = c^2$ formülünde c, üçgenin en uzun kenarı (hipotenüs), a ve b ise dik açıya komşu olan iki kısa kenardır.

İki kısa kenarının uzunlukları 3 cm ve 4 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsü, 5 cm uzunluğunda olacaktır. $3^2 + 4^2 = 5^2$



Antik Yunan'ın Yedi Bilgesinden biri olan Miletli Thales'in, geometri ve diğer bilimsel konulardaki fikirleriyle Pisagor'a ilham vermiş olması muhtemeldir. Mısır'da görüşmüş olabilirler.



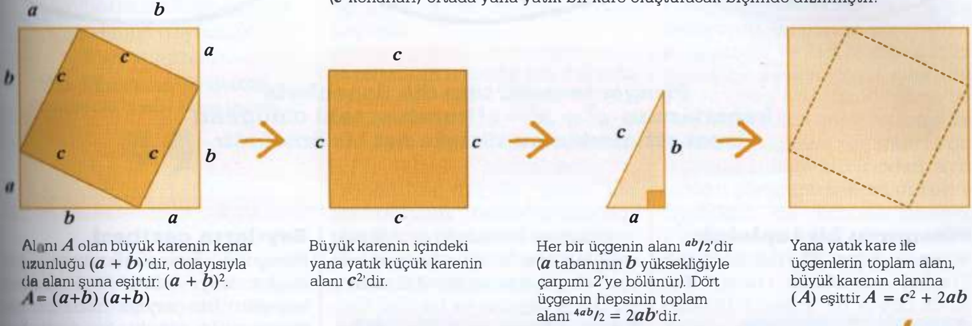
Kenar uzunlukları 3, 4 ve 5 olan üçgen, Pisagor üçlüleri arasındaki en küçük ya da en ilkel üçgendir. Grafikte de görüldüğü üzere 9 ve 16'nın toplamı 25 eder.

Pisagor üçlüleri

$a^2 + b^2 = c^2$ denklemini çözen, üç tamsayılı kümedir ve varlıkları Pisagor'dan çok önceleri de biliniyor olmasına rağmen Pisagor üçlüleri olarak bilinir. MÖ 1800 civarında Babilliler Pisagor sayılarını Plimpton 322 kil tabletine kaydetmişlerdi. Bu sayılar gösteriyordu ki, üçlüler büyüdükçe birbirlerinden uzaklaşıyordu. Pisagorcular üçlü kümeleri bulmak için yöntemler geliştirdiler ve bu kümelerin sonsuz sayıda olduğunu da ispatladılar. MÖ 6. yüzyıldaki bir siyasi tasfiye hadisesinde Pisagor'un çok sayıda okulunun yerle bir edilmesinin ardından Pisagorcular İtalya'nın başka kesimlerine göç ettiler ve üçlülerle ilgili bilgilerini kadim dünyaya yaydılar. İki yüzyıl sonra Öklit, üçlüleri oluşturan bir formül üretti: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$. Belirli istisnalar bir kenarda tutulursa m ve n, 7 ve 4 gibi herhangi iki tamsayı olabilir. Bu durumda 33, 56 ve 65 üçlüsü ortaya çıkar ($33^2 + 56^2 = 65^2$). Formül, yeni Pisagor üçlülerinin bulunması sürecine çarpıcı bir hız kazandırdı.

Ayrıca bkz. İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Platonik katılar 48–49 ▪ Tasım mantığı 50–51 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Alton oran 118–23 ▪ Tasarı geometri 154–55

Aşağıdaki çizimlerde Pisagor denkleminin ($a^2 + b^2 = c^2$) neden işe yaradığı açıklanmaktadır. Büyük bir karenin içinde, dört adet eşit boyutlu dik üçgen bulunmaktadır (kenarları a, b ve c ile işaretlidir). Bu dört üçgen, hipotenüsleri (c kenarları) ortada yana yatık bir kare oluşturacak biçimde dizilmiştir.



Alanı A olan büyük karenin kenar uzunluğu $(a + b)$'dir, dolayısıyla da alanı şuna eşittir: $(a + b)^2$.
$A = (a+b)\,(a+b)$

Büyük karenin içindeki yana yatık küçük karenin alanı c^2'dir.

Her bir üçgenin alanı $^{ab}/_2$'dir (a tabanının b yüksekliğiyle çarpımı 2'ye bölünür). Dört üçgenin hepsinin toplam alanı $^{4ab}/_2 = 2ab$'dir.

Yana yatık kare ile üçgenlerin toplam alanı, büyük karenin alanına (A) eşittir $A = c^2 + 2ab$

A, $(a+b)\,(a+b)$'ye eşittir. $(a+b)\,(a+b) = c^2 + 2ab$

Terimler parantezlerden çıkarılır (ilk parantezin içindeki her terim, ikinci parantezin içindeki her terimle çarpılır). Ardından bunların hepsi toplanır: $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$

İki taraftan da $2ab$ çıkarılır: $a^2 + b^2 = c^2$

(9 + 16 = 25) olduğundan, bu uzunluk bulunur. $a^2 + b^2 = c^2$ denkleminin bu tür tamsayı çözüm kümeleri Pisagor üçlüleri olarak bilinir. 3, 4 ve 5 üçlüsünün 2 ile çarpılmasıyla bir Pisagor üçlüsü daha elde edilir: 6, 8 ve 10 (36 + 64 = 100). Öğelerinin 1'den büyük ortak böleni olmadığından, 3, 4, 5 kümesine "ilkel" Pisagor üçlüsü denir. 6, 8, 10 kümesi, öğeleri 2 ortak bölenine sahip olduğundan ilkel değildir.

Pisagor'un doğumundan yüzyıllar önce, Babil ve Çinlilerin dik üçgenlerin kenarları arasındaki matematiksel ilişkiden haberdar olduğuna dair sağlam deliller mevcuttur. Ne var ki bu ilişkiyi saptayan formülün doğruluğunu ve bunun tüm dik üçgenler için geçerliliğini ilk ispatlayan kişinin Pisagor olduğu düşünülür; teoreme bu sebeple onun adı verilmiştir.

Keşif yolculukları

Pisagor çok gezmiş biriydi, başka diyarlarda özümsediği fikirlerden matematik açısından hiç şüphesiz feyzaldı. Memleketi Samos'a uzak düşmeyen Batı Anadolu'daki Milet'te, Miletli Thales'in okulundaki Anaksimandros'un öğrencisi olarak eğitim görmüş olabilirdi. Gezilerine 20 yaşında başladı ve pek çok yılını yollarda geçirdi. Fenike'ye, İran'a, Babil'e, Mısır'a gittiği sanılır; hatta Hindistan'a ulaşmış da olabilir. Mısırlılar kenarları 3, 4 ve 5 birim (ilk Pisagor üçlüsü) olan bir üçgenin dik açı oluşturduğunu biliyorlardı, ölçümcüleri bu sebeple inşaat projelerinde kusursuz dik açılar meydana getirmek için bu uzunluklardaki ipleri kullanıyorlardı. Pisagor'un araştırmaya koyulup altta yatan matematik teoremini ispatlamaya iten, bu yöntemi bizzat gözlemlemesi olabilirdi. Pisagor Mısır'dayken piramitlerin yüksekliğini ölçmüş ve geometriye tümdengelimi uygulamış bir geometri tutkunu olan Miletli Thales'le görüşmüş de olabilirdi.

> “Akıl ölümsüz, geri kalan her şey ölümlüdür.”
> **Pisagor**

Pisagorcu bir topluluk

Yollarda geçen 20 yılın ardından Pisagor son olarak Güney İtalya'da büyük bir Yunan nüfusunu barındıran Croton (Şimdiki Crotone) şehrine yerleşti. Orada matematik ve felsefe üzerine görüşlerini öğretebileceği bir topluluk olan Pisagorcu kardeşliği kurdu. Kardeşliğin kapısı kadınlara açıktı; 600 üyenin önemli bir bölümü kadınlardan oluşuyordu. Katılan üyeler mallarıyla mülklerinin tamamını kardeşliğe vermek zorundaydı ve kardeşliğin matematik keşiflerini gizli tutacağına yemin ederdi. Topluluk Pisagor'un önderliğinde önemli bir siyasi nüfuz elde etti.

> Zihnin gücü ayıklığa dayanır çünkü o zaman aklınızı tutku bulandıramaz.
> **Pisagor**

Pisagor, kenetlenmiş hâldeki topluluğuyla birlikte, teoreminin yanı sıra matematikte daha sayısız buluş yaptılar ve bu bilgi birikimini dikkatle muhafaza ettiler. Keşiflerinden biri çokgensel sayılardı: Noktalarla ifade edildiğinde bu sayılar düzgün çokgenlerin şekillerini oluşturabilir. Örneğin 4 noktayla bir kare oluşturulabileceğinden 4 sayısı çokgensel bir sayıdır; 4'ü tabanda, 3'ü bir üst sırada, 2'si bir üstündekinde, 1'i üçgenin tepsinde olmak üzere 10 noktayla ($4 + 3 + 2 + 1 = 10$) bir üçgen oluşturulabileceğinden 10 da çokgensel sayıdır.

Pisagor'dan iki binyıl sonra, 1638'de, Pierre de Fermat herhangi bir sayının, en fazla k adet k-gensel sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini söyleyerek bu fikre derinlik kazandırdı. Başka bir deyişle, her bir sayı en fazla 3 üçgensel sayının, en fazla 4 karesel sayının, en fazla 5 adet beşgensel sayının vb. toplamıdır. Örneğin 19, üç adet üçgensel sayının toplamı olarak yazılabilir: $1 + 3 + 15 = 19$. Fermat bu kestirimi ispatlayamadı; ispatı ancak 1813'te Fransız matematikçi Augustin-Louis Cauchy tamamlayabildi.

Sayıların cazibesi

Pisagor'u heyecanlandıran bir başka sayı türü, mükemmel sayıydı. Bir sayıya mükemmel denmesinin sebebi, kendisinden küçük tüm bölenlerinin toplamına eşit olmasıydı. Birinci mükemmel sayı 6'dır çünkü bölenleri 1, 2 ve 3 sayılarıdır ve toplamı 6 eder. İkincisi 28 ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$), üçüncüsü 49, dördüncüsüyse 8128'dir.

Bu sayıların saptamanın uygulamada hiçbir değeri yoktu ama tuhaflıkları ve örüntülerinin güzelliği Pisagor'u ve kardeşliğinin ilgisini çekiyordu.

> En iyi insan, kendisini hayatın anlam ve amacını keşfetmeye adamış insandır... benim gözümde filozof, o insandır.
> **Pisagor**

> Pisagor'un gizemsel tutumuna ve sayıların gizli büyüsüne genellikle hayranlık duymuşumdur.
> **Sir Thomas Browne**
> **Çok yönlü İngiliz bilim insanı**

Buna karşılık, en bilinen örneğiyle π gibi kesir veya tamsayılarla ifade edilemeyen irrasyonel sayılar karşısında Pisagor'un ezici bir korku ve kuşku duyduğu söyleniyordu. Pisagor'un gözünde, evrene hükmeden düzenli tamsayılar ve kesirler arasında bu sayılara yer yoktu. Bir hikâyeye göre, Hippasos adlı Pisagorcu bir mürit $\sqrt{2}$'yi bulmaya çalışırken irrasyonel sayıların varlığını açığa çıkarmış ve Pisagor'un bu irrasyonel sayı korkusu yüzünden mürit arkadaşlarınca suda boğulmuştu.

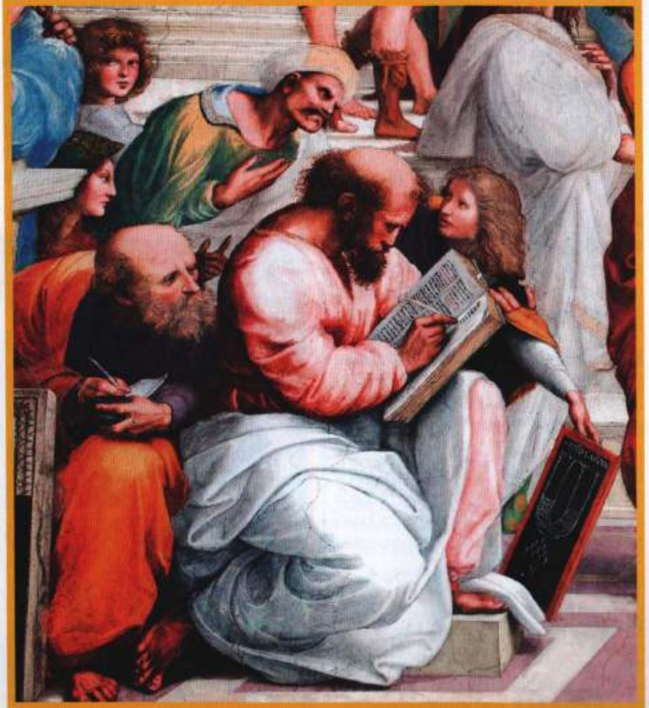
Pisagor'un meşhur gaddarlığını vurgulayan bir diğer hikâye de, Pisagorcuların yeni bir düzgün çokyüzlüsünü keşfettiğini ifşa ettiği gerekçesiyle bir kardeşlik üyesinin infaz edildiği söylenir.

12 düzgün beşgenin biçimlendirdiği yeni şekle onikiyüzlü adı koyulup beş Platonik katıdan biri addedildi. Pisagorcular onikiyüzlüyü kutsal sayıyordu ve simgeleri olarak ortasında beşgen bulunan bir beş köşeli yıldızı seçmişlerdi. Dolayısıyla, onikiyüzlüye dair bilgilerini açığa vurmak suretiyle kardeşliğin gizlilik kuralını çiğnemek, ölümle cezalandırılabilecek özel bir ihanet suçuydu.

Bütünleştirilmiş bir felsefe

Matematik ve felsefe Antik Yunan'da birbirini tamamlayıcı konular sayılır ve birlikte incelenirdi. Yunanca "*philos*" (sevgi) ve "*sophos*"tan (bilgelik) gelen "filozof" terimini Pisagor'un bulduğu düşünülür. Pisagor ve ardıllarının gözünde, filozofun görevi bilgeliğin izini sürmekti.

Pisagor'un felsefedeki tutumu, tinsel kavramları matematik, bilim ve akıl yürütmeyle birlikte bir bütün haline getiriyordu. Görüşlerinden biri, Mısır veya Ortadoğu'nun başka bir yerinde rastlamış olabileceği ruh göçü görüşüydü. Bu görüşe göre ruhlar ölümsüzdür ve kişi ölünce göçüp başka bir bedeni işgal eder. İki yüzyıl sonra Atina'daki Platon bu fikir karşısında mest olacak ve çoğu diyalogunda yer verecektir. Bedenle ruhun birbirinden ayrı olduğu görüşünü sonradan Hıristiyanlığın da benimsemesiyle, Pisagor'un kavramları Batı düşüncesinin nüvesini oluşturacaktı.



Raphael'in 1509-1511 yılları arasında Roma'daki Vatikan için çizdiği *Atina Okulu*, elindeki bir kitapla Pisagor ve ondan bir şeyler öğrenme hevesiyle etrafını sarmış bilginler resmedilir.



Pisagor'un matematik açısından önemli olan bir diğer inancına göre, evrendeki her şey sayılarla ilişkili ve matematik kurallarına tabiydi. Bazı sayılara ayırt edici özellikler ve tinsel anlamlar bahşedilmişti. Bu bir anlamda sayıların ilahlaştırılmasıydı; Pisagor ve müritleri etraflarındaki her şeyde matematiksel örüntüler aradılar.

Harmoni içindeki sayılar

Pisagor müziğe büyük bir önem atfediyordu. Pisagor'un gözünde müziğin, sırf eğlence için kullanılan bir şeydense kutsal bir bilim olduğu söylenir. Kozmos ve tinin bir araya getirildiği kendi Harmonia kavramında müzik, birleştirici bir öğeydi; matematiksel oranlarla harmoni arasındaki bağlantının keşfinin Pisagor'a atfedilmesi bundan dolayı olabilir. Denilir ki, bir demirci ocağının önünden geçerken, eşit uzunluktaki metaller eşit olmayan ağırlıklardaki çekiçlerle dövüldüğünde farklı notaların çıktığını fark etmişti. Çekiçlerin ağırlıklarının birbirleriyle orantısı kesin ve belliyse, çıkardıkları sesler harmoni içindeydi.

Demirci ocağındaki çekiçlerin tek tek ağırlıkları 6, 8, 9 ve 12 birimdi. Ağırlığı 6 ve 12 birim olan çekiçlerin çıkardığı sesler, aynı notanın farklı perdeleriydi; günümüz müzik terimcesine göre bir oktav ayrıklardı. İki çekicin ağırlıklarının oranıyla uyumlu biçimde, 6 birim ağırlığındaki çekicin çıkardığı nota, 12 birim ağırlığındaki çekicin çıkardığı notanın iki katıydı. Ağırlıkları 12 ve 9 birim olan çekiçler, ağırlık oranları 4:3 olduğu için harmonik sesler (tam dörtlü) çıkarıyordu. Ağırlıkları 12 ve 8 birim olan çekiçlerin çıkardığı notalar da, ağırlıkları 3:2 oranında olduğundan, harmonikti (tam beşli). Buna karşılık, ağırlıkları 9 ve 8 birim olan çekiçler, 9:8 basit bir matematiksel oran olmadığı için ahenksizdi. Harmonik müzik



Pisagor'un mükemmel bir lirci olduğu söylenir. Antik Yunan müzisyenlerinin betimlendiği bu çizimde lir ailesinin iki üyesi, *trigonon* (solda) ve *cithara*, resmedilmektedir.



Dante'nin (1265-1331) *İlahi Komedya*'sındaki (burada, İtalya'nın Floransa şehrindeki Duomo'dan bir fresk resmedilmekte) numeroloji, Dante'nin, yazılarında birçok kez değindiği Pisagor'un etkisini yansıtır.

notalarının sayısal oranlarla bağlantılı olduğunu fark eden Pisagor, matematikle müzik arasındaki ilişkiyi açığa çıkaran ilk insandı.

Gam yaratmak

Akademisyenlerin demirci ocağı hikâyesinin doğruluğundan şüphe etmesi bir kenara bırakılırsa müzikte başka bir keşif daha geniş çevrelerce Pisagor'a mal edilir. Denilene göre, farklı uzunluktaki lir tellerinin çıkardığı notalarla deney yapmış ve titreyen bir telin çıkardığı sesin f frekanslı bir notayken, öte yandan telin uzunluğunu yarıya indirdiğinde çıkan sesinse bir üst oktavdan $2f$ frekanslı bir nota olduğunu bulmuştu. Pisagor, çekiçlerin harmonik sesler çıkarmasını sağlayan oranların aynılarını kullanarak titreşen tellere uyguladığında, benzer şekilde birbirleriyle harmoni içinde olan notalar oluşturdu. Bunun üstüne Pisagor bir nota ve sonra onun bir üst oktavındaki notayla başlayıp notaların arasını tam beşlilerle doldurarak bir gam meydana getirdi.

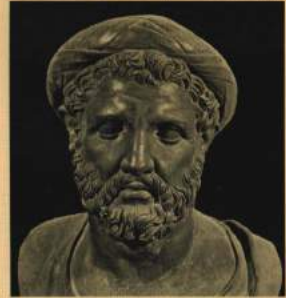
Bu gam 16. yüzyıla kadar kullanılıp iki oktav arasındaki notaların daha eşit dağılımlı olduğu eşit tamperaman sisteme bıraktı yerini. Pisagor'un gamı, bir oktavla sınırlı kalan müzikte düzgün işlese de, farklı açkılarda yazılan ve birkaç oktava yayılan nispeten modern müzik için uygun değildi.

Her ne kadar farklı müzik kültürlerinde kullanılagelmiş farklı birçok gam çeşidi olsa da, Batı müziği geleneğinin izi sürüldüğünde, köklerinin Pisagorculara ve onların müzik ile matematiksel orantıların arasındaki ilişkiyi anlama arayışlarına uzandığı görülür.

Pisagor'un mirası

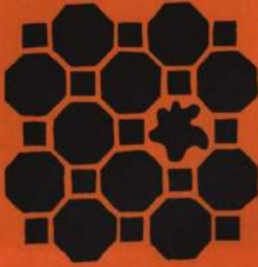
Pisagor, ilkçağdan bu yana en meşhur matematikçi unvanının hakkını geometri, sayı kuramı ve müziğe yaptığı katkılarla vermişti. Fikirlerinin tamamı özgün olmasa da müritleriyle birlikte bir matematik sistemi inşa etmek adına aksiyomlarla ve mantıkla bu fikirleri geliştirirken takındığı katı tutum, ardılları için güzel bir mirastı. ■

> Tellerin uğultusunda geometri vardır, kürelerin arasındaki mesafelerdeyse müzik.
> **Pisagor**



Pisagor

Pisagor, MÖ 570 civarında Doğu Ege Denizi'ndeki Yunan adası Samos'ta dünyaya geldi. Platon'dan Nikola Kopernik, Johannes Kepler ve Isaac Newton'a varana dek tarihteki en büyük bilgeler onun fikirlerinden etkilendi. Pisagor'un uzak yerlere yolculuk ettiği, bu sırada Mısır ve Ortadoğu'nun başka yerlerindeki bilgelerin fikirlerini özümsediği düşünülür. MÖ 518 civarında Güney İtalya'daki Croton'da yaklaşık 600 kişilik topluluğunu bu gezilerinden sonra kurdu. Bu sofu kardeşliğe üye olanların entelektüel arayış uğrunda yaşaması, aynı zamanda da katı perhiz ve giyim kurallarına uyması gerekiyordu. Geriye bir kayıt kalmamış olsa da teoremi ve keşifleri muhtemelen bu zamandan itibaren kaydedilmeye başlamıştı. Pisagor'un, 60 yaşındayken, topluluğun genç bir üyesi olan Theano'yla evlendiği ve iki ya da üç çocuk yaptığı söylenir. Croton'da cereyan eden siyasi bir çalkantı Pisagorculara karşı bir ayaklanmaya yol açmıştır. Pisagor, okulu ateşe verilince veya yangından kısa zaman sonra ölmüş olabilir. MÖ 495 civarında öldüğü belirtilir.



RASYONEL OLMAYAN BİR GERÇEL SAYI

İRRASYONEL SAYILAR

KISACA

KİŞİ
Hippasos (MÖ 5. yüzyıl)

ALAN
Sayı sistemleri

ÖNCE
MÖ 19. yüzyıl Hiyeroglif yazıtlar Babillilerin dik üçgenleri doğrulukla çizebildiklerini ve özelliklerini anladıklarını ortaya koyar.

MÖ 6. yüzyıl Yunanistan'da, dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki keşfedilir ve sonraları Pisagor'a mal edilir.

SONRA
MÖ 400 Kyreneli Theodorus 3 ile 17 arasındaki tam kare olmayan sayıların kareköklerinin irrasyonel olduğunu kanıtlar.

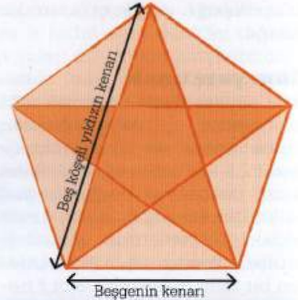
MÖ 4. yüzyıl Yunan matematikçi Knidoslu Eudoksos irrasyonel sayılar için sağlam bir matematiksel altyapı oluşturur.

İki tamsayının oranı olarak ifade edilebilen her sayı (bir kesir, örüntüyle sonlanan veya devreden bir ondalık sayı veya bir yüzdeli sayı) rasyonel sayı kabul edilir. 1'le bölünerek kesir şeklinde gösterilebildiklerinden tüm tamsayılar rasyoneldir. İrrasyonel sayılarsa iki sayının oranı biçiminde ifade edilemezler.

İrrasyonel sayıları ilk olarak MÖ 5. yüzyılda, Yunan bilgin Hippasos'un geometrik problemler üzerine çalışırken teşhis ettiği sanılır. Hippasos dik üçgende hipotenüsün karesinin diğer iki kenarın kareleri-nin toplamına eşit olduğunu belirten Pisagor teoremine aşinaydı. Teoremi, iki kısa kenarı 1'e eşit bir dik üçgene uyguladı. $1^2 + 1^2 = 2$ olduğundan, hipotenüsün uzunluğu 2'nin kareköküdür.

Ne var ki Hippasos, 2'nin karekökünün iki tamsayının oranı şeklinde ifade edilemediğini fark etti. Yani kendisiyle çarpıldığında 2 sayısını veren bir rasyonel sayı olmadığından, 2'nin karekökü kesir olarak yazılamıyordu. Bu nedenle 2'nin karekökü irrasyonel bir sayıdır ve 2 sayısına "tam kare olmayan" denir. 3, 5, 7 ve daha birçok sayı benzer şekilde tam kare olmayan sayılardır ve karekökleri irrasyoneldir. Buna karşılık, 4 (2^2), 9 (3^2) ve 16 (4^2) gibi sayılar tam kare sayılardır, karekökleri de tamsayıdır ve dolayısıyla rasyoneldir. İrrasyonel sayılar kavramı kolay kolay kabul görmedi ama özellikleri sonraki Yunan ve Hintli matematikçilerce incelemeye alındı.

9. yüzyılda Arap bilginler irrasyonel sayıları cebirde kullandılar.



Hippasos irrasyonel sayılarla, beş köşeli yıldızın bir kenarının uzunluğu ile yıldızın ortasında oluşan beşgenin bir kenarı arasındaki ilişkiyi araştırırken karşılaşmıştı muhtemelen. Söz konusu ilişkiyi iki tamsayının birbirine oranı şeklinde ifade etmenin imkânsız olduğunu keşfetmişti.

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Pisagor 36–43 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Euler sayısı 186–91

Bir **gerçel sayının karesi alındığında sonuç pozitif** olur.

↓

2'nin **karekökünün**, karesi alındığında **sonuç pozitif** olur: 2.

↓

Bir **irrasyonel sayıda, devreden örüntü içermeyen sonsuz sayıda** ondalık sayı vardır.

↓

2'nin **karekökü**, **devreden bir örüntüsü olmaksızın** devam eden ondalık sayılara sahiptir: 1,14142135...

↓

2'nin karekökü, rasyonel olmayan bir gerçel sayıdır.

Ondalık cinsinden

Hint-Arap rakamlarında kullanılan konumsal ondalık sistem, irrasyonel sayıların daha çok araştırılmasına olanak tanıdı. İrrasyonel sayılar, ondalık işaretinden sonra devreden örüntü içermeyen sonsuz bir rakamlar dizisi olarak gösterilebilir. Örneğin ardışık her 1 çiftinin arasına bir 0 daha eklenerek sonsuza kadar devam eden 0,1010010001... sayısı, irrasyonel sayıdır. Çemberin çevresinin çapına oranını ifade eden pi (π) irrasyoneldir. Bunu 1761'de Johann Heinrich Lambert ispatlamıştır; π'ye yönelik daha önceki tahminler 3 veya $^{22}/_{7}$'ydi.

Herhangi iki rasyonel sayının arasında başka bir rasyonel sayı bulmak her zaman mümkündür. Bu iki sayının ortalaması da rasyonel olur, keza o sayıyla ilk sayıların herhangi birinin ortalaması da. Herhangi iki rasyonel sayının arasında irrasyonel sayı bulmak da mümkündür. Bunun bir yöntemi, tekrar eden bir dizideki bir rakamı değiştirmektir. Örneğin tekrar eden 0,124124... ve 0,125125... sayılarının arasında irrasyonel bir sayı bulunabilir. Bunun için, ikinci 124 döngüsündeki 1'in yerine 3 koyulup 0,124324... elde edilir; aynı işlem beşinci döngüye, ardından dokuzuncu döngüye uygulanarak koyulan 3'lerin arasındaki mesafe her defasında bir döngü artırılır.

Modern sayı kuramının en büyük zorluklarından biri, rasyonel sayıların mı yoksa irrasyonel sayıların mı daha çok olduğunun belirlenmesidir. Kümeler kuramına göre, irrasyonel sayılar rasyonel sayılardan kesinlikle çok daha fazladır; oysa ikisinde de sonsuz sayı vardır. ▪



Hippasos

Hippasos'un hayatının başlarıyla ilgili bildiklerimiz yarım yamalak olmakla birlikte MÖ 500 civarında, Magna Graecia'daki (günümüz Güney İtalya'sı) Metapontum'da hayata geldiği düşünülür. Pisagor'un bir yaşamöyküsünü yazan filozof İamblikhos'a göre Hippasos, tüm sayıların rasyonel olduğuna hararetle inanan, Mathematici adlı Pisagorcu bir tarikatın kurucularındandı.

Tarikat nezdinde sapkınlık sayılacak bir düşünce olan irrasyonel sayıların keşfi çoğunlukla Hippasos'a mal edilir. Bir hikâyeye göre, Pisagorcu müritler Hippasos'u nefretle bir tekneden suya atarak boğulmasına neden olmuştur. Bir diğer hikâyedeyse, Pisagorcu bir müridin irrasyonel sayıları keşfettiği, Hippasos'un da bunu dışarıya sızdırdığı gerekçesiyle cezalandırıldığı öne sürülür. Hippasos'un ölüm yılı bilinmese de büyük olasılıkla MÖ 5. yüzyılda ölmüştür.

Önemli eseri

MÖ 5. yüzyıl *Mystic Discourse (Gizemci Söylem)*



EN HIZLI KOŞUCU EN YAVAŞ KOŞUCUYU ASLA GEÇEMEZ

ZENON'UN HAREKET PARADOKSLARI

KISACA

KİŞİ
Elealı Zenon (MÖ y. 495-430)

ALAN
Mantık

ÖNCE
MÖ 5. yüzyıl başları Yunan filozof Parmenides, Güney İtalya'daki bir Yunan kolonisi olan Elea'da Eleatik Felsefe Okulunu kurar.

SONRA
MÖ 350 Aristoteles, Zenon'un paradokslarını çürütmek amacıyla bağıl hareket kavramından yararlandığı *Physics* (*Fizik*) başlıklı bilimsel eserini üretir.

1914 Zenon'un paradokslarını ölçüme olanak tanımayacak denli kurnazca olarak tanımlayan İngiliz filozof Bertrand Russell, hareketin, konumun zamana göre bir fonksiyonu olduğunu söyler.

Elealı Zenon, Yunanistan'da MÖ 5. yüzyılda şaşaalı dönemini yaşamış Eleatik felsefe okulunun bünyesindeydi. Evrenin, atom bileşenlerine bölünebileceğine inanan çokçuların aksine Eleatikler hiçbir şeyin bölünemeyeceğine inanıyorlardı.

Zenon, çoğulcu görüşün abesliğini ortaya koymak amacıyla 40 paradoks yazdı. Bunların dördünde (dikotomi paradoksu, Akhilleus ve kaplumbağa paradoksu, ok paradoksu ve Akhilleus paradoksu) hareket ele alınır. Dikotomi paradoksu, hareketin bölünebileceğine ilişkin çokçu görüşün abesliğini ortaya koyar. Paradoksa göre, belirli bir mesafe boyunca hareket eden bir cisim bitişe varmadan yolun yarısına ulaşmak zorundadır, yolun yarısına ulaşabilmek için öncelikle yolun çeyreğine ulaşmalıdır ve sonsuza dek bu böyle devam eder. Cisim sonsuz sayıda noktadan geçmek zorunda olduğu için hedefine asla ulaşamaz.

Akhilleus ve kaplumbağa paradoksunda, Akhilleus bir yarışta, kendisinden 100 kat yavaş olan kaplumbağaya 100 metre önde başlama ayrıcalığı tanır.

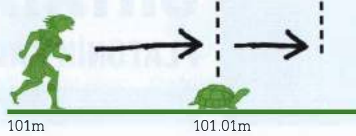


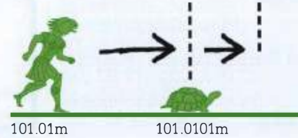
Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Tasım mantığı 50–51 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Sonluötesi sayılar 252–53 ▪ Matematiğin mantığı 272–73 ▪ Sonsuz maymun teoremi 278–79

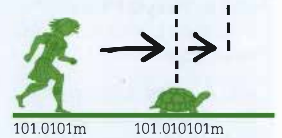
Başlama düdüğünün sesiyle Akhilleus 100 metre mesafe koşup kaplumbağanın başlama noktasına erişir, kaplumbağaysa 1 metre koşarak 1 metre öne geçer. Buna aldırış etmeyen Akhilleus 1 metre daha koşar ancak aynı süre zarfında kaplumbağa 1 metrenin yüzde 1'i kadar koşar ve dolayısıyla hâlâ öndedir. Bu böyle devam eder ve Akhilleus arayı asla kapatamaz.

Stadyum paradoksunda, sıra ve sütun düzeninde dizili insanlardan oluşan üç grup vardır ve her gruptaki insan sayısı eşittir. Bir grup hareketsizken diğer iki grup aynı hızda zıt yönlerde koşarak birbirini geçer. Paradoksa göre, hareketli gruplardan birindeki bir kişi belirli bir sürede diğer hareketli gruptan iki kişiyi geçerken, hareketsiz gruptan bir kişiyi geçebilmektedir. Sonuçta ortaya çıkan paradoks şudur: Belirli bir sürenin yarısı, o sürenin iki katına eşdeğerdir. Yüzyıllar geçtikçe birçok matematikçi bu paradoksları çürüttü. Kalkülüsün geliştirilmesiyle matematikçiler, bir çelişkiye yol açmaksızın sonsuz küçük niceliklerle işlem yapma olanağı buldu. ■









Akhilleus ve kaplumbağa paradoksunda, Akhilleus gibi hızlı bir cismin kaplumbağa gibi küçük bir cisme asla yetişemeyeceği iddia edilir. Akhilleus kaplumbağaya yaklaşacak ama hiç geçemeyecektir.

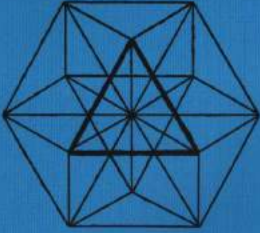
Elealı Zenon



Elealı Zenon, MÖ yaklaşık 495'te Yunanistan'ın Elea (günümüzde Güney İtalya'daki Velia) şehrinde doğdu. Filozof Parmenides, Zenon'u küçükken evlat edinmiş ve söylenene göre onu "çok sevmişti." Zenon, Parmenides'in kurduğu Eleatik düşünce okuluna alındı. Yaklaşık 40 yaşındayken Atina'ya gitti ve burada Socrates'le görüştü. Zenon, Sokratik filozofları Eleatik kavramlarla tanıştırdı.

Zenon matematiksel katılığın gelişimine katkı sağlayan paradokslarıyla ünlüydü. Sonraları Aristoteles onu mantıksal tartışmada diyalektik yöntemin (iki karşıt bakış açısıyla başlayan bir yöntem) mucidi diye tabir etti. Zenon, tartışmalarını bir kitapta derledi ama bu kitap sağ kalamadı. Paradokslardan haberdar olmamızı sağlayan, Aristoteles'in *Fizik* başlıklı eserinde dokuz paradoksa yer vermesidir.

Zenon'un hayatı hakkında pek az şey bilinse de Antik Yunan yaşamöykücüsü yazarı Diogenes, despot Nearchus'u tahtından indirmeye çalışırken dövülerek öldürüldüğünü iddia etmiştir. Zenon'un, dövüştükleri sırada Nearchus'un kulağını ısırarak kopardığı söylenir.



BİRLEŞİMLERİNDEN SAYISIZ KARMAŞIKLIK ORTAYA ÇIKAR

PLATONİK KATILAR

KISACA

KİŞİ
Platon (*c.* 428–348 BCE)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ 6. yüzyıl Pisagor dörtyüzlü, küp ve onikiyüzlüyü tespit eder.

MÖ 4. yüzyıl Platon'un Atinalı bir çağdaşı olan Theaitetos, sekizyüzlü ve yirmiyüzlülere değinir.

SONRA
MÖ y. 300 Öklit'in *Öğeler*'i, 5 adet düzgün dışbükey çokyüzlüyü etraflıca açıklar.

1596 Alman astronom Johannes Kepler, güneş sisteminin bir modelini tasarlar ve Platonik katılar üzerinden geometrik bir açıklama getirir.

1735 Leonhard Euler, bir çokyüzlünün yüzlerini, köşe noktalarını ve ayrıtlarını birbirlerine bağlayan bir formül icat eder.

Düzgün bir **çokgen eşit kenarlara** ve **eşit açılara** sahiptir.

↓

Yalnızca **beş katı** (üç boyutlu şekiller) özdeş köşe noktalarına ve tamamı özdeş **düzgün çokgen yüzlere** sahiptir.

↓

Bu **beş katı; dörtyüzlü, küp, sekizyüzlü, onikiyüzlü** ve **yirmiyüzlüdür**.

↓

Bunlar **Platonik katılar** olarak bilinirler.

Yunan filozof Platon MÖ y. 360'da yazdığı Timaeus diyaloguyla Platonik katılara ün kazandırdı ama bilginler muhtemelen bu şekillerin kusursuz simetrisinden çoktandır haberdardı. Beş düzgün dışbükey çokyüzlünün her biri (yüzleri düz, kenarları düz üç boyutlu şekiller) özdeş yüzlere sahiptir, her köşe noktalarında aynı sayıda yüz birleşir, eşkenarlıdır ve açıları aynı büyüklüktedir. Dünyanın doğası üzerine kuram üretmekte olan Platon, şekillerin dördünü klasik öğelere uyguladı: Küp (düzgün altıyüzlü olarak da bilinir) dünyayla, yirmiyüzlü suyla, sekizyüzlü havayla, dörtyüzlü ateşle ilişkiliydi. Onikiyüzlüyse gökle ve gökteki takımyıldızlarla ilişkiliydi.

Çokgenlerden oluşma

Olanaklı yalnızca beş düzgün beşgen vardır; Öklit'in *Öğeler*'inin XIII. Kitabında açıkladığı üzere bunların her biri ya özdeş eşkenar üçgenlerden ya karelerden ya da düzgün beşgenlerden meydana getirilir. Bir Platonik katıyı oluşturabilmek için, şeklin bir köşesinde az üç özdeş çokgen birleşmelidir; dolayısıyla bunların en basiti, dört eşkenar üçgenden oluşan bir piramittir, yani dörtyüzlü.

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Koni kesitleri 68–69 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–29 ▪ Fraktaller 256–59 ▪ Penrose karoları 305

Platonik katılar



Dörtyüzlünün dört adet üçgen yüzü vardır.



Küpün altı adet kare yüzü vardır.



Sekizyüzlünün sekiz adet üçgen yüzü vardır.



Onikiyüzlünün 12 adet çokgen yüzü vardır.



Yirmiyüzlünün 20 adet üçgen yüzü vardır.

Sekizyüzlü ve yirmiyüzlü eşkenar üçgenlerden oluşur, küp karelerden, onikiyüzlüyse düzgün çokgenlerden.

Platonik katılarda çifteşlik de gözlenir: Bir çokyüzlünün köşe noktaları, başka bir çokyüzlünün yüzleriyle örtüşür. Örneğin altı yüzlü ve sekiz köşe noktalı küp ile sekizyüzlü (sekiz yüzlü ve altı köşe noktalı), bir çifteş ikilisi meydana getirir. Onikiyüzlü (12 yüzlü ve 20 köşe noktalı) ile yirmiyüzlü (20 yüzlü ve 12 köşe noktalı), başka bir çifteş ikilisini meydana getirir. Dört yüzlü ve dört köşe noktalı dörtyüzlülere öz-çifteş adı verilir.

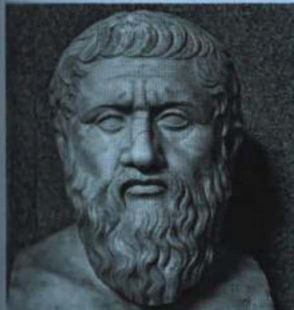
Evrendeki şekiller?

Platon gibi, ondan sonraki bilginler de doğada ve evrende Platonik katıların izini sürdüler. 1596'da Johannes Kepler, o sıralarda bilinen altı gezegenin (Merkür, Venüs, Dünya, Mars, Jüpiter ve Satürn) konumlarının Platonik katılarla açıklanabileceği sonucuna vardı. Kepler yanıldığını sonradan kabul etti ama hesaplamaları sayesinde gezegenlerin eliptik yörüngelere sahip olduğunu keşfetti.

1735'te İsviçreli matematikçi Leonhard Euler, ileride tüm çokyüzlüler için doğru olduğu ortaya konacak bir Platonik katı özelliğini daha saptadı. Köşe noktaların toplamından (V) kenarların sayısı (E) çıkarılıp yüzlerin sayısı (F) eklendiğinde sonuç her zaman 2 oluyordu: $V - E + F = 2$.

Platonik katıların doğada hakikaten de var olduğu günümüzde biliniyor. Bazı kristallerde, virüslerde, gazlarda, galaksi kümelenmelerinde çokyüzlülere rastlanır. ■

Platon



MÖ yaklaşık 428'de Atina'da varlıklı bir ailenin çocuğu olarak dünyaya gelen Platon, aile dostlarından Sokrates'in öğrencisiydi. Sokrates MÖ 399'da idama mahkûm edilince Platon derinden etkilendi ve Yunanistan'dan ayrılıp geziye çıktı. Bu zaman zarfında keşfettiği Pisagor'un çalışmaları, içinde bir matematik aşkı doğurdu. MÖ 387'de Atina'ya dönünce Akademiyi kurdu ve okulun girişinin üzerine "Geometri bilmeyen giremez" sözünü yazdırdı. Matematiği felsefenin bir dalı olarak öğreten Platon, geometrik şekillerle, özellikle de beş düzgün dışbükey çokyüzlüyle, evrenin niteliklerinin açıklanabileceği inancı doğrultusunda geometrinin önemini vurguladı. Platon, matematiksel nesnelerde kusursuzluk buluyor, onların gerçekle soyut arasındaki farkları anlamanın anahtarı olduğuna inanıyordu. MÖ yaklaşık 348'de vefat etti.

Önemli eserleri

MÖ y. 375 *The Republic (Devlet)*
MÖ y. 360 *Philebus*
MÖ y. 360 *Timaeus*



TANITLAYICI BİLGİ, GEREKEN TEMEL HAKİKATLERE DAYANMALIDIR

TASIM MANTIĞI

KISACA

KİŞİ
Aristoteles (MÖ 384-322)

ALAN
Mantık

ÖNCE
MÖ 6. yüzyıl Pisagor ve müritleri geometri teoremlerinin ispatı için sistemli bir yöntem geliştirirler.

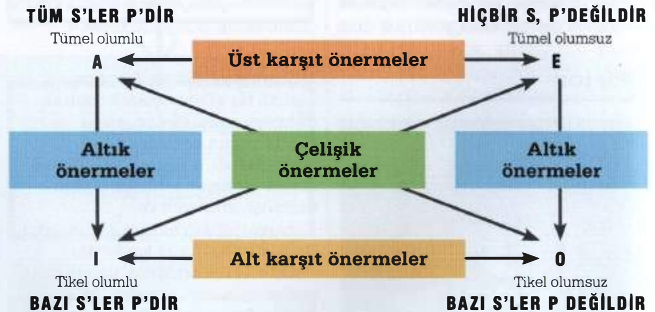
SONRA
MÖ y. 300 Öklit'in *Öğeler*'inde geometri, aksiyomlardan yola çıkarak yapılan tümdengelim yöntemiyle açıklanır.

1677 Gottfried Leibniz, mantık için bir simgesel notasyon biçimi ortaya atarak matematiksel mantığın gelişmesine önayak olur.

1854 George Boole, cebirsel mantık üzerine ikinci kitabı *The Laws of Thought*'u (*Düşünce Yasaları*) yayımlar.

1884 Gottlob Frege, kaleme aldığı *The Foundations of Arithmetics*'te (*Aritmetiğin Temelleri*) matematiğin temelindeki mantık ilkelerini tanımlar.

Antik Yunan'da matematikle felsefe arasında net bir ayrım yoktu, bu ikili birbirine bağlı görülüyordu. Filozoflar için önemli bir ilke, kavramları mantık çerçevesinde geliştirip açık seçik ifade etme yoluyla güçlü kanıtlar elde etmekti. Bu ilke, tutarsızlıkları ve çelişkileri açığa çıkarmak amacıyla kabullerin sorgulandığı, Sokrates'in diyalektik yöntemine dayalıydı. Aristoteles ise bu modeli tam olarak tatmin edici bulmuyordu ve bu nedenle mantıksal kanıtlar için sistemli bir yapı belirlemeye koyuldu. Öncelikle, mantıksal tartışmalarda kullanılabilecek farklı önerme çeşitlerini ve bir vargıya ulaşmak üzere bu önermelerin nasıl birleştirilebileceğini tanımladı. *Prior Analytics*'te (*Birinci Çözümlemeler*) Aristoteles, önermelerin genel olarak dört çeşidi olduğunu söyler ve S özne (mesela şeker), P ise yüklem (mesela tatlı gibi bir nitelik) olmak üzere bunlar, "tüm



Karşı Olum Karesi'nde, S öznedir (mesela şeker), P yüklemdir (mesela tatlı). A ile O çelişiktir, keza E ile I da (biri doğruysa diğeri yanlıştır, biri yanlışsa diğeri doğrudur). A ile E karşıttır (ikisi birden doğru olamaz ama ikisi de yanlış olabilir). I ile O alt karşıttır: İkisi de doğru olabilir ama ikisi de yanlış olamaz. I, A'nın altığıdır, O da E'nin altığıdır. Tasım mantığında bunun anlamı şudur: A doğruysa I da doğru olmak zorundadır, ancak, I yanlışsa A da yanlış olmak zorundadır.

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Zenon'un hareket paradoksları 46–47 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Boole cebri 242–47 ▪ Matematiğin mantığı 272–73

Tasım mantığında kanıtlar, **tümel** veya **genel** bir kural olan **büyük bir öncülle** başlar.

↓

Ardından bunu, **tikel** bir örnek, yani **küçük bir öncül** izler.

↓

Vargı bu **büyük** ve **küçük öncüllerden** çıkarılır.

↓

Tüm insanlar ölümlüdür.

↓

Aristoteles insandır.

↓

Aristoteles ölümlüdür.

↓

Aristoteles mantığında matematik ispatlarındaki çıkarım sürecinin aynısı izlenir.

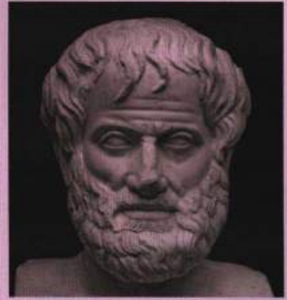
S'ler P'dir", "hiçbir S, P değildir", "bazı S'ler P'dir" ve "bazı S'ler P'değildir" biçimindedir.

Bu gibi sadece iki önermeden bir kanıt meydana getirilebilir ve bir vargı çıkarılabilir. Bu esasen tasım olarak bilinen mantık biçimidir: iki öncülden bir vargıya ulaşmak. Aristoteles mantık bakımından geçerli tasımların yapısını, vargının öncüllerden çıkarıldığı yapılar, geçerli olmayanlarınkiniyse vargının öncüllerden çıkarılmadığı yapılar şeklinde tanımlayarak mantıksal kanıtları meydana getirmeye ve çözümlemeye yönelik bir yöntemi sağlamış oldu.

Katılıkla ispat yapma arayışı

Aristoteles'in geçerli tasım mantığını ele alışında çıkarım süreci gizlidir: Büyük öncülde "Tüm insanlar ölümlüdür" gibi genel bir kuralla, küçük öncüldeyse "Aristoteles insandır" gibi tikel bir örnekle yola çıkar ve bu örnekteki "Aristoteles ölümsüzdür" gibi bir vargıya ister istemez ulaşır. Bu tümdengelimli akıl yürütme biçimi matematik ispatlarının temelini oluşturur.

Aristoteles *Birinci Çözümlemeler*'de vargının, geçerli bir tasım kanıtında da olsa, tartışmasız hakikatler veya aksiyomlar gibi doğru kabul edilen öncüllere dayanmadığı sürece doğru olamayacağını belirtir. Bu düşüncesiyle, kavramların mantık çerçevesinde geliştirilmesinin (Öklit'ten itibaren matematik teoremlerinin modeli) esasını, aksiyomatik hakikatler ilkesine bağladı. ■



Aristoteles

Makedonya kraliyet sarayında görevli bir doktorun oğlu olan Aristoteles MÖ 384'te Stagira, Chalkidiki'de doğdu. Yaklaşık 17 yaşında, Platon'un Atina'daki Akademisine okumaya gidip orada sivrildi. Platon'un ölümünden kısa bir süre sonra Makedon karşıtlığı nedeniyle Atina'yı terk etmek zorunda kaldı. Akademik çalışmalarını Assos'ta (günümüz Türkiye'sinde) sürdürdü. MÖ 343'te II. Philip, kraliyet sarayındaki okulun başına geçmesi için onu tekrar Makedonya'ya çağırdı; Philip'in ileride Büyük İskender adıyla nam salacak oğlu da öğrencilerinin arasındaydı.

MÖ 335'te Aristoteles Atina'ya dönüp Akademinin rakip kurumu Lyceum'u (Lise) kurdu. MÖ 323'te İskender'in ölümünden sonra Atina'da Makedon karşıtlığı tekrar alevlenince Aristoteles emekliye ayrılıp Euboea yarım adasındaki Chalsis'teki aile konağına yerleşti. MÖ 322'de hayatını orada kaybetti.

Önemli eserleri

MÖ y. 350 *Birinci Çözümlemeler*
MÖ y. 350 *İkinci Çözümlemeler*
MÖ y. 350 *Yorum Üzerine*
MÖ 335-323 *Nikomakhos'a Etik*
MÖ 335-323 *Politika*

BÜTÜN PARÇADAN BÜYÜKTÜR

ÖKLİT'İN *ÖĞELER*'İ



KISACA

KİŞİ
Öklit (MÖ y. 300)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ y. 600 Yunan filozof, matematikçi ve astronom Miletli Thales, yarım dairenin içine çizilen bir açının dik olduğu çıkarımını yapar. Bu, Öklit'in *Öğeler*'inin 31. Önermesi olur.

MÖ y. 440 Yunan matematikçi Sakız Adalı (Chios) Hippokrates, sistemli bir şekilde düzenlenmiş ilk geometri ders kitabı olan *Öğeler*'i kaleme alır.

SONRA
y. 1820 Carl Friedrich Gauss, János Bolyai ve Nicolai Ivanovich Lobachevsky gibi matematikçiler Öklit dışı hiperbolik geometriye yönelmeye başlarlar.

Öklit'in *Öğeler*'i, tüm zamanların en etkili matematik çalışması unvanının güçlü adaylarındandır. İnsanın uzayı ve sayıları algılayışı üzerinde 2000 yıldan uzun bir süre egemen olmuş ve 20. yüzyılın başına dek geometrinin standart ders kitabı olarak kalmıştır.

Öklit, MÖ 300 civarında İskenderiye'de yaşadı. Şehir o zamanlar Akdeniz çevresinde gelişmekte olan, kültürel açıdan zengin, Yunanca konuşan Helenistik dünyanın bir parçasıydı. Öklit çalışmalarını çok dayanıklı olmayan papirüse yazıyor olmalıydı; eserlerinden geriye kalanlar kendisinden sonraki bilginlerin elinden çıkan nüshalar, çeviriler ve yorumlardan ibaret kalmıştır.

> Geometriye giden kral yolu yoktur.
> **Öklit**

Derlenip toplanan çalışmalar

Öğeler çok çeşitli konulara el atan, derlenip toplanmış 13 kitaplık bir eserdir. I ile IV. Kitaplarda düzlem geometrisi, (düz yüzeylerin incelenmesi) işlenir. Oran ve orantı konulu V. Kitapta Yunan matematikçi ve astronom Knidoslu Eudoksos'un düşünceleri kaynak alınır. VI. Kitap, daha ileri düzeyde düzlem geometrisi içerir. VII ila IX. Kitaplar sayı kuramına ayrılmıştır ve sayıların nitelik ve ilişkilerine değinilir. Uzun ve zor olan X. Kitap ölçekdeş olmayan büyüklüklerle ilgilidir. Günümüzde irrasyonel sayılar olarak bilinen bu sayılar, tamsayıların oranı şeklinde ifade edilemezler. XI ila XIII. kitaplardaysa üç boyutlu katı geometri incelenir.

Öğeler'in XIII. kitabı aslında başka bir yazara mal edilir; bu kişi MÖ 369'da ölen Atinalı matematikçi ve Platon'un öğrencisi Theaitetos'tur. Kitap, genelde Platon katıları olarak adlandırılan dörtyüzlü, küp, sekizyüzlü, onikiyüzlü ve yirmiyüzlünün oluşturduğu beş düzgün dışbükey katı üzerinedir ve sınıflama teoreminin (verilen birtakım kısıtlamalarla

Öklit



Öklit'in doğum yeri ve tarihi bilinmiyor, hayatıyla ilgili bilgiler de kısıtlı. Platon'un Atina'da kurduğu Akademide okuduğu düşünülür. Yunan filozof Proklos, MÖ 5. yüzyılda, matematikçilerin tarihini konu aldığı yapıtında, Öklit'in I. Ptolemaios Soter'in hükümdarlık döneminde (MÖ 323-285) İskenderiye'de öğretmenlik yaptığını yazar. Öklit'in çalışmaları iki alandan oluşur: ilkel geometri ve genel matematik. *Öğeler*'e ilaveten perspektif, koni kesitleri, küresel geometri, matematiksel astronomi, sayı kuramı ve matematiksel kesinliğin önemi hakkında da yazdı. Öklit'e ait olduğu bilinen bazı yapıtlar kayıp olmakla beraber en az beş yapıtı 21. yüzyıla dek sağlam kalabilmiştir. Öklit'in 4. yüzyılın ortaları ila 3. yüzyılın ortalarında hayatını kaybettiği düşünülür.

Önemli eserleri

Öğeler
Konikler
Katoptri
Phaenomena
Optik

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Platonik katılar 48–49 ▪ Tasım mantığı 50–51 ▪ Koni kesitleri 68–69 ▪ Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–29

tüm olanaklı şekilleri listeleyen teorem) ilk kayıtlı örneğidir.

Öklit'in, koni kesitleri üzerine bir açıklama yazdığı bilinmektedir ama bu çalışma günümüze ulaşmamıştır. Koni kesitleri, bir koniyle bir düzlemin kesişiminin oluşturduğu şekillerdir ve dairesel, eliptik veya parabolik olabilirler.

İspat dünyası

Öklit'in yapıtının başlığı, onun matematiğe yaklaşımını yansıtan bir anlam taşır. 20. yüzyılda İngiliz matematikçi John Fauvel "element" sözcüğünün Yunancası olan stoicheia'nın anlamının zamanla değişerek, "bir doğrunun bileşeninden" (ağaç sırasındaki bir zeytin ağacı gibi), "başka bir önermeyi ispatlamak için kullanılan bir önerme" haline geldiğini, son olarak da "başka teoremler için bir başlangıç noktası" anlamına kavuştuğunu öne sürdü. Öklit, terimi bu anlamda kullanıyordu. MS 5. yüzyılda filozof Proklos bir elementi "alfabenin bir harfi" diye tabir etti; nasıl ki harflerin birleşimleri sözcükleri oluşturuyordu, aksiyomların (doğruluğu tartışılmayan ifadelerin) birleşimleri de aynı şekilde önermeleri oluşturuyordu.

Mantıksal çıkarımlar

Öklit, çalışmalarını yazdığı sırada dış dünyadan kopuk değildi, kendisinden önceki itibarlı birçok Yunan matematikçinin hazırladığı zemine oturttu çalışmalarını. Miletli Thales, Hippokrates ve Platon (ve daha birçokları), Öklit'in dâhice biçim verdiği matematik anlayışına yönelmeye başladılar: ispat dünyasına. Öklit'i benzersiz kılan işte budur: Tamamıyla aksiyomlaştırılmış matematiğin yaşayan en eski örnekleri onun yazılarıdır. Birtakım temel gerçeklikleri tanımlıyor, oradan hareketle sağlam mantıksal çıkarımlardan (önermeler) oluşan ifadelere ilerliyordu. Öklit, döneminin matematik bilgisinin tamamını bir araya getirip, çeşitli önermelerin arasındaki mantık ilişkilerinin itinayla açıklandığı matematiksel bir yapıya bürümeyi başardı.

Öklit'in, matematiği bir sisteme dönüştürme girişimi, üstün gayret gerektiren bir görevdi. Aksiyomatik sistemini tasarlarken nokta, doğru, yüzey, daire ve çap gibi terimler için 23 adet tanımla işe koyuldu. Ardından beş adet beliti ortaya attı: Her iki nokta, bir doğru parçasıyla (segmentiyle) birleştirilebilir; her doğru parçası sonsuza dek uzatılabilir; her doğru parçası için, doğru parçasının kendisi yarıçap, uç noktalarından biri de merkez olacak şekilde bir çember çizilebilir; tüm dik açılar birbirine eşittir; bunlara ilaveten bir de paralel doğrularla ilgili bir belit vardır (bkz. s. 56).

Öklit'in, matematiği bir sisteme dönüştürme girişimi, üstün gayret gerektiren bir görevdi. Aksiyomatik sistemini tasarlarken nokta, doğru, yüzey, daire ve çap gibi terimler için 23 adet tanımla işe koyuldu. Ardından beş adet beliti ortaya attı: Her iki nokta, bir doğru parçasıyla (segmentiyle) birleştirilebilir; her doğru parçası sonsuza dek uzatılabilir; her doğru parçası için, doğru parçasının kendisi yarıçap, uç noktalarından biri de merkez olacak şekilde bir çember çizilebi-



Öklit'in *Öğeler*'inin bu açılış sayfasında Latince yazılmış süslemeli bir metin yer alır. Sayfa, 1482'de Venedik'te üretilen ilk basıma aittir.

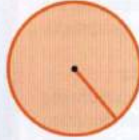


Öklit'in beş beliti

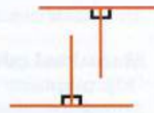


1. Her iki nokta bir doğruyla birleştirilebilir.

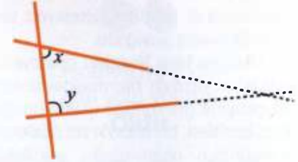
2. Her doğru parçası sonsuza dek uzatılabilir.



3. Bir merkez ve yarıçap verili olduğunda, bu merkez ve bu yarıçapla her zaman bir çember çizilebilir.



4. Tüm dik açılar birbirine eşittir.

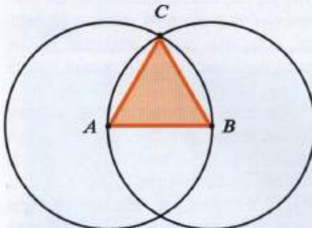


5. $x + y$ iki dik açıdan küçükse, o halde doğrular önünde sonunda bir tarafta birleşmelidir.

lir; tüm dik açılar birbirine eşittir; bunlara ilaveten bir de paralel doğrularla ilgili bir belit vardır (bkz. s. 56).

Sonra, beş adet aksiyom, yani genel kavram ekledi: Eğer $A = B$ ve $B = C$ ise, o zaman $A = C$'dir; eğer $A = B$ ve $C = D$ ise, $A + C = B + D$'dir; eğer $A = B$ ve $C = D$ ise $A - C = B - D$'dir; A ile B çakışıyorsa, o zaman A ile B eşittir; A'nın bütünü A'nın parçasından büyüktür.

Öklit 1. Önermeyi (bkz. karşı sayfada) ispatlamak için A ve B ile işaretlenen köşe noktalarıyla bir doğru çizdi (bkz. aşağıda). Ardından her bir köşe noktayı merkez alıp birbiriyle kesişen iki çember çizdi, böylece iki çemberin de yarıçapı AB oldu. Burada, üçüncü belitinden yararlanıyordu. Çemberlerin birleştiği noktaya C adını verdi, böylece ilk belitini işleme koyarak iki doğru daha (AB ve AC) çizebildi. İki çemberin yarıçapları aynıdır, yani $AC = AB$ ve $BC = AB$; bu da $AC = BC$ anlamına gelir. Öklit'in birinci aksiyomu budur (aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittir). Buradan, $AB = BC = CA$ sonucu çıkar, yani Öklit, AB üzerine bir eşkenar üçgen çizmiştir.



Bir eşkenar üçgen çizmek için, 1. Önermeyle ilgili olarak, Öklit bir doğru çizdi ve bu doğrunun her bir köşeye (burada A ve B) bir çemberin merkezini oturttu. Her köşeden, çemberlerin kesiştiği C'ye bir doğru çizip, eşit uzunluklardaki AB, AC ve BC kenarlarına sahip bir üçgen meydana getirdi.

Öğeler'in Latince çevirilerinde, çıkarımların sonunda QEF harfleri (*quod erat faciendum*, yani "yani yapılmak istenen [ve yapılan] buydu) yer alır. Mantıksal ispatların sonundaysa QED harfleri (*quod erat demonstrandum*, yani "gösterilmek istenen [ve gösterilen] buydu) yer alır.

Eşkenar üçgenin çizilişi Öklit'in yöntemine iyi bir örnektir. Her adım tanımlara, belitlere ve aksiyomlara bakılarak doğrulanmak zorundadır. Başka hiçbir şey kesin addedilemez ve sezgiye olası şüpheli gözüyle bakılır.

Öklit'in ilk önermesi kendisinden sonraki yazarlarca eleştirildi. Örneğin Öklit'in, iki çemberin kesişim noktası olan C'yi gerekçelendirmediği veya varlığını açıklamadığı tespitinde bulundular. Kolayca anlaşılsa da Öklit'in baştaki kabullerinde buna değinilmez. 5'inci belitte bir kesişim noktasından söz edilir ama bu, iki doğrunun kesişimidir, iki çemberin değil. Benzer şekilde, tanımlardan birinde üçgenin tarifi, aynı düzlem üzerindeki üç doğrunun sınırladığı düzlemsel bir şekil olarak yapılır. Bununla beraber Öklit, göründüğü kadarıyla, $AB = BC = CA$ doğrularının aynı düzlem üzerinde bulunduğunu açık açık göstermemiştir.

5'inci belit, paralel doğruların özelliklerinin ispatında kullanılabildiği için "paralellik beliti" olarak da bilinir. Belite göre, iki doğruyu (A, B) kesen bir doğru, bir tarafta toplamda iki dik açıdan (180°) küçük iç açılar oluşturduğu takdirde, A ve B doğruları sonsuza dek uzatıldıklarında önünde sonunda aynı tarafta kesişe-

> Geometri bilgileri,
> daima var olanın bilgileridir.
> **Platon**

cektir. Öklit bu beliti, iki paralel doğruyu kesen bir doğrunun aynı taraftaki iç açılarının toplamının iki dik açıya eşit olacağı koşulunu belirttiği 29. Önermeye kadar kullanmadı. Beşinci belit, diğer dört belite oranla daha ayrıntılıdır ve Öklit bu belitte temkinli davranmış gibidir.

Her aksiyomatik sistemle ilgili can alıcı bir nokta, sistemin her doğru önermeyi türetecek yeterli sayıda aksiyomu (ve Öklit için belitleri) olması ve öte yandan diğer aksiyomlardan türetilebilecek lüzumsuz aksiyomlardan uzak durması gerektiğidir. Paralellik belitinin bir önerme olarak, Öklit'in genel kavramları, tanımları ve diğer dört belitiyle ispatlanıp ispatlanamayacağı kimilerince sorulmuştur; şayet ispatlanabiliyorduysa beşinci gereksizdi. Öklit'in çağdaşlarının ve sonraki bilginlerin böylesi bir ispatı ortaya koyma girişimleri başarısız oldu. Son olarak 19. yüzyılda, beşinci belitin hem Öklit'in geometrisi için hem de diğer dört belitinden bağımsız olarak gerekli olduğuna karar verildi.

Öklitçi geometrinin ötesi

Öklit'in iki ardılı olan Bitinyalı Theodos ve İskenderiyeli Menelaus'un araştırdığı küresel geometri alanı da *Öğeler*'de mercek altına alınır. Öklit'in "nokta" tanımı, düzlem üzerindeki bir noktaya işaret etse de, bir nokta, küre üzerindeki bir nokta da olabilir.

Buradan Öklit'in beş belitinin küreye nasıl uygulanabileceği sorusu doğar. Küresel geometride hemen hemen tüm aksiyomlar Öklit'İn *Öğeler*'inde yer alan belitlerden farklı görünür. Öklitçi geometri *Öğeler* sayesinde meydana çıkmıştır; küresel geometriyse Öklitçi olmayan geometrinin ilk örneğidir. Paralellik beliti, her doğru çiftinin ortak noktalara sahip olduğu küresel geometri için geçerli değildir, keza doğruların sonsuz defa kesişebildiği hiperbolik geometri için de. ■

1. Kitaptaki ilk 16 önerme	
1. Önerme	Verili bir sonlu doğrunun üzerine eşkenar üçgen çizmek içindir.
2. Önerme	Verilen bir doğruya eşit bir doğruyu, verili bir noktaya (uç noktası olarak) yerleştirmek içindir.
3. Önerme	Verilen iki eşit olmayan doğrunun büyüğünden küçüğüne eşit olan bir doğruyu kesmek içindir.
4. Önerme	Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları başka bir üçgenin iki kenarının uzunluklarına eşitse, buna ek olarak her eşit kenar çiftinin barındırdığı açılar da eşitse o zaman bir üçgenin tabanı diğerinin tabanına eşit olur, iki üçgen eşit alanlara sahip olur ve bir üçgenin geri kalan açıları da diğer üçgeninkilere eşit olur.
5. Önerme	Bir ikizkenar üçgende tabandaki açılar birbirine eşittir ve eşit kenarların tabanın aşağısına doğru uzatılması halinde, tabanın altında kalan açılar birbirine eşit olur.
6. Önerme	Bir üçgende iki açı birbirine eşitse bu açıların üçüncü kenardan ayırdığı kenarlar da birbirine eşit olur.
7. Önerme	Bir doğrunun üstüne (uç noktalardan) çizilen ve bir noktada buluşan verili iki doğru için, aynı doğrunun üstüne (uç noktalardan), doğrunun aynı tarafındaki başka bir noktada birleşen ve belirtilen sıraya göre önceki iki doğruya eşit olan (yani aynı uç noktasından çıkanlar eşit olmak üzere) başka iki doğru çizilemez.
8. Önerme	Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları başka bir üçgenin iki kenarının uzunluklarına eşitse, üçgenlerden birinin tabanı da diğerinin tabanına eşitse, iki üçgenin açıları da birbirlerine eşit olur.
9. Önerme	Bir düzkenar açıyı iki eşit parçaya ayırmak içindir.
10. Önerme	Verili bir sonlu doğruyu iki eşit parçaya ayırmak içindir.
11. Önerme	Verili bir doğrunun üstüne, doğrunun verili bir noktasından dik açıda bir doğru çizmek içindir.
12. Önerme	Verili bir sonlu doğruya, doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan, dik bir doğru çizmek içindir.
13. Önerme	Bir doğrunun üstüne yerleştirilen bir doğru, açı meydana getiriyorsa ya iki dik açı ya da iki dik açıya eşit açılar meydana getirir.
14. Önerme	Herhangi bir doğrunun aynı tarafında bulunmayan ve doğrunun bir noktasında birleşen iki doğru, bu noktada iki dik açıya eşit iki komşu açı meydana getirirse, iki doğru aynı doğrunun üstünde olur.
15. Önerme	İki doğru birbirini kesiyorsa birbiriyle düşey açı yapar.
16. Önerme	Herhangi bir üçgende, kenarlardan biri uzatılırsa üçgenle uzatılan kenar arasındaki açı üçgenin içindeki her açıdan büyük olur.



SAYI KULLANMADAN SAYI SAYMAK

ABAKÜS

KISACA

UYGARLIK
Antik Yunanlar (MÖ y. 300)

ALAN
Sayı sistemleri

ÖNCE
MÖ y. 18000 Orta Afrika'da kemiğe oyma işaretlerle sayılar kaydedilir.

MÖ y. 3000 Güney Amerika yerlileri sayıları ipe düğüm bağlayarak kaydederler.

MÖ y. 2000 Babilliler konumsal sayıları geliştirirler.

SONRA
1202 Pisalı Leonardo (Fibonacci) *Liber Abaci*'de Hint-Arap sayı sistemini metheder.

1621 İngiltere'de William Oughtred logaritmaları kullanmayı kolaylaştıran sürgülü cetveli icat eder.

1972 Hewlett Packard mesleki kullanım amaçlı elektronik bir bilimsel hesap makinesi icat eder.

Bir sayı sayma aracı ve hesaplayıcı olan abaküs, ilkçağlardan bu yana kullanılmıştır. Pek çok biçimi vardır ama bunların hepsi aynı ilkeye göre işler: Farklı büyüklüklerin değerleri sütun veya satır halinde dizilmiş "sayıcılarla" temsil edilir.

İlk abaküsler

"Abaküs" sözcüğünün kendisi kökenleri hakkında ipucu verebilir. Abaküs sözcüğü, Antik Yunanca olup "tabla" veya "levha" anlamına gelen "abax"-tan (üzeri kumla kaplı ve çizim tahtası olarak kullanılmış olacak bir yüzey) türemiş Latince bir sözcüktür. Günümüze dek ulaşmış en eski abaküs MÖ y. 300'de yapılmış, üzerine kabartmayla yatay çizgiler çizilmiş mermerden bir plak olan Salamis tabletidir. Değerleri hesaplamak için bu çizgilerin üzerine çakıl taşları yerleştirilirdi. Alttaki çizgi 0 ila 4'ü temsil ediyordu; bunun üstündeki çizgiyle 5'ler sayılıyordu, bunların üstündeki çizgilerleyse 10'lar, 50'ler vb. Tablet Yunanistan'ın Salamis Adası'nda 1846 yılında keşfedildi.

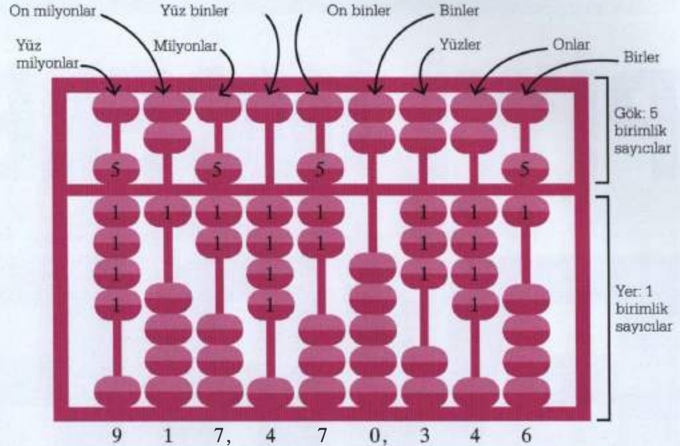
Bazı akademisyenler Salamis tabletinin aslında Babillilere ait olduğuna inanmaktadır. Yunanca *abax*

Soroban Turnuvası

Japonya'daki okullarda çocuklar matematik derslerinde, aritmetik becerilerinin gelişimi için halen soroban (Japon abaküsü) kullanmaktadır. Soroban'dan, çok daha karmaşık hesaplamalar için de yararlanılır. Usta soroban kullanıcıları bu tür hesaplamaları çoğu zaman elektronik bir hesap makinesine değerleri tuşlayarak giren birinden daha hızlı yapabilir.

Her yıl, Japonya'nın dört bir yanındaki en iyi abaküs kullanıcıları soroban turnuvasına katılır. Heceleme yarışmalarında olduğu gibi eleme sistemiyle yarışmacıların hızları ve hatasızlıkları sınanır. Etkinliğin dikkat çeken bölümlerinden biri Flash Anzan™'dır. Bu bölümde yarışmacılar 3 basamaklı 15 adet sayıyı toplamak üzere gözlerinde canlandırdıkları bir abaküsü kullanarak zihin aritmetiğindeki marifetlerini sergilerler (fiziksel abaküse izin verilmez). Yarışmacılar büyük bir ekranda gösterilen ve bir turdan diğerine daha hızlı akan sayılara bakarlar. Flash Anzan'ın 2017'deki dünya rekorunda 15 sayı 1,68 saniyede toplandı.

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Pisagor 36–43 ▪ Sıfır 88–91 ▪ Ondalık sayılar 132–37 ▪ Kalkülüs 168–75



Burada gösterilen *suanpan* 917.470.346 sayısına ayarlanmıştır. Geleneksel olarak suanpan abaküsü bir 2:5 abaküstür: Her sütunda, her biri 5 değerinde iki "gök" boncuğu ve her biri 1 değerinde 5 "dünya" boncuğu vardır, dolayısıyla sütun başına olanaklı en büyük değer 15 birimdir. Bu, ondalık sistemde kullanılan 9 birimden farklı olarak Çinlilerin 15 birim kullandığı 16-tabanlı sistemiyle hesap yapılmasını sağlar. Sayıları birbirine eklemek için sayılardan birinin birimleri sağdan başlayarak girilir, ardından diğer sayılar girildikçe boncuklar da ayarlanır. Çıkarma işleminde ilk sayının birimleri girilir, ardından çıkarılan sayılar girildikçe her sütundaki boncuk değerleri aşağı yönde ayarlanır.

sözcüğü, Fenikece veya İbranice "toz" (abaq) sözcüğünden gelmiş olup, sayıcıları kuma çizilen kafeslere koyan Mezopotamyalı uygarlıkların geliştirdiği çok daha eski sayma masalarına işaret ediyor olabilir.

Babillilerin MÖ y. 2000'de geliştirdiği konumsal sayı sisteminin kaynağı abaküs olabilirdi.

Romalılar, Yunanların sayma masasını geliştirerek hesaplamaları büyük ölçüde basitleştiren bir aygıta dönüştürdüler. Yunan abaküsünün yatay satırları Roma abaküsünde, içlerine çakıl taşları (veya Latincede, kalkülüs sözcüğünü aldığımız *calculi*) oturtulmuş dikey sütunlara dönüştü.

Orta Amerika'nın Kolomb öncesi uygarlıklarında da abaküs kullanımı yaygındı. 5 haneli bir yirmilik (20-tabanlı) sayma sistemini temel alan abaküste sayılar ipliklere geçirilen mısır taneleriyle temsil ediliyordu. Hiçbiri günümüze ulaşmasa da, akademisyenler aleti MÖ 3000 yılında Olmeklerin icat ettiğini düşünmektedir. MS y. 1000 yılına gelindiğinde Aztekler buna *nepohualtzintzin* ("kişisel hesap sayıcı") adını veriyor ve el bileklerine bilezik gibi takıyorlardı.

Çift taban

MS 2. yüzyıl civarında abaküsler Çin'de yaygın bir araç haline geldi. Çin abaküsünün, yani suanpan'ın tasarımı Romalıların versiyonuyla uyuşuyordu ancak metal bir çerçeveye oturtulmuş çakıl taşları yerine ahşap çubuklar üzerindeki sayıcılardan faydalanılıyordu. İlk abaküsün Romalılara mı Çinlilere mi ait olduğu belirsizdir ancak abaküslerde insanların bir elin beş parmağıyla sayma tarzından esinlenildiğinden benzerlikleri tesadüften ibaret olabilir. Söz konusu iki abaküs de iki bölmeden oluşur; alt bölmede en fazla beşe kadar, üst bölmedeyse beşler sayılır.



Kadın suretinde kişileştirilmiş aritmetik, sayıları kullanan Romalı matematikçi Boëthius ile sayma tablası kullanan Yunan Pisagor arasındaki bir müsabakanın hakemliğini yapmaktadır.

MS ikinci binyıla gelindiğinde, suanpan ve onun sayı sayma yöntemleri Asya'nın geneline yayılmaya başladı. 1300'lerde, soroban adını aldığı Japonya'ya ihraç oldu. Burada yavaş yavaş iyileştirildi ve 20. yüzyıla gelindiğinde soroban bir 1:4 abaküs (her çubukta 1 üst boncuk ve 4 alt boncuk) haline geldi. ■

Pİ'Yİ İNCELEMEK EVRENİ İNCELEMEK GİBİ

Pİ'Yİ HESAPLAMAK



KISACA

KİŞİ
Arşimet
(MÖ y. 287-MÖ y. 212)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1650 BCE Orta Krallığın Mısırlı yazıcılarınca matematik kılavuzu olarak kazınan Rhind papirüsü π'nin yaklaşık değerlerini içerir

SONRA
5th centuryCE Çin'de Zu Chongzhi, π'yi yedi ondalık basamağıyla hesaplar.

1671 İskoç matematikçi James Gregory, π'yi hesaplamaya yarayan arktanjant yöntemini geliştirir. Gottfried Leibniz aynı keşfi üç yıl sonra Almanya'da yapar.

2019 Japonya'da Emma Haruka Iwao, bir bulut bilişim hizmeti kullanarak π'yi 31 trilyonun üzerinde ondalık basamağıyla hesaplar.

Kaç ondalık basamağıyla hesaplanırsa hesaplansın, Pi'nin (π: çemberin çevresinin çapına oranı; kabaca 3,141 olarak verilir) ondalık sayı biçiminde tamı tamına ifade edilememesi yüzyıllardır matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Pi sayısını simgelemek için Yunancadaki π harfini ilk defa Galli matematikçi William Jones 1706'da kullandı. Her şeye rağmen Pi sayısının hem çemberin çapı ve alanının hem de kürenin hacminin hesabında ne derece önemli olduğu binyıllar önce kavranmıştı.

> Pi, lisedeki geometri problemlerinde sık sık çıkan bir öğeden ibaret değildir; matematiğin dokusuna büsbütün işlenmiş hâldedir.
>
> **Robert Kanigel**
> **Amerikalı bilim yazarı**

Kadim metinler

Pi'nin kesin değerini belirlemek basit değildir, hatta Pi'nin ondalık sistemde gösterilişini olabildiğince çok ondalık basamakla bulma arayışı sürmekte. π için bulunan en eski yaklaşık değerlerden ikisi, Rhind ve Moskova papirüsleri olarak bilinen Antik Mısır belgelerinde verilmiştir. Yazıcı adaylarına yönelik olduğu düşünülen Rhind papirüsünde silindir ve piramitlerin hacimlerinin yanı sıra daire alanının hesaplanışı açıklanır. Daire alanının hesabında kullandıkları yöntemde, dairenin çapının $^8/_9$'u büyüklüğünde kenarlara sahip bir karenin alanı bulunmuştu. Bu yöntem, π sayısının dört ondalık basamağıyla hesaplanıp yaklaşık 3,1605 alındığı anlaşılır; bu sayı π'nin bilinen en hassas değerinden yalnızca yüzde 0,6 daha büyüktür. Babil'de dairenin alanı, çevrenin karesini $^1/_{12}$ ile çarparak bulunuyordu, yani π'nin değeri 3'tü. Bu değere Kitabı Mukaddes'te (1. Krallar 7:23) rastlanır: "Hiram dökme tunçtan on arşın çapında, beş arşın derinliğinde, çevresi otuz arşın yuvarlak bir havuz yaptı."

MÖ y. 250'de Yunan bilgin Arşimet, π'nin değerini belirlemek maksadıyla, bir çemberin içine tamı tamına sığan (içine çizilen) veya onu çevreleyen (etrafına çizilen) düzgün çokgenler çizilmesi



Ayrıca bkz. Rhind papirüsü 32–33 ▪ İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Eratosthenes kalburu 66–67 ▪ Zu Chongzhi 83 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Buffon'un iğne deneyi 202–03

esasına dayalı bir algoritma geliştirdi. Düzgün çokgenlerin kenar uzunluklarını, kenar sayısı iki katına çıkarıldığı durum için ilişkilendirmek amacıyla Pisagor teoremini (bir dik üçgende, hipotenüsün [dik açının karşısındaki kenarın] karesi, diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir) kullanarak π'nin üst ve alt limitlerini hesapladı. Algoritmasını bu sayede 96 kenarlı çokgenlere kadar genişletmesi mümkündü. Bir dairenin alanını, birçok kenarı olan bir çokgenle belirlemek Arşimet'ten en az 200 yıl önce önerilmiş bir yoldu ama dairenin hem içine hem de etrafına çokgen çizmeyi hesaba katan ilk kişi oydu.

Squaring the circle

π'nin bir yaklaşık değerini bulmanın başka bir yöntemi olan "dairenin karelenmesi", Antik Yunan matematikçileri arasında zorluğuyla ünlü bir problemdi. Verili bir daireyle eşit alana sahip bir kare oluşturmayı gerektiriyordu. Yunanlar sadece pergel ve cetvel kullanarak bir daireyle kareyi üst üste koyuyor ve karenin alanına dair ellerindeki bilgilerden yararlanarak dairenin alanına yaklaşmaya çalışıyorlardı. Yunanlar bu yöntemle başarılı olamadı ve 19. yüzyılda, π'nin irrasyonel olması nedeniyle daireyi karelemenin imkânsız olduğu anlaşıldı. İmkânsız bir işi başarma girişimlerine yer yer "daireyi karelemek" denmesinin sebebi budur.

Matematikçilerin daireyi kareleme girişimlerinde kullandıkları bir diğer yöntem, daireyi parçalara ayırıp yeniden dikdörtgen şeklinde

Çokgenler uzun süredir çemberlerin çevresine yaklaşmak için kullanılmışsa da, π'nin üst ve alt limitlerini bulmak amacıyla çemberin hem içine hem de etrafına (çemberin dışına) çokgen çizmeyi ilk hesaba katan, Arşimet'ti.



> İstisnasız Arşimet'in tüm eserleri, matematiksel inceleme eserleridir.
> **Thomas L. Heath**
> **Tarihçi ve matematikçi**

Arşimet



MÖ y. 287'de Syrakusa'da dünyaya gelen çok yönlü Yunan bilgin Arşimet üstün bir matematikçi ve mühendisti. Arşimet suya batan bir cismin taşırdığı su hacminin, o cismin hacmine eşit olduğunu fark edip "eureka" diye haykırmasıyla da hatırlanır. Ona mal edilen icatlardan biri, yokuş yukarı su taşımak için, bir silindir ve onun içindeki vida biçimli bir döner bıçak olarak tasarlanmış Arşimet vidasıdır.

Matematik alanında, aynı maksimum yarıçap ve yükseklik büyüklüklerine sahip bir silindir, küre ve koninin hacimlerinin birbirlerine oranının 3:2:1 olduğunu, uygulamalı yaklaşımlarla ortaya koydu. Pek çok kişi ancak 17. yüzyılda geliştirilebilen kalkülüsün öncüsü olarak Arşimet'i görür. MÖ 212'deki Syrakusa Kuşatmasında hayatının bağışlanması yönündeki emirlere rağmen Romalı bir askerce öldürülmüştür.

Önemli eserleri

MÖ y. 250 *Dairenin Ölçümü*
MÖ y. 225 *Küre ve Silindir Üzerine*
MÖ y. 225 *Spiraller Üzerine*

düzenlemekti (bkz. aşağıda). Dikdörtgenin alanı $r \times \frac{1}{2}(2\pi r) = r \times \pi r = \pi r^2$'dir ($r$ dairenin yarıçapıdır, $2\pi r$ ise çevresidir). Dairenin alanı πr^2'dir. Kullanılan parçalar ne kadar küçük olursa şekil dikdörtgene o kadar çok benzer.

Arayış yayılır

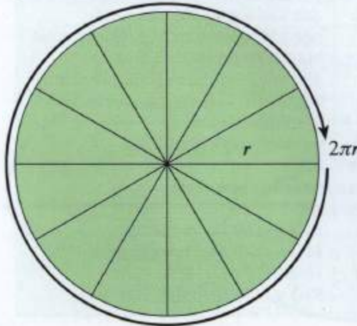
Arşimet'in ölümünden 300 yıldan fazla bir zaman sonra Ptolemaios (MS y. 100-170) π'nin 3:8:30 (60-tabanlı), yani $3 + 8/60 + 30/3.600 = 3{,}1416$ olduğunu belirledi; bu, π'nin bilinen en yakın değerinden sadece yüzde 7 daha büyüktür. Çin'de π'nin değeri için, $\sqrt{10}$'un yaygınlık kazandığı MS 2. yüzyıla dek genellikle 3 kullanılıyordu. Bu değerlerden ilki π'den yüzde 2,1 daha büyüktür. Wang Fau, çevresi 142 olan bir çemberin çapının 45 olduğunu (yani $142/45 = 3{,}15$; π'den sadece yüzde 1,4 daha büyük) tayin etti, Liu Hui'yse 3072 kenarlı bir çokgeni kullanarak π için 3,1416 yaklaşık değerini buldu. 5. yüzyılda Zu Chongzhi ve oğlu 24,576 kenarlı bir çokgenle π'yi $355/113 = 3{,}14159292$ olarak hesapladılar; yakaladıkları hassasiyete (yedi ondalık basamakla) Avrupa'da 16. yüzyılda kadar erişilemedi.

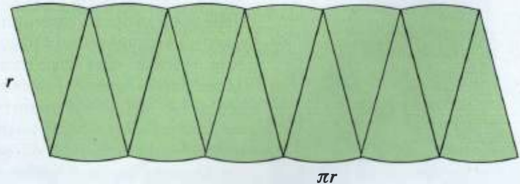
> **“** Pi'nin sonu yok. Daha çok basamağını bulmak için yine denemeyi çok isterim. **”**
> **Emma Haruka Iwao**
> **Japon bilgisayar bilimcisi**

Hindistan'da, matematikçi astronom Aryabhata, MÖ 499 tarihli *Aryabhatiyam* başlıklı astronomi eserinde, π'yi elde etmenin bir yöntemine yer verdi: “100'e 4 eklenir, 8'le çarpılır, ardından da 62.000 eklenir. Çapı 20.000 olan bir çemberin çevresinin hesaplanması bu kuralla yapılabilir.” Bu işlemin sonucu, $[8(100 + 4) + 62.000] \div 20.000 = 62.832 \div 20.000 = 3{,}1416$'dır.

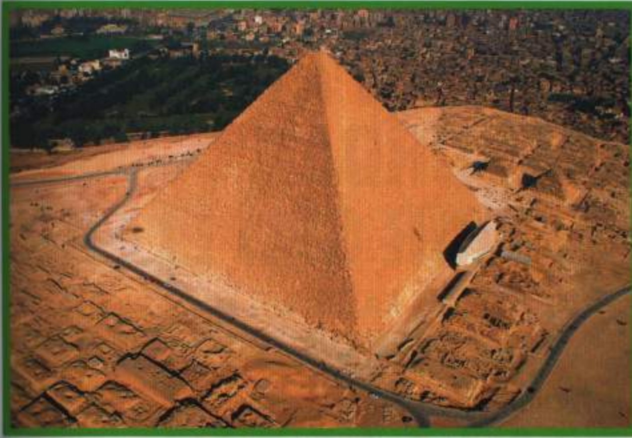
Brahmagupta (y. 598-668) 12, 24, 48 ve 96 kenarlı düzgün çokgenleri kullanarak π'nin karekök yaklaşık değerlerini elde etti: sırasıyla $\sqrt{9{,}65}$, $\sqrt{9{,}81}$, $\sqrt{9{,}86}$ ve $\sqrt{9{,}87}$. π^2'yi 9,8696 olarak dört ondalık basamakla belirledikten sonra bu hesaplamaların çözümünü $\pi = \sqrt{10}$ olarak sadeleştirdi. 9. yüzyılda π için $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ ve $62.832/20{,}000$ değerlerini kullanan Arap matematikçi El-Hârizmî, ilk değeri Yunanistan'da, diğer iki değeri Hindistan'da bulunmuş olmasına bağladı. İngiliz bir papaz olan Bathlı Adelard, 12. yüzyılda El-Hârizmî'nin yapıtını çevirerek Avrupa'da π'nin araştırılmasına yönelik ilgiyi canlandırdı. 1202'de *Liber Abaci* kitabında Hint-Arap rakamlarını tanıtan Pisalı Leonardo (Fibonacci), 1220'de π'yi $864/275$ olarak hesapladı; bu, Arşimet'in kestiriminden biraz daha iyiydi, öte yandan Ptolemaios, Zu Chongzhi veya Aryabhata'nın hesaplamaları kadar hassas değildi. İki yüzyıl sonra, İtalyan çok yönlü bilgin Leonardo da Vinci (1452-1519) bir dairenin alanını belirlemek için boyu dairenin çevresiyle aynı uzunlukta, yüksekliğiyse dairenin yarıçapının yarısı kadar olan bir dikdörtgen çizmeyi önerdi.

Arşimet'in, Antik Yunan uygarlığında π'yi hesaplamak için kullanılan yöntemi 16. yüzyılın sonlarında halen kullanılmaktaydı. 1579'da Fransız matematikçi François Viète her biri 216 kenarlı 393 adet düzgün çokgen kullanarak π'yi 10 ondalık basamakla hesapladı. 1593'te Flaman matematikçi Adriaan van Roomen (Romanus) 230 kenarlı bir çokgenden yararlanarak π'yi 17 ondalık basamağıyla hesapladı. Bundan üç yıl sonra





Dairenin dilimleri dikdörtgenimsi bir şekil oluşturacak biçimde dizilerek dairenin alanının πr^2 olduğu gösterilebilir. “Dikdörtgenin” yüksekliği dairenin yarıçapına yaklaşık olarak eşit, genişliğiyse yarıçapının yarısıdır ($2\pi r$'nin yarısı, yani πr).



Mısır'daki Büyük Giza Piramidinin çevresinin yüksekliğine oranı neredeyse tamı tamına π'dir; bu, Antik Mısır uygarlığı mimarlarının bu sayıdan haberdar olduğu anlamına gelebilir.

Alman-Hollandalı matematik profesörü Ludolph van Ceulen, π'yi 35 ondalık basamağıyla hesapladı.

İskoç matematikçi astronom James Gregory'nin 1671'de ve Gottfried Leibniz'in 1674'te birbirinden bağımsız olarak geliştirdiği arktanjant serisi sayesinde, π'yi bulmaya yönelik yeni bir yaklaşım elde edildi. Arktanjant (arktan) serisi, bir üçgenin açılarını belirlemenin bir yoludur ve radyan ölçüsüyle çalışılır; bir tam dönüş 2π radyandır (360°'ye eşdeğer).

Ne yazık ki, π'yi bu seriyi kullanarak sadece birkaç ondalık basamakla hesaplamak için bile yüzlerce terim gerekir. 18. yüzyılda yaşamış Leonhard Euler'in de aralarında bulunduğu birçok matematikçi π'yi arktanjant serisinden yararlanarak daha elverişli şekilde bulmanın yollarını bulmaya çalıştı. Ardından 1841'de İngiliz matematikçi William Rutherford arktanjant serisini kullanarak π'nin 208 basamağını buldu.

20. yüzyılda hesap makinelerinin ve elektronik bilgisayarların icat edilmesi π'nin basamaklarının bulunmasını çok daha kolaylaştırdı. 1949'da 70 saat içerisinde π'nin 2037 basamağı hesaplandı. Dört yıl sonra, 3089 basamağın hesaplanması yaklaşık 13 dakika sürdü. 1961'de Amerikalı matematikçiler Daniel Shanks ve John Wrench, arktanjant serisini kullanarak 100.625 haneyi sekiz saatten kısa sürede hesapladılar. 1973'te Fransız matematikçiler Jean Guillaud ve Martin Bouyer 1 milyon ondalık basamağa ulaştılar, 1989'daysa Ukraynalı-Amerikalı kardeşler David ve Gregory Chudnovsky bir milyar ondalık basamak hesapladı.

2016'da İsviçreli bir parçacık fizikçisi olan Peter Trueb, y-cruncher yazılımından yardım alarak π'yi 22,4 basamakla hesapladı. Emma Harula Iwao Mart 2019'da π'yi 31 trilyonun üzerinde ondalık basamakla hesaplayınca yeni bir dünya rekoru kırıldı. ■

Pi'yi uygulamak

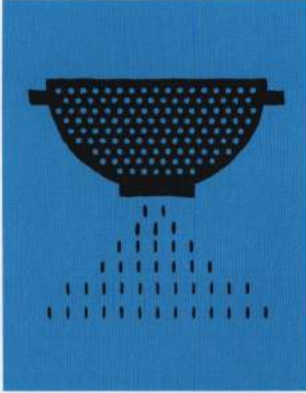
Uzay bilimcileri hesaplamalarında π'yi sık sık kullanırlar. Örneğin bir dairenin çapı biliniyorsa π ile çarpılarak çevresinin hesaplanabileceğini söyleyen temel ilkeden yararlanılarak, bir gezegenin yüzeyine göre farklı irtifalardaki yörüngelerin boyları hesaplanabilir. 2015'te NASA bilim insanları bu yöntemi, Mars'la Jüpiter arasındaki asteroit kuşağındaki bir cüce gezegen olan Ceres'in yörüngesine Dawn uzay aracının ne kadar zaman sonra oturacağını hesaplamak için bu yöntemi uyguladılar.

NASA'nın California'daki Jet Tahrik Laboratuvarında çalışan bilim insanları, Jüpiter'in uydularından Europa'nın yüzeyinin altındaki hidrojen miktarını öğrenmek istiyorlardı. Bunun için, Europa'nın yüzey alanını (her küre için olduğu gibi $4\pi r^2$) hesaplayarak verili bir birim alanda üretilen hidrojen miktarının yaklaşık bir değerini buldular. Europa'nın yarıçapını bildiklerinden yüzeyinin hesaplanması kolaydı.

Yer'in yüzeyindeki bir noktada duran birinin, hangi enlemin üzerinde durduğu bilindiği takdirde, Yer'i bir kez turladığında katettiği mesafenin π kullanılarak hesaplanması da mümkündür.



Astrofizikçiler, yörüngelerin güzergâhlarını ve Satürn gibi gezegenlerin niteliklerini belirlemek için hesaplamalarında π'yi kullanırlar.



SAYILARI ÂDETA KALBURDAN GEÇİRİR GİBİ ELERİZ

ERATOSTHENES KALBURU

KISACA

KİŞİ
Eratosthenes
(MÖ y. 276-y. 194)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MÖ y. 1500 Babilliler asal ve bileşik sayılar arasındaki ayrımı ortaya koyar.

MÖ y. 300 *Öğeler*'de (IX. Kitap, 20. Önerme) Öklit sonsuz adet asal sayı olduğunu ispatlar.

SONRA
19. yüzyıl başları Carl Friedrich Gauss ve Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre, birbirinden habersizce, asal sayıların yoğunluğu hakkında birer kestirim üretirler.

1859 Bernhard Riemann asal sayıların dağılımı hakkında bir varsayımı açıklar. Varsayım, asal sayılarla ilgili daha birçok kuramın ispatında kullanılagelmiş ancak henüz ispatlanmamıştır.

Yer'in çevresini ve Yer'in ay ve güneşten uzaklığını ölçen çok yönlü Yunan bilgin Eratosthenes, asal sayıları bulmanın bir yöntemini de tasarladı. Yalnızca 1'e ve kendilerine bölünebilen bu sayılar yüzyıllardır matematikçiler için merak konusu olmuştur. Eratosthenes asal olmayan sayıları eleyeceği "kalburunu" icat etti. Bunun için, icadını bir sayı kafesi sistemi olarak kullanıyor ve 2, 3, 5 vb. sayılarının katlarının üstünü çiziyordu; asal sayılara ulaşmak bu sayede büyük oranda kolaylaştı.

Asal sayıların kesin olarak iki çarpanı vardır: 1 ve sayının kendisi. Yunanlar asal sayıların önemini kavrıyor, onları tüm pozitif tamsayıların temel yapıtaşları olarak görüyorlardı. *Öğeler*'inde, Öklit hem bileşik sayıların (1'den büyük tamsayıların başka tamsayılarla çarpılmasıyla elde edilebilen tamsayılar) hem de asal sayıların birçok niteliğini açıklıyordu. Belirttiği bu niteliklerden birine göre, her tamsayı asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir, aksi takdirde o tamsayının kendisi asaldır.

Eratosthenes, "kalburunu" asal sayıları bulma sürecini **hızlandıran** bir **yöntem** olarak geliştirdi.

Sayılar bir tabloya yazılır.

Bu **yöntemle, asal sayıların net olarak** belirlenmiş olduğu bir **kafes** elde edilir.

Sistemli bir şekilde, asal sayıların **katlarının** üstü çizilir.

Ayrıca bkz. Mersenne asal sayıları 124 ▪ Riemann varsayımı 250–51 ▪ Asal sayı teoremi 260–61 ▪ Sonlu basit gruplar 318–19

Eratosthenes'in yöntemine, ardışık sayılardan oluşan bir tabloyla başlanır. İlk önce 1'in üstü çizilir. Ardından, 2'nin kendisi hariç 2'nin tüm katlarının üstü çizilir. Bu işlemin aynısı 3, 5 ve 7'nin katları için de yapılır. 7'den büyük tüm sayıların katlarının üstü zaten çizilmiş olur çünkü 8, 9 ve 10 sayıları 2, 3 ve 5'in bileşikleridir.

Asal sayılar

1 ve bileşik sayılar

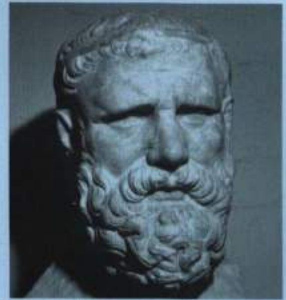
~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Birkaç on yıl sonra Eratosthenes, tüm asal sayıları içine alacak şekilde genişletilebilen kendi yöntemini geliştirir. 1'den 100' kadar sayılar için bir sayı kafesini (bkz. yukarıda) kullanır. Tek çarpanı 1 olduğundan 1'in asal sayı olmadığı açıktır. İlk asal sayı 2'dir, ayrıca 2'den başka çift asal sayı yoktur. Diğer her çift sayı 2'ye bölündüğü için asal sayı olamaz, buradan hareketle diğer tüm asal sayılar tek sayı olmak zorundadır. Bir sonraki asal sayı olan 3'ün yalnızca iki çarpanı vardır, bu nedenle 3'ün diğer katlarının hiçbiri asal sayı olamaz. 4 sayısının (2 × 2) tüm katları, çift sayı oldukları için zaten elenmiştir. Sıradaki asal sayı 5'tir, dolayısıyla 5'in diğer katlarının hiçbiri asal sayı olamaz. 6 sayısı ve tüm katları da 3'ün çift sayı katları olduklarından, asal sayı adaylarının listesinden çıkarılmıştır. Bir sonraki asal sayı 7'dir; 7'nin tüm katlarının çıkarılmasıyla 49, 77 ve 91 elenir. Tamamı 3'ün katlarından oluştuğundan, 9'un tüm katları gitmiştir. Tamamı 5'in çift sayı katları olduğundan 10'un da tüm katları çıkarılmıştır. 11'den 100'e kadar sayıların katları zaten çıkarılmıştır ve birbiri ardına gelen tüm sayılar için bu böyle devam eder. 100'e kadar yalnızca 25 asal sayı vardır; 2, 3, 5, 7 ve 11 şeklinde başlayıp 97'yle biten bu sayıların tamamı 2, 3, 5 ve 7'nin katlarının elenmesiyle basitçe belirlenir.

Arayış sürer

Pierre de Fermat, Marin Mersenne, Leonhard Euler ve Carl Friedrich Gauss gibi isimlerin asal sayıların özelliklerini daha da derinlemesine irdelemesi, 17. yüzyıl ve sonraki matematikçilerin konuyla ilgilenmesine sebep oldu.

Bilgisayar çağında bile büyük bir sayının asal olup olmadığını belirlemek son derece güçtür. Açık anahtarlı kriptografi (iki büyük asal sayı kullanarak ileti şifreleme) bütün internet güvenliğinin temelini oluşturur. Şayet bilgisayar korsanları çok büyük sayıları asal çarpanlarına ayırmanın yolunu bulacak olursa yeni bir sistem tasarlamak gerekecek. ▪



Eratosthenes

MÖ 276 civarında, Libya'daki Yunan şehri Kyrene'de doğan Eratosthenes, Atina'da eğitim aldı ve matematikçi, astronom, coğrafyacı, müzik kuramcısı, edebiyat eleştirmeni ve şair oldu. Kadim dünyanın en büyük akademik kurumu olan İskenderiye Kütüphanesinin baş kütüphanecisiydi. Coğrafyanın temellerini atıp akademik bir bilim dalı olarak adını koydu, günümüzde kullanılan coğrafya dilinin büyük bölümünü geliştirdi ve tüm bu katkılarıyla coğrafyanın babası olarak tanınmasına sebep oldu.

Eratosthenes, Yer'in bir küre olduğunu da anladı. Buna ek olarak, Güney Mısır'ın Aswan şehrinde ve ülkenin kuzeyindeki İskenderiye'de gözlemlediği güneşin öğle vaktindeki yükselme açılarını karşılaştırarak Yer'in çevresini hesapladı. Meridyen çizgilerini, Ekvator'u, hatta kutup bölgelerini içeren ilk dünya haritasını da o meydana getirdi. MÖ 194 yakınlarında hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

Mensuram orae ad terram (Dünyada Ölçüm)
Geographika (Coğrafya)



GEOMETRİK BİR GÜÇ GÖSTERİSİ

KONİ KESİTLERİ

KISACA

KİŞİ
Pergeli Apollonius
(MÖ y. 262-190)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ y. 300 Öklit'in 13 ciltlik *Öğeler*'inde düzlem geometrisinin esas aldığı önermeler açıklanır.

MÖ y. 250 On Conoids and Spheroids'te (*Koniğimsi ve Küremsi Nesneler Hakkında*) Arşimet, koni kesitlerinin kendi eksenleri etrafında dönerek oluşturduğu katıları masaya yatırır.

SONRA
MS y. 1079 Çok yönlü İranlı bilgin Ömer Hayyam cebirsel denklemlerin çözümünde, kesişen koni kesitlerini kullanır.

1639 Fransa'da, 16 yaşındaki Blaise Pascal, bir çemberin içine altıgen çizildiğinde altıgenin karşılıklı kenarlarının bir doğru üzerindeki üç noktada birleştiğini savunur.

Antik Yunan'dan çıkmış çok sayıda öncü matematikçinin en parlaklarından biri, Pergeli Apollonius'tur. Apollonius matematik çalışmalarına Öklit'in büyük yapıtı *Öğeler*'in meydana çıkmasından sonra başladı ve ileriki akıl yürütme ve ispat aşamaları için belirlenen "aksiyomlardan" (doğru kabul edilen ifadeler) yola çıkmayı öneren Öklitçi yöntemi benimsedi.

Apollonius ışık bilimi (ışık ışınlarının ilerleyişinin incelenmesi), astronomi ve geometri dahil pek çok alan üzerine yazıp çizdi. Elimizdeki çalışmalarının büyük bir kısmı bölük pörçük durumdadır ama buna karşılık en etkili yapıtı Conics (*Koni Kesitleri*) nispeten sağlam yapıdadır. Koni Kesitleri, yedisi günümüze ulaşan sekiz cilt olarak yazılmıştır: 1 ila 4. Kitaplar Yunanca, 5 ila 7. Kitaplar Arapçadır. Matematikte halihazırda uzman kişilere göre tasarlanmıştır.

> *Koni Kesitleri* eserimin ikinci kitabını sana getirmesi için oğlumu gönderdim. Dikkatlice oku, sonra uygun kişilere ilet.
> **Pergeli Apollonius**

Yeni bir geometri

Öklit gibi ilk Yunan matematikçiler en saf geometrik şekiller olarak doğru ve çembere odaklandılar. Apollonius'sa bunları üç boyutta inceledi: Bir çember, kendisinden yayılan doğruların tamamıyla, bulunduğu düzlemin altında veya üstünde, aynı sabit noktadan (köşeden) geçmek üzere birleştirilirse, bir koni meydana gelir. Bu koniyi farklı şekillerde keserek, koni kesitleri denen birtakım eğriler üretilebilir.

Apollonius, bu yeni geometrik çizim evrenini *Koni Kesitleri*'nde en ince ayrıntısına kadar açıkladı, koni kesitlerinin özelliklerini irdeledi ve açıkladı. Çalışmasının temeline koyduğu kabulünde iki koni mevcuttu; bu koniler aynı köşede birleşiyor ve dairesel tabanlarının alanları sonsuza dek uzayabiliyordu. Koni kesitlerinden üçüne elips, parabol ve hiperbol adlarını verdi. Elips, bir koniyi bir düzlem eğik olarak kestiğinde oluşur.

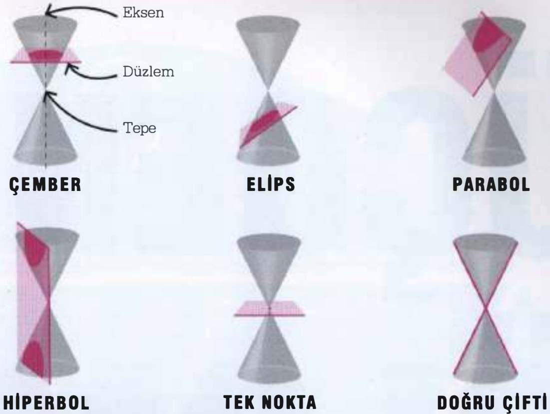
Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Koordinatlar 144–51 ▪ Bir sikloitin altında kalan alan 152–53 ▪ Tasarı geometri 154–55 ▪ Karmaşık düzlem 214–15 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–29 ▪ Fermat'nın son teoremini 320–23

Parabol oluşması için, kesiğin koninin ayrıtına paralel olması gerekir. Hiperbolse düzlemin dikey olmasının sonucudur. Apollonius çemberi dört koni kesitinden biri olarak görmesine rağmen düzlemin koninin eksenine dik olması durumunda oluşan şekil aslında elipstir.

Başkalarına yol açmak

Apollonius bu dört geometrik cismi tarif ederken ne bir cebir formülü ne de sayı kullandı. Buna rağmen, konik eğriye, bir eksenden çıkan sıralı bir paralel çizgi demeti olarak bakması, ileride yaratılacak koordinat sistemi geometrisine işaret ediyordu. 1800 yıl sonra Fransız matematikçiler René Descartes ve Pierre de Fermat'nın emeklerinin getireceği boyutta bir kesinliği Apollonius yakalayamadı ama kendi konik eğrilerinin koordinatlar aracılığıyla simgelenişine yaklaşmayı bildi. Apollonius'un önünde bazı engeller vardı: Negatif sayıları kullanmamış, çalışmalarında sıfırın da bariz bir rolü olmamıştı. Yani Descartes'ın geliştirdiği iki boyutlu Kartezyen geometri hem negatif hem de pozitif koordinatları kapsayan dört çeyrek düzlemde işliyorken buna karşılık Apollonius tek bir çeyrek düzlemde çalışmıştı.

Apollonius'un araştırmaları, ortaçağda İslam dünyasının geometride yaptığı birçok atılımın kaynağı oldu. Eserleri sonradan Rönesans döneminde İngiltere'de yeniden keşfedilecek ve bunun sonucunda matematikçiler analitik geometriyi geliştirerek Bilim Devrimine destek olacaktı. ▪



Bir düzlem bir koniyi kestiğinde koni kesiti oluşturur. Apollonius'un tarif ettiği kesitlere ilaveten, düzlemin tepeyi (tepedeki köşeyi) kestiği tek bir nokta da koni kesiti olabilir, tepeyi bir açıyla kesecek şekilde yüzey boyunca uzanan doğrular da.

> [Koni kesitleri] doğanın en önemli yasalarına ulaşmak için gereken anahtarlardır.
>
> **Alfred North Whitehead**
> **İngiliz matemtatikçi**

Pergeli Apollonius

Apollonius'un hayatına dair bilinenler çok değil. MÖ y. 262'de Güney Anadolu'da Tanrıça Artemis'e atfetdilmiş bir ibadet merkezi olan Perge'de (günümüzde Türkiye'de) doğdu. Akdeniz'i aşıp Mısır'a ulaştıktan sonra, önemli kültür şehri İskederiye'de Öklitçi bilginlerden öğrenim gördü.

Apollonius'un, *Koni Kesitleri*'nin sekiz cildini de Mısır'dayken derlediği düşünülmektedir. İlk ciltlerin içeriğinde Öklit'e yabancı gelecek pek az şey vardır ama sonraki çalışmaları geometri adına hatırı sayılır buluşlardır.

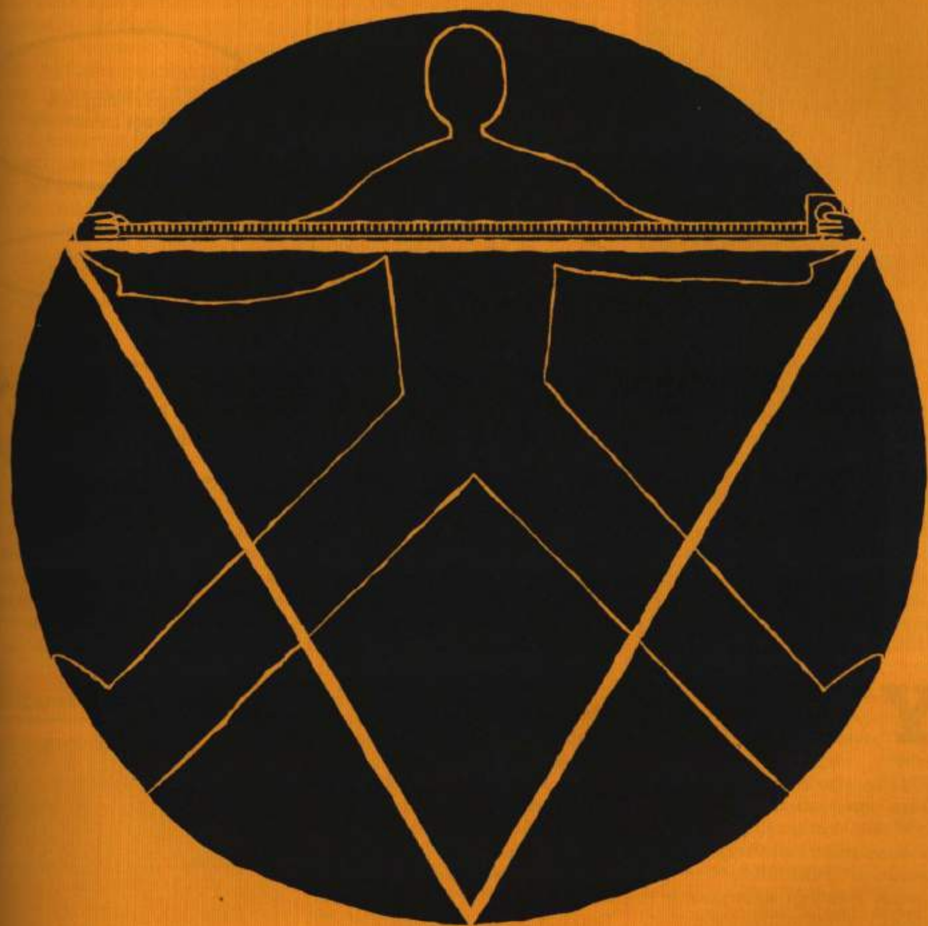
Koni kesitleri çalışmaları bir yana, Apollonius'un, çağdaşı Arşimet'e oranla daha yakın bir Pi değeri bulduğu bilinir. Ayrıca, güneşin ışınlarının küresel aynayla odaklanmadığı, parabolik aynayla odaklandığı yönündeki tespit de ona atfedilir.

Önemli eseri

MÖ y. 200 *Koni Kesitleri*

ÜÇGENLERİ ÖLÇME SANATI

TRİGONOMETRİ



KISACA

KİŞİ
Hipparkos (İÖ y. 190-120)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ y. 1800 Babillilerin Plimpton 322 tabletinde, Pisagor $a^2 + b^2 = c^2$ formülünü daha geliştirmeden çok daha önce Pisagor üçlülerinden oluşan bir liste göze çarpar.

MÖ y. 1650 Mısırlıların Rhind papirüsü, bir piramidin eğiminin hesaplanmasına yönelik bir yöntem içerir.

MÖ 6. yüzyıl Antik Yunan'da Pisagor, üçgenlerin geometrisiyle ilgili teoremini keşfeder.

SONRA
MS 500 Hindistan'da ilk trigonometrik tablolar kullanılır.

MS 1000 İslam dünyasında matematikçiler, üçgenlerin kenarları ve açıları arasındaki tüm oran çeşitlerini kullanmaktadırlar.

Trigonometri, üçgenlerin kenarları ve açıları arasındaki **ilişkinin** incelenmesidir.

Her üçgenin **üç açısının toplamı 180°'dir.**

İki açı bilindiğinde **üçüncü açı** bulunabilir.

Bir dik üçgenin kenarlarının birbirlerine oranlarına trigonometrik oranlar denir.

Bir üçgenin **bir kenarının** uzunluğu ve **açıları biliniyorsa diğer kenarın uzunluğu bulunabilir.**

Yunancadaki "üçgen" ve "ölçüm" sözcüklerinden gelen bir terim olan trigonometri, matematiğin tarihteki gelişimi açısından ve modern dünya için muazzam bir önem taşır. En kullanışlı matematik dallarından biri olan trigonometri insanların denizcilikte yön bulmasına, elektriği anlamasına ve dağların yüksekliğini ölçmesine imkân vermiştir.

Uygarlıklar ilkçağlardan beri dik açıların mimari için ne denli gerekli olduğunun farkındaydı. Matematikçiler bu sebeple dik üçgenlerin özelliklerini çözümlemeye koyuldu: Tüm dik üçgenler iki kısa kenar (uzunlukları eşit olabilir de olmayabilir de) ve bu kenarların ikisinden de uzun olan bir diyagonal (hipotenüs) içerir; tüm üçgenlerde üç açı vardır ve dik üçgenler 90°'lik bir açı içerir.

Plimpton tableti

Aşağı yukarı MÖ 1800'e tarihlenen, üçgenlerin incelendiği bir kadim Babil kil tableti 1900'lerin başlarında keşfedildi. 1923'te Amerikalı yayımcı George Plimpton'ın satın aldığı ve Plimpton 322 adı verilen tablette dik üçgenlerle ilgili sayısal bilgiler kazılıdır. Taşıdığı önem konusunda ortada kesin bir uzlaşı olmamakla beraber, bilgiler görünüşe göre Pisagor üçlüleri (bir dik üçgenin kenar uzunluklarını temsil eden üç pozitif sayı) ve bunların yanında bir de kenarların karelerinin birbirlerine oranlarını andıran bir grup sayıyı içeriyor. Tabletin yapılış amacı bilinmiyor ama ebat ölçümüne yönelik bir uygulama kılavuzu olarak kullanılmış olabilir.

Her ne kadar kendisi icat etmemiş olsa bile, elimizdeki belgeye dayalı delillere göre trigonometriyi düzenli bir usulle ilk kullanan, Hipparkos'tur.
Sir Thomas Heath
İngiliz matematik tarihçisi

Ayrıca bkz. Rhind papirüsü 32–33 ▪ Pisagor 36–43 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Pascal üçgeni 156–61 ▪ Viviani'nin üçgen teoremi 166 ▪ Fourier analizi 216–17

Kadim Babil uygarlığıyla yaklaşık olarak aynı zamanda Mısırlı matematikçiler de geometriye ilgi duymaya başladı. Bu ilginin sebebi sırf anıt yapım programlarından ibaret değildi, Nil nehrinin her taşkınında, taşkının çekildiği arazi alanlarının sınırlarını belirlemeleri gerekiyordu. Kesirlerle ilgili bir grup tablo içeren Rhind papirüsünde Mısırlıların bu ilgisi açıkça görülür. Bu tablolardan birinde şu soru yöneltilir: "Bir piramit 250 kübit yüksekliğinde ve tabanının bir kenarı 360 kübit uzunluğundaysa seked'i nedir?" Seked sözcüğü eğim anlamına gelir, dolayısıyla problem tamamen trigonometriktir.

Hipparkos kuralları ortaya koyar

En kadim matematikçiler trigonometriyi sayı tabloları olarak kullanmıştı ama buna karşılık, Babillilerin açılarla ilgili kuramlarından esinlenen Antik Yunanlar trigonometriyi katı kurallara tabi bir matematik dalı olarak geliştirdiler. MÖ 2. yüzyılda, genellikle trigonometrinin kurucusu kabul edilen astronom ve matematikçi Hipparkos, çember ve küre içine çizilen üçgenlere ve açılar ile (çember veya herhangi bir eğri üzerindeki iki nokta arasında çizilen doğru) kirişlerin uzunlukları arasındaki ilişkiye özel bir merak duyuyordu. Hipparkos, trigonometrik değerlerden oluşan ilk doğru tabloyu derleyen kişiydi.

Ptolemaios'un katkısı

Yaklaşık 300 yıl sonra, Mısır'ın İskenderiye şehrinde, yetenekli ve çok yönlü Greko-Romen bilgin Claudius Ptolemaios (Batlamyus adı da yaygındır), *Syntaxis Mathematikos* başlıklı (sonraları İslam bilginlerince *El-mecistî* [*Almagest*] adı verilen) matematik eserini yazdı. Ptolemaios, Hipparkos'un üçgen ve çember kirişlerle ilgili kavramlarını daha da ileri taşıyıp güneş ve diğer "göksel cisimlerin" konumlarının, Yer'in etrafındaki dairesel yörüngelere dayanarak tahmin edilmesine olanak tanıyacak formülleri üretti. Ptolemaios, kendisinden önceki matematikçiler gibi, Babillilerin 60 sayısını temel alan 60-tabanlı sayı sistemini kullanıyordu. Ptolemaios'un çalışmaları, yükselişteki trigonometri bilim dalının astronomi kapsamında ele alındığı Hindistan'da daha da ileriye taşındı.



Ortaçağ döneminde, trigonometri ilkelerini uygulayan usturlaplar aracılığıyla gökcisimlerinin konumu ölçülüyordu. Aleti Hipparkos'un icat ettiği bilinir.

Hipparkos



Hipparkos MÖ 190'da Nikaia'da (günümüzde Türkiye'deki İznik) doğdu. Hayatıyla ilgili bilinenler kısıtlıdır. Ününü, Rodos Adası'nda yaşadığı dönemde yürüttüğü araştırmalara borçludur. Ptolemaios'un onun için "bir hakikat sevdalısı" tabirini kullandığı *Almagest*'inde, bulguları ölümsüzleştirildi.

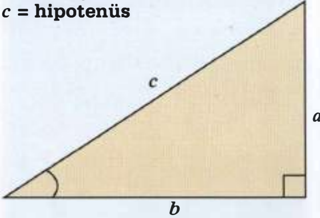
Hipparkos'un sağ kalan tek yapıtı, şair Aratus ile matematikçi ve astronom Eudoksos'un birlikte yazdığı *Phaenomena*'da yazarları takımyıldızları hatalı tarif ettikleri için eleştirdiği yorumudur.

Hipparkos'un astronomiye katkılarından en dikkat çekeni, güneş ve ayın yörüngelerini konu alan *Sizes and Distances*'tır (*Büyüklükler ve Uzaklıklar Üzerine*; şu anda kayıptır, ama Ptolemaios kullanmıştı). Güneşin ve ayın yörüngelerini araştırması ona gündönümü ve dönence tarihlerini hesaplama olanağını verdi. Ptolemaios'un *Almagest*'te kullandığı kataloğun ta kendisi olabilecek bir yıldız kataloğu derledi. MÖ 120'de hayatını kaybetti.

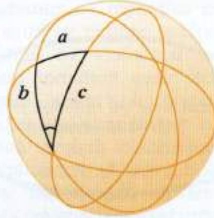
Önemli eseri

MÖ 2. yüzyıl *Büyüklükler ve Uzaklıklar Üzerine*

Trigonometrinin türleri



Düzlemsel trigonometri, bir düzlem (iki boyutlu düz bir yüzey) üzerindeki üçgenlerin incelenmesidir. Örneğin mimarlar binaların dayanıklılığından emin olmak için fizikçiler de hareket modellemede kullanmak için düzlemsel trigonometriye başvurur.



Küresel trigonometri, bir küre (üç boyutlu kavisli bir yüzey) üzerindeki üçgenlerin incelenmesidir. Astronomlar gökcisimlerinin konum hesaplamalarında, denizciler enlem ve boylam hesaplamalarında kullanır.

Hintli matematikçi Aryabhata (MS 474-550) kirişler konusundaki araştırmaları devam ettirerek, günümüzde sinüs fonksiyonu adıyla bilinen kavramın ilk tablosunu üretti. Sinüs fonksiyonu, hipotenüs (bir üçgenin en uzun kenarı) ve ilgili açının karşısındaki kenarın uzunluğu bilindiğinde, üçgenin bilinmeyen kenar uzunluğunun bulunmasını sağlayan sinüs/kosinüs oranlarının alabileceği tüm değerleridir.

> Matematiğin diğer dalları gibi trigonometri de tek bir insanın veya ulusun eseri değildi.
>
> **Carl Benjamin Boyer**
> **Amerikalı matematik tarihçisi**

7. yüzyılda, bir diğer önemli Hintli matematikçi ve astronom Brahmagupta, geometri ve trigonometriye kendi katkılarını yaptı. Bu katkılarından Brahmagupta formülü, bir çemberin içine çizilen dört kenarlı şekilleri ifade eden kirişler dörtgenlerinin alanını bulmak için kullanılır. Dörtgen iki üçgene bölünüp trigonometrik yöntemle de bu alan bulunabilir.

İslami trigonometri

Brahmagupta halihazırda bir sinüs değerleri tablosu oluşturmuştu ama üçgenlerin açılarını ve kenarlarını hesaplamak üzere ilk sinüs, kosinüs ve tanjant tablolarının bir kısmını MS 9. yüzyılda İranlı astronom Habeş El-Hâsib ("Hesapçı Habeş") üretti. Yine o sıralarda El-Battanî (Albatenius), Ptolemaios'un sinüs fonksiyonu çalışmasını geliştirip astronomi hesaplamalarına uyguladı. Suriye'nin Rakka şehrinde gökcisimleri üzerine son derece hassas gözlemler kaydetti. Arap bilginlerinin trigonometriyi geliştirme arzusu hem astronomiden kaynaklanıyor hem de dini nedenlere dayanıyordu çünkü Mekke'nin dünyanın herhangi bir yerine göre konumunu bilmeleri Müslümanlar için önemliydi. Hintli matematikçi ve astronom II. Bhaskara MS 12. yüzyılda küresel trigonometri araştırma alanını keşfetti. Bu alan, düzlem yerine bir kürenin yüzeyindeki üçgen ve diğer şekillerin incelendiği alandır.

Astronomiye destek

Trigonometrideki atılımlarla birlikte insanların gökyüzüne bakışında kademeli ve uygun bir değişim meydana geldi. Daha önce gökcisimlerinin hareketlerindeki örüntülerini edilgin gözlemler aracılığıyla kayda geçiren bilginler, gelecekteki astronomi olaylarını çok daha yüksek hassasiyetle tahmin edebilmek adına bu hareketleri matematiksel olarak modellemeye başladılar. Yalnız astronominin desteklenmesi amacıyla yürütülen trigonometri araştırmaları, Avrupa'da yeni gelişmelerin hız kazanmaya başladığı 16. yüzyıla kadar sürdü. *De Triangulis Omnimodis* (*Her Çeşit Üçgen Üzerine*) 1533 yılında yayımlandı.

> Logaritmik tablo, uzaydaki tüm geometrik büyüklükler ve hareketler hakkında bilgi elde edinmemizi sağlayabilecek küçük bir tablodur.
>
> **John Napier**

Regiomontanus adıyla tanınan Alman matematikçi Johannes Müller von Königsberg'in yazdığı bu yapıt, hem düzlemsel (iki boyutlu) hem de küresel (üç boyutlu bir kürenin yüzeyine çizilen) üçgenlerin kenar ve açılarının bulunmasına yarayan tüm bilinen teoremlerin esaslarından meydana geliyordu. Bu yapıtın yayımlanması trigonometrinin dönüm noktası oldu. Trigonometri artık sadece bir astronomi dalı değildi, geometrinin de önemli bir bileşeni haline gelmişti.

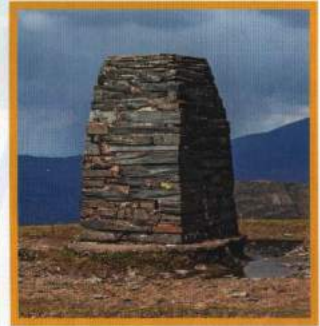
Trigonometri daha da ileriye götürülecekti, doğal ortamı geometri olmasına rağmen cebirsel denklemlerin çözümüne uygulanması gitgide yaygınlaşıyordu. Fransız matematikçi François Viète, İtalyan matematikçi Rafael Bombelli'nin 1572'de icat ettiği yeni sanal sayılar sistemi ile trigonometrik fonksiyonları cebirsel denklemlerin çözümünde bir arada kullanarak sonuç alınabildiğini gösterdi.

16. yüzyılın sonunda İtalyan doktor ve astronom Galileo Galilei, kütleçekim etkisi altında fırlatılan cisimlerin güzergâhlarını trigonometriden yardım alarak modelledi. Günümüzde bu denklemlerin aynıları uzaya fırlatılan roket ve füzelerin hareketlerini önceden hesap etmek için halen kullanılmaktadır. Yine 16. yüzyılda Hollandalı kartograf ve matematikçi Gemma Frisius uzaklık belirleme çalışmalarında trigonometri kullandı ve ilk hatasız haritaların çıkarılmasını olanaklı hale getirdi.

Yeni gelişmeler

Trigonometrideki gelişmeler 17. yüzyılda hız kazandı. İskoç matematikçi John Napier'ın 1614'te keşfettiği logaritmalar sayesinde hassas sinüs, kosinüs ve tanjant tablolarının derlenmesi mümkün oldu. 1722'de Fransız matematikçi Abraham de Moivre, Viète'den bir adım öteye giderek trigonometrik fonksiyonların karmaşık sayı analizinde nasıl kullanılabileceğini ortaya koydu. Bir gerçel bir de sanal kısımdan meydana gelen karmaşık sayılar, hem makine hem de elektrik mühendisliğinin geliştirilmesinde çok önemli rol oynayacaktı. Leonhard Euler, Moivre'ın bulgularını kullanarak "matematiğin en mükemmel denklemini" türetti: Euler denklemi olarak da anılan $e^{i\pi} + 1 = 0$.

18. yüzyılda Joseph Fourier, dalga ve titreşimlerin farklı biçimleri üzerine yürüttüğü araştırmalarda trigonometriyi uyguladı. "Fourier'nin trigonometrik serisi" ışık bilimi, elektromanyetizma ve daha yakın tarihte kuantum mekaniği gibi alanlarda yaygın olarak kullanıldı. Trigonometri, Babilliler ve Antik Mısırlıların yere dikili bir çubuğun düşürdüğü gölgelerin boylarını ölçüp biçtiği ilk dönemlerinden, mimari ve astronomiden modern uygulamalara varana kadar, evrenin modellenmesinde matematik dilinin bir parçası haline geldi. ■

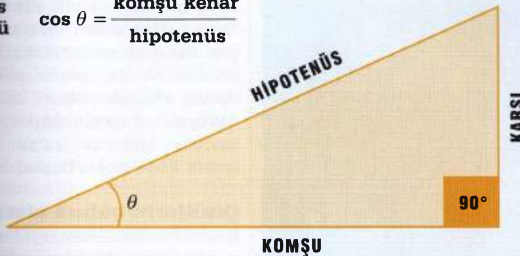


Galler'deki bu taş "nirengi noktası" gibi üçgenleme istasyonlarından oluşan bir ağ, Büyük Britanya'nın hassas bir haritasını çıkarmayı amaçlayan devlete bağlı İkmal Araştırmaları (Ordnance Survey) kurumunca 1936'da kullanıma sokuldu.

sinüs formülü $\sin\theta = \frac{\text{karşı kenar}}{\text{hipotenüs}}$

tanjant formülü $\tan\theta = \frac{\text{karşı kenar}}{\text{komşu kenar}}$

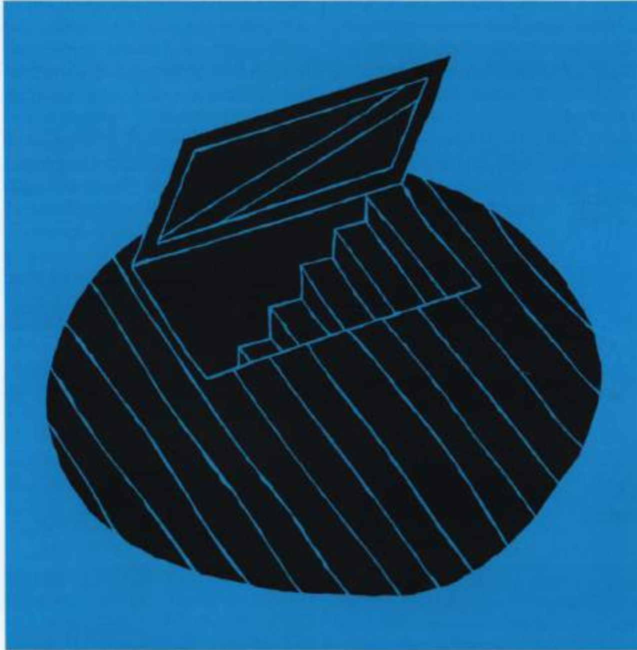
kosinüs formülü $\cos\theta = \frac{\text{komşu kenar}}{\text{hipotenüs}}$



Bilinmeyen açıyı (θ) bulmak için, bir dik üçgende, karşı kenar (θ açısının karşısındaki) ve hipotenüsün uzunlukları bilindiğinde sinüs formülü; komşu kenar ve hipotenüsün uzunlukları bilindiğinde kosinüs formülü; karşı kenar ve komşu kenarın uzunlukları bilindiğinde tanjant formülü kullanılır.

SAYILAR YOKTAN DAHA KÜÇÜK OLABİLİR

NEGATİF SAYILAR



KISACA

UYGARLIK
Antik Çin
(MÖ y. 1700 – MS 600)

ALAN
Sayı sistemleri

ÖNCE
MÖ y. 10.000 Çin'de bambu çubuklar, negatif sayılar dâhil olmak üzere sayıları simgelemek amacıyla ilk defa kullanılır

SONRA
MS 628 Hintli matematikçi Brahmagupta negatif sayılı aritmetiğe ilişkin kurallar sağlar.

1631 Thomas Harriott, ölümünden 10 yıl sonra yayımlanan *Practice of the Art of Analysis*'te (*Analiz Biliminin Pratiği*) cebirsel notasyona negatif sayıları alır.

Kadim dönemlerde, özellikle de Çin'de, negatif nicelikler pratik kavramlar olarak kullanılmasına rağmen, negatif sayıların matematikte kabul görmesi çok daha uzun sürdü. Antik Yunan düşünürleri ve sonraki pek çok Avrupalı matematikçi, negatif sayıları ve bir şeyin yoktan az olması fikrini abes buluyordu. Avrupalı matematikçiler negatif sayıları tümden kabul etmeye ancak 17. yüzyılda başladılar.

Çinlilerin çubuk sistemi

Negatif niceliklerle ilgili ilk kavramlar ticari muhasebede ortaya çıkmış gibi görünmektedir: Satıcı, satılan şey karşılığında para almış (pozitif bir nicelik), alıcıysa aynı miktarda ödeme yapmış ve sonuçta bir hesap açığı oluşmuştur. Kadim

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Sıfır 88–91 ▪ Cebir 92–99 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31

Çinlilerin çubuk sayı sisteminde pozitif sayılar kırmızıyla, negatif sayılar siyahla temsil edilir. Sayının olabildiğince net bir biçimde temsil edilebilmesi için yatay ve dikey simgeler almaşık düzenle kullanılır; örneğin 752 sayısında dikey bir 7, ardından yatay bir 5, peşinden de dikey bir 2 kullanılır. Boşluklar sıfırı temsil eder.

Pozitif	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dikey		𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Yatay		𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Negatif	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
Dikey		𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Yatay		𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Çin uygarlığı ticarette kullandıkları aritmetik için, büyük bir tabla üzerine dizilen küçük bambu çubuklarından yararlanıyorlardı. Pozitif ve negatif nicelikler farklı renklerdeki çubuklarla temsil ediliyor ve birbirlerine eklenebiliyordu. MÖ yaklaşık 500'de yaşayan Çinli asker strateji uzmanı Sun Tzu savaşlardan önce hesap yaparken bu tür çubuklardan yararlanıyordu.

MÖ 150'ye gelindiğinde çubuk sistemi gelişerek beşe kadar gruplardan oluşan yatay ve dikey almaşık çubuklara dönüştü. Daha sonra, Sui Hanedanlığı döneminde (MS 581-618) Çinliler pozitif nicelikler için üçgen, negatif nicelikler içinse dikdörtgen çubuklar kullandılar. Bu sistem, ticari ve vergi hesaplamalarında kullanılıyordu: gelen tutar kırmızı çubuklarla, borçlarsa siyah çubuklarla temsil ediliyordu. Birbirine eklenen farklı renklerdeki çubuklar birbirini götürüyordu (gelirin bir borcu silmesi gibi). Pozitif sayılarla (kırmızı çubuklar) negatif sayıların (siyah çubuklar) kutuplu oluşu, Çinlilerin, karşıt ama birbirini tamamlayan güçlerin evrene hükmettiği yönündeki görüşüyle (yin ve yang) de uyumluydu.

Oynak talih

MÖ 200 civarında başlayan birkaç yüzyıllık bir zaman zarfında Antik Çinliler, *The Nine Chapters on the Mathematical Art* (*Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Bölüm*) başlıklı bir derleme bilim kitabı çıkardılar. Matematik hakkında elerinde bulanan bilgilerin özünü barındıran bu yapıt, negatif sayıları mümkün olarak kabul eden algoritmaları (örneğin kâr zarar problemlerine çözüm olarak) içeriyordu.

Buna karşılık, Antik Yunan matematiği geometriye ve geomet-

Antik Çin'de matematik

Jiuzhang suanshu, yani *Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Bölüm*'de, Antik Çinlilerin bilgi sahibi olduğu matematiksel yöntemler ortaya konur. Derlenip toplanmış 246 uygulamalı problem ve bunların çözümleri, eserin içeriğini oluşturur

İlk beş bölüm ağırlıklı olarak geometri (alanlar, uzunluklar, hacimler) ve aritmetik (oranlar, karekökler, küpkökler) hakkındadır. Altıncı bölümde vergiler ele alınır ve büyük bölümü 16. yüzyıl civarına kadar Avrupa'da baş göstermeyen doğru, ters ve bileşik orantı kavramlarını içerir. Yedinci ve sekizinci bölümde, "çift yanlış konum" kuralı da (bir doğrusal denklemin çözümü için iki test [yani "yanlış"] değerinin gerçek sonucu vermek üzere tekrarlı adımlarla kullanıldığı kural) dahil olmak üzere doğrusal denklemlerin çözümleri işlenir. Son bölümse "Gougu"nun (Pisagor teoreminin muadili) uygulamalarıyla ve ikinci derece denklemlerin çözümüyle ilgilidir.



Celsius ölçeğinde yer alan sıcaklık değerlerinde, buz kristali gibi şeylerin 0°'den (suyun donma noktasından) soğuk olduğunu göstermek amacıyla negatif sayılar bulunur.

×	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
−4	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16
−3	12	9	6	3	0	−3	−6	−9	−12
−2	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8
−1	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
3	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12
4	−16	−12	−8	−4	0	4	8	12	16

Negatif bir sayıyla negatif bir sayı çarpıldığında sonuç pozitif olur. Tüm pozitif sayıların iki karekökü (bir pozitif bir de negatif) olmasının, negatif sayılarınsa gerçel karekökü olmamasının sebebi budur çünkü pozitif bir sayının karesi pozitiftir, negatif bir sayının karesi de pozitiftir.

Pozitif sayı
Negatif sayı

rik büyüklüklere veya bunların oranlarına dayanıyordu. Bu nicelikler (gerçek uzunluklar, alanlar ve hacimler) yalnızca pozitif olabileceğinden, negatif sayı düşüncesi Yunan matematikçilerin aklına yatmıyordu.

Diyofantus zamanında, MÖ 250 civarında, doğrusal ve ikinci derece denklemler problem çözümünde kullanılıyordu ancak bilinmeyen herhangi bir nicelik yine geometrik olarak (bir uzunlukla) temsil ediliyordu. Dolayısıyla bu denklemlerin çözümlerinin negatif sayı olması düşüncesi hâlâ abes bulunuyordu.

Yaklaşık 400 yıl sonra negatif sayıların aritmetikteki kullanımına ilişkin olarak büyük bir adım, Hindistan'da matematikçi Brahmagupta'nın (y. 598-668) araştırmalarıyla atıldı. Brahmagupta negatif nicelikler için aritmetik kuralları düzenledi, hatta bir simgeyle negatif sayıları ifade etti. Antik Çinliler gibi o da sayıları mali bağlamlarda "varlıklar" (pozitif) ve "borçlar" (negatif) olarak inceledi, bunlara ek olarak pozitif ve negatif sayılarla yapılan çarpma işlemlerine ilişkin aşağıdaki kuralları belirledi:

İki varlığın çarpımı varlık eder. İki borcun çarpımı varlık eder. Bir borçla bir varlığın çarpımı borç eder. Bir varlıkla bir borcun çarpımı borç eder.

İki madeni para yığınının çarpımını bulmak hiçbir anlam ifade etmez çünkü paranın kendisi değil, yalnızca gerçek nicelikler çarpılabilir (tıpkı elmaları elmalarla çarpamayacağımız gibi). Dolayısıyla Brahmagupta pozitif ve negatif sayılarla aritmetik yapıyor, negatif sayıların neyi temsil ettiğini anlamak için de varlıkları ve borçları kullanıyordu. Kuramları, özellikle de cebir üzerine kuramları, ileride Avrupalı matematikçileri etkisi altında bırakacak İranlı matematikçi ve şair El-Hârizmî (y. 750-y. 850), Brahmagupta'nın kurallarına aşinaydı ve negatif sayıların borçların ele alınışındaki kullanımını kavramıştı. Anlamsız bulduğu negatif sayıların cebirde kullanılmasını kabul edemedi gerçi. Bunun yerine doğrusal veya ikinci derece denklemlerin çözümünde geometrik yöntemleri uyguladı.

Negatifin kabul edilmesi

Avrupalı matematikçiler ortaçağ boyunca sayı olarak negatif nicelikler konusunda kararsız kaldılar. Çok yönlü İtalyan bilgin Gerolamo Cardano'nun doğrusal, ikinci derece ve üçüncü derece denklemlerin çözümünü anlattığı *Ars Magna* (*Büyük Sanat*) eserini yayımladığı 1545 yılında da durum böyleydi. Cardano, denklemlerinin negatif çözümlerini hesaba katmadan edemedi, hatta bir negatif sayıyı simgelemek için bir işareti ("m") kullandı. Ne var ki "kurmaca" olarak nitelediği negatif sayıların değerini kabul edemedi. Denklemlerin çözümlerinde negatif nicelikleri René Descartes (1596-1650) da kabul ediyor ama onları gerçel sayılar saymayıp "yanlış kökler" olarak adlandırıyordu

İngiliz matematikçi John Wallis (1616-1703) sayı doğrusunu sıfırın

"
Negatif sayılar tutarsızlığın veya abesliğin delilidir.
Augustus De Morgan
İngiliz matematikçi
"

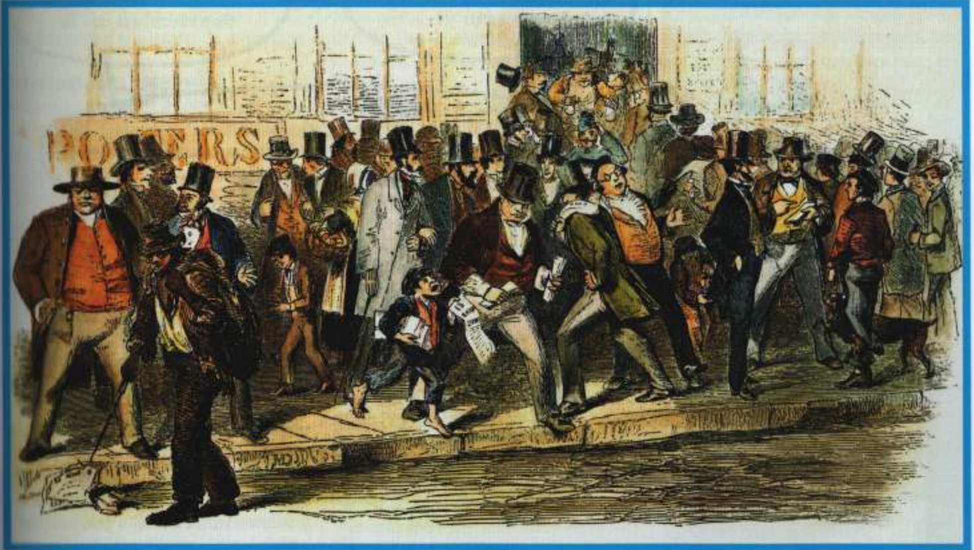
altına uzatarak negatif sayılara bir miktar anlam kazandırdı. Sayılara bir doğru üzerindeki noktalar açısından bakmak sonuç olarak negatif sayıların pozitif sayılarla başa baş bir şekilde kabul görmesinin önünü açtı ve 19. yüzyılın sonuna gelindiğinde negatif sayılar matematikte nicelik kavramlarından ayrı tutularak resmen bir tanıma kavuşmuştu. Günümüzde negatif sayılar bankacılık ve sıcaklık ölçeğinden atomaltı parçacıkların yüklerine kadar birçok alanda kullanılmakta. Matematikteki yerleri hakkındaki belirsizliklerinin tamamı uzun zaman önce giderildi. ■

15. yüzyıl Avrupa'sında, artı ve eksi için p ve m harfleri kullanılır.

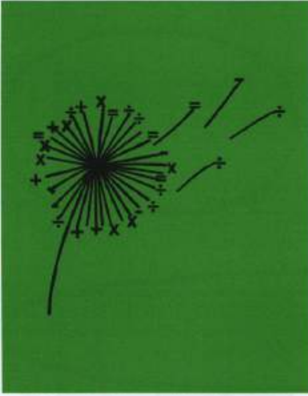
→ + ve – işaretleri **16. yüzyılda** kullanıma girer.

→ Ama **negatif sayılar** abes bulunup **muhalefet** ve **şüpheyle** karşılanır.

→ Negatif sayıların **Avrupa'da kabul görmesi**, ilk defa bir **sayı doğrusuna** yerleştirildikleri 17. yüzyılı bulmuştur.



Yıl 1857, yatırımcılar New York'taki Seamen's Savings bankasından paralarını çekiyor. Paniğin sebebi, Amerikan bankalarının milyonlarca dolar krediyi (negatif bir nicelik) bu tutarı destekleyecek rezervleri (pozitif bir nicelik) olmamasına rağmen vermesiydi.



ARİTMETİĞİN EN GÜZİDESİ

DİYOFANTUS DENKLEMLERİ

KISACA

KİŞİ
Diyofantus (MS y. 200-y. 284)

ALAN
Cebir

ÖNCE
MÖ y. 800 Hintli bilgin Baudhayana bazı "Diyofantus" denklemlerinin çözümlerine ulaşır.

SONRA
y. 1600 François Viète, Diyofantus denklemlerinin çözümleri için zemin hazırlar.

1657 Pierre de Fermat, kendisinin *Arithmetica* nüshasına son teoremini (bir Diyofantus denklemi üzerine) yazar.

1900 David Hilbert'in çözülmemiş araştırma problemleri listesindeki 10. problem, tüm Diyofantus denklemlerini çözecek bir algoritma bulma arayışı içine girilmesine yol açar.

1970 Rusya'daki matematikçiler tüm Diyofantus denklemlerini çözebilecek bir algoritma olmadığını gösterir.

Diyofantus ikiden fazla bilinmeyen nicelik içeren ve çözümleri yalnızca tamsayı veya rasyonel sayı olan denklemleri çözmeye çalıştı.

Bu tür denklemler günümüzde **Diyofantus denklemleri** olarak bilinir.

Bazılarının çözümleri basit olsa da **büyük çoğunluğunun** ya **çok sayıda çözümü vardır** ya da hiç yoktur.

Diyofantus denklemleri **matematikçilerde hiç dinmeyecek bir merakı** uyandırdı.

MS. 3. yüzyılda, sayı kuramı ve aritmetiğin öncülerinden Yunan matematikçi Diyofantus, *Arithmetica* adlı olağanüstü bir yapıta hayat verdi. Yalnızca altısı günümüze ulaşan 13 ciltte denklemlerle ilgili 130 problemi inceledi, ayrıca bilinmeyen bir nicelik için simge kullanan ilk kişi olarak cebir için bir köşe taşını döşedi. Matematikçiler Diyofantus denklemleri olarak bilinen denklemleri yalnızca son 100 yıl içerisinde bütünüyle keşfedebildi. Günümüzde bu denklemler, sayı kuramının en ilginç alanlarından biri sayılmakta.

Diyofantus denklemleri bir polinom ($x^3 + y^4 = z^5$ gibi, değişkenlerin [bilinmeyen niceliklerin] üsleri tamsayı olan bir denklem) çeşididir. Diyofantus denklemlerindeki amaç tüm değişkenleri bulmaktır ancak çözümler tamsayı ya da rasyonel sayı ($^8/_3$ gibi, bir tamsayının başka bir tamsayıya bölündüğü bir kesir şeklinde ifade edilebilen bir sayı) olmalıdır. Diyofan-

Ayrıca bkz. Rhind papirüsü 32–33 ▪ Pisagor 36–43 ▪ Hypatia 82 ▪ Eşittir işareti ve diğer simgesel ifadeler 126–27 ▪ 20. yüzyıl için 23 problem 266–67 ▪ Turing makinesi 284–89 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23

> Diyofantus'un ilk defa tanıttığı simge sistemi, denklemler için kısa ve kolay anlaşılır bir ifade aracı sağladı.
>
> **Kurt Vogel**
> **Alman matematik tarihçisi**

tus denklemlerinde katsayılar da (4x'teki 4 gibi, bir değişkenin tamsayı çarpanları) rasyonel sayıdır. Diyofantus yalnızca pozitif sayıları kullanıyordu ancak matematikçiler günümüzde negatif çözümleri de aramakta.

Çözümlerin peşinde

Şu anda Diyofantus denklemleri olarak bilinen problemlerin çoğu, Diyofantus'un devrinden çok önceleri biliniyordu. Shulba Sutras metinlerinde, Hindistan'daki matematikçilerin bunların bazılarını MÖ 800 yakınlarında ve daha öncesinde incelemiş olduğu açığa vurulur. MÖ 6. yüzyılda Pisagor, dik üçgenin kenarlarını hesaplamaya yönelik ikinci derece denklemini oluşturdu; $x^2 + y^2 = z^2$ biçimindeki bu denklem bir Diyofantus denklemidir.

$x^n + y^n = z^n$ tipindeki Diyofantus denklemlerini hesaplamak kolay gözükebilir ancak bunların yalnızca kare içerenleri çözülebilirdir. Üs (denklemdeki n) 2'den büyükse denklemin x, y ve z için tamsayı çözümü yoktur; 1657'de Fermat bir kitabın sayfasına aldığı notta bunu belirtmiş, son olarak da İngiliz matematikçi Andrew Wiles 1994'de ispatlamıştır.



Modern cebrin geliştirilmesiyle, Diyofantus'un Arithmetica'sının 17. yüzyıl matematikçileri üzerindeki etkisi büyük oldu. Kitabın bu cildi 1621'de Latincede yayımlandı.

Bir büyük merak konusu

Diyofantus denklemleri sayı ve biçim bakımından çok çeşitlidir ve çözümleri genellikle çok zordur. 1900'de David Hilbert, bunların tamamının çözülüp çözülemeyeceği sorusunun matematikçilerin önündeki en büyük engellerden biri olduğunu iddia etti.

Denklemler günümüzde üç sınıfa ayrılır: çözümü olmayanlar, sonlu sayıda çözümü olanlar ve sonsuz sayıda çözümü olanlar. Gelgelelim matematikçiler çözümleri bulmaktansa genellikle çözümlerin var olup olmadığını keşfetmekle ilgilenirler. 1970'te Rus matematikçi Yuri Matiyasevich, Hilbert'in ortaya attığı sorunun yanıtını buldu. Matiyasevich diğer üç kişiyle birlikte soruya yıllarca çalıştıktan sonra Diyofantus denklemini çözebilecek genel bir algoritma olmadığına karar verdi. Yine de, bu denklemlerin uyandırdığı merak, büyük oranda kuramsal olduğundan araştırmalar devam etmekte. Çalışmalarını merakla yürüten matematikçiler henüz her şeyin keşfedilmediğine inanıyorlar. ▪

Diyofantus

Yunan matematikçi ve filozof Diyofantus'un hayatı hakkında elimizde fazla bilgi yok. Muhtemelen MS y. 200'de Mısır'ın İskenderiye şehrinde doğdu. 13 ciltlik *Arithmetica*'sı olumlu tepki aldıysa da (İskenderiyeli matematikçi Hypatia ilk altı cilt hakkında bir yazı yazmıştı) fikirlerinin hayata döndüğü 16. yüzyıla kadar gözden düşmüş durumdaydı.

MS 500 tarihli *Greek Anthology*'de [*Yunan Antolojisi*] derlenen matematik oyunları ve şiirlerin arasında, Diyofantus'un mezartaşında yazdığı varsayılan bir sayı problemi de yer alır. Bilmece şeklinde yazılan yazıya göre Diyofantus 35 yaşında evlenmiş, beş yıl sonra bir oğlu olmuş ve bu oğlu, yaşı babasının yarısıyken, 40 yaşında ölmüştür. Diyofantus'un dört yıl daha yaşadığı ve dolayısıyla 84 yaşında öldüğü söylenir.

Önemli eseri

MS y. 250 *Arithmetica*



BİLGELİK SEMALARINDA EMSALSİZ BİR YILDIZ

HYPATIA

KISACA

KİŞİ
İskenderiyeli Hypatia
(MS y. 355-415)

ALANLAR
Aritmetik, geometri

ÖNCE
MÖ 6. yüzyıl Pisagor'un karısı Theano ve daha başka kadınlar Pisagorcu topluluğa katılır ve etkin olurlar.

MÖ y. 100 Matematikçi ve astronom Tesalyalı Aglaonike, ay tutulmalarını tahmin etme yeteneğiyle ün kazanır.

SONRA
1748 İtalyan matematikçi Maria Agnesi türev ve integral hesabının anlatıldığı ilk ders kitabını yazar.

1874 Rus matematikçi Sofia Kovalevskaya matematik doktora diploması alan ilk kadın olur.

2014 İranlı matematikçi Meryem Mirzakhani, Fields Madalyasını kazanan ilk kadın olur.

Kadim dünyada öncü konumuna erişmiş yalnızca birkaç kadın matematikçinin adı tarihte geçer. İskenderiyeli Hypatia bu kadınlardandır. MS 400 yılında, ilham verici bir öğretmen olarak şehirdeki Platoncu okulun başına getirilmiştir.

Hypatia'nın bilinen bir özgün araştırması yoksa da çeşitli klasik matematik, astronomi ve felsefe metinlerini yayıma hazırladığı ve yorumladığı bilinir. İskenderiyeli saygın bir bilgin olan babası Theon'a eserlerinin üretiminde muhtemelen yardımcı oldu; bu eserler, Öklit'in yazdığı Öğeler'in babasının düzelttiği nihai baskısı ve Ptolemaios'un *Almagest* ve *Handy Tables*'a (*Kullanışlı Tablolar*) dair yorum kitaplarıydı. Ayrıca, babasının klasik metinleri koruma ve kapsamlarını genişletme projesini, özellikle Diyofantus'un 13 ciltlik *Arithmetica*'sı ve Apollonius'un koni kesitleri hakkındaki yapıtı üzerine yorumlar yazarak devam ettirdi. Hypatia bu basımları çocuklara yönelik ders kitapları olarak tasarlamış olabilirdi çünkü açıklayıcı yorumlar sunmuş ve bazı kavramları daha da geliştirmişti.



Julius Kronberg'in 1889 tarihli tablosunda resmettiği İskenderiyeli bilgin Hypatia, öldürüldükten sonra kahraman bir şehit olarak itibar gördü. Sonraları feministlerin bir simgesi haline geldi.

Hypatia öğretmenliği, bilimsel bilgi birikimi ve aklıyla büyük ün yapmıştı ama "pagan" felsefesi nedeniyle 415'te yobaz Hıristiyanlar tarafından öldürüldü. Akademide kadınlara gösterilen hoşgörünün azalmasıyla birlikte, matematik ve astronomi neredeyse sadece erkeklere ayrılmış bilim dalları olarak kalacak ve Aydınlanma Çağı sayesinde 18. yüzyılda kadınlara yeni fırsatlar doğana dek bu durum sürecekti. ■

Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Koni kesitleri 68–69 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Emmy Noether ve soyut cebir 280–81



SON BİNYILIN EN YAKIN Pİ YAKLAŞIMI

ZU CHONGZHI

KISACA

KİŞİ
Zu Chongzhi (MS 429-501)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ y. 1650 Rhind papirüsünde dairenin alanı π, $(16/9)^2 \approx 3{,}1605$ alınarak hesaplanır.

MÖ y. 250 Arşimet bir çokgen algoritması yöntemiyle π'nin bir yaklaşık değerini bulur.

SONRA
y. 1500 Hintli astronom Nilakantha Somayaji π'yi hesaplamak için sonsuz bir seriyi ($1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$ gibi sonsuz bir dizinin terimlerinin toplamı) kullanır.

1665–66 Isaac Newton π'yi 15 basamağıyla hesaplar.

1975–76 Yinelemeli algoritmalar, π'nin bilgisayarla milyonlarca basamağa kadar hesaplanmasını olanaklı kılar.

Yunanistan'daki meslektaşları gibi Antik Çin'deki matematikçiler de π'nin (pi: bir çemberin çevresinin çapına oranı) geometri ve diğer hesaplamalardaki öneminin farkına vardılar. 1. yüzyıldan itibaren π için çeşitli değerler ortaya atılmıştı. Bunların kimisi uygulamada kullanmak için yeterince yakın değerlerdi ama birçok Çinli matematikçi π'yi saptamak adına daha hassas yöntemler araştırdılar. 3. yüzyılda Liu Hui işe Arşimet'in yönteminin aynısını kullanarak, yani bir çemberin içine ve dışına kenar sayıları gitgide artan düzgün çokgenler çizerek yaklaştı. π'yi 96 kenarlı bir çokgenle hesapladığında 3,14 değerini buldu ve kenar sayısını 3072'ye varana dek ikiyle çarpa çarpa 3,1416 değerine ulaştı.

Daha yüksek hassasiyet

Özenli hesaplamalarıyla tanınan astronom ve matematikçi Zu Chongzhi 5. yüzyılda π için daha da hassas bir değer bulmaya koyuldu. 12.288 kenarlı bir çokgenle π'nin 3,1415926 ile 3,1415927 arasında olduğunu hesapladı ve oranı ifade edecek iki kesir önerisinde bulundu: bir süredir kullanılmakta olan $22/7$ (*Yuelü*, yani yaklaşık oran) ve kendi hesaplaması olan $355/113$ (*Milü*, yakın oran). Bu daha sonra "Zu oranı" adıyla ünlendi. Zu'nun π'ye yönelik hesaplamalarını geçmek ancak Avrupalı matematikçilerin aynı göreve soyunduğu neredeyse binyıl sonraki Rönesans döneminde mümkün oldu. ■

> Zu Chongzhi'nin bir ilkçağ dâhisi olduğunu düşünmemek elde değil.
> **Takebe Katahiro**
> **Japon matematikçi**

Ayrıca bkz. Rhind papirüsü 32–33 ▪ İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Euler denklemi 197 ▪ Buffon'un iğne deneyi 202–03

ORTAÇA

500–1500

AĞ

Hintli matematikçi Brahmagupta **sıfırın rolünü ve kullanımını belirler**, negatif nicelikleri "borç" kavramıyla tanımlar.



MS y. 628

8. YÜZYIL



İslamiyetin Hindistan'ın bazı kesimlerine yayılmasıyla **Hintli matematikçiler bilgilerini** Arap bilginlerle paylaşırlar.

Bağdat'ta **Beytülhikme'nin** kurulmasıyla İslam/Arap dünyasında **fikirlerin paylaşılması ve geliştirilmesi** kolaylaşır.



8. YÜZYIL SONLARI

y. 820



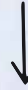
El-Hârizmî **cebir hakkındaki kitabını** yazarak günümüzde önemini halen koruyan denklemleri çözmeye yarayan çok sayıda yöntemi tanıtır.

El-Hârizmî ve el-Kindî, günümüzde kullandığımız **modern "Arap"** sayılarının habercisi niteliğindeki **Hint sayılarının kullanımını** açıklar.



y. 825-830

y. 930



Üç yüzyıl sonra **Fibonacci'nin en önemli esin kaynaklarından** olacak *The Book of Algebra*'nın [*Cebir Kitabı*] yazarı Ebu Kamil Şuca'nın ölümü.

Roma İmparatorluğunun çöküp Avrupa'nın ortaçağa girmesiyle, bilim ve matematik araştırmaları Doğu Akdeniz'den Çin'e ve Hindistan'a kaydı. MS 5. yüzyıl civarından itibaren Hindistanlılar, matematikte bir "Altın Çağ" başlatarak hem köklü bilimsel araştırma geleneklerine hem de Yunanların getirdiği fikirlere eklemeler yaparak geliştirdiler. Hintli matematikçiler geometri ve trigonometri alanlarında, astronomi, denizcilik ve mühendislikte pratik uygulamaları olan kayda değer ilerlemeler sağladılar, ama bütün bunlara rağmen kapsamı en geniş yenilik, sıfır sayısını temsil edecek bir karakterin geliştirilmesiydi.

Sıfırı simgeleyecek belirli bir simgenin (boşluk veya yer tutucu yerine basit bir daire) kullanılması fikri, sıfırın hesaplamalardaki kullanımına açıklık getiren parlak matematikçi Brahmagupta'nın bulduğu bilinir. Doğrusu, söz konusu karakter bir süredir kullanılıyor olabilirdi. Kullandığımız modern Hint-Arap rakamlarının ilk örneği olan Hindistan'ın sayı sistemine de gayet uygun olurdu. Bununla beraber, Hindistan'ın Altın Çağına ait bu ve diğer kavramların matematik tarihinde iz bırakması, İslamiyet sayesinde mümkün oldu.

İranlı Bilim Devi

Muhammed Peygamber'in 632'deki ölümünün ardından İslamiyet, Ortadoğu'da büyük bir siyasi ve dini güç haline geldi ve Arabistan'dan İran'ın geneline, oradan da Hint yarımadasına varana dek Asya'nın içlerine kadar yayıldı. Bu yeni dinde felsefe ve bilimsel araştırma el üstünde tutuluyor, Bağdat'ta kurulan öğrenim ve araştırma merkezi Beytülhikme, İslam İmparatorluğunun dört bir yanındaki bilginleri cezbediyordu.

Bu bilgi açlığı Yunan filozof ve matematikçilerinkiler başta olmak üzere kadim metinlerin incelenmesine sebep oldu. İslami bilginler Antik Yunan metinlerini muhafaza etmekle ve çevirmekle kalmayıp üzerlerine yorumlar yazdılar ve kendilerine ait özgün kavramlar geliştirdiler. Yeni fikirlere açık olmaları sayesinde, başta sayı sistemleri olmak üzere Hint yeniliklerinin birçoğunu benimsediler. Hindistan gibi İslam dünyası da bilimde, 14. yüzyıla dek süren bir "Altın Çağa" girdi ve ardı ardına önemli mate-

Denklemleri geometrik şekillere gerek kalmadan çözmeyi mümkün kılan **binom teoremi** el-Kereci tarafından tasarlanır.



y. 1020

y. 1070



Ömer Hayyam **üçüncü derece denklemleri sınıflamaya ve çözmeye** yönelik bir yöntem geliştirir.

Chesterlı Robert, **el-Hârizmî'nin eserini** Latinceye çevirir.



1145

1202



Fibonacci'nin *Liber Abaci*'si, **Hint-Arap rakam sistemi** ve kendisinin ünlü dizisi de dâhil olmak üzere, Arap dünyasına ait çok sayıda kavramı tanıtır.

Tarihçi İbn-i Hallikân **"satranç tahtasındaki buğday"** problemine **ilk defa yazılı olarak değinen** kişi olur.



1256

14. YÜZYIL



Merton Kolejindeki **Oxford Hesaplamacıları**, Oxford Üniversitesini **Batı matematiğinde önemli bir konuma** getirir.

Yazarı bilinmeyen *Treviso Arithmetic* (*Treviso Aritmetiği*) adlı kitap, Avrupa'daki ilk basılı matematik ders kitabı olur.



1478

matikçiler çıkardı. Bunların arasında, cebrin ("cebir" sözcüğü Arapçadaki "yeniden birleştirme" ifadesinden gelir) geliştirilmesinde önemli rolü olan el-Hârizmî'nin yanı sıra binom kuramı ve ikinci ve ikinci derece denklemlerin ele alınışına çığır açıcı katkılarda bulunan diğer bilginler yer alıyordu.

Doğudan Batıya

Avrupa'da matematik araştırmaları Kilisenin denetimindeydi ve Öklit'in bazı eserlerinin birkaç eski çevirisiyle sınırlıydı. Roma sayı sisteminin kullanımına devam edilmesi ilerlemenin önüne geçti ve hesaplamalarda abaküs kullanılmasını gerektirdi. Ne var ki 12. yüzyıldan başlayarak, Haçlı Seferleri sürecinde İslam dünyasıyla temas arttı ve İslami bilginlerin zengin bilimsel bilgi birikiminin farkına varıldı. Artık Hıristiyan bilginler Yunan ve Hintlilerin felsefe ve matematik metinlerine, ayrıca İslami bilginlerin çalışmalarına erişmeleri mümkündü. El-Hârizmî'nin cebir üzerine bilimsel eseri 12. yüzyılda Chesterlı Robert tarafından Latinceye çevrildi, kısa bir süre sonra da Öklit'in *Öğeler*'inin ve diğer önemli metinlerin eksiksiz çevirileri Avrupa'da belirmeye başladı.

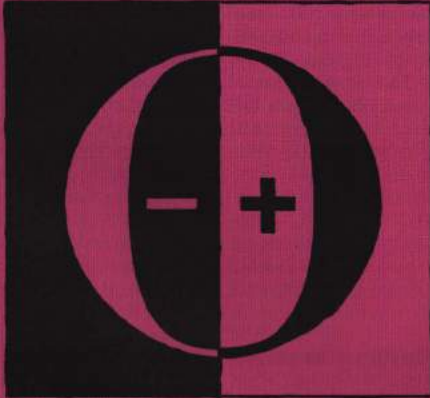
Matematik Rönesansı

İtalya'daki şehir devletleri vakit harcamadan İslam İmparatorluğuyla ticarete başladı ve matematiğin Batıda yeniden canlanmasına önayak olan kişi, Fibonacci lakaplı İtalyan Pisalı Leonardo oldu. Leonardo, Hint-Arap rakam sistemini ve cebirde simgelerin kullanılmasını benimsedi, Fibonacci aritmetik dizisi gibi pek çok özgün kavramla katkı yaptı.

Ortaçağın ilerleyen dönemlerinde ticaretin büyümesiyle matematiğin, özellikle de aritmetik ve cebir alanlarının önemi gitgide arttı. Astronomideki atılımlar da karmaşık hesaplamaları gerektiriyordu. Matematik eğitimi artık daha çok ciddiye alınıyordu. 15. yüzyıldaki hareketli matbaa icadı sayesinde *Treviso Aritmetiği* de dahil her çeşit kitap geniş kitlelerin kullanımına sunulmuş oldu ve yeni keşfedilmiş bilgiler Avrupa'ya yayıldı. Bu kitaplar Rönesans olarak bilinen kültürel yeniden doğuşa eşlik edecek "Bilim Devrimini" doğurdu. ■

SIFIRDAN VARLIK ÇIKARILINCA FARK OLARAK BORÇ ELDE EDİLİR

SIFIR



KISACA

KİŞİ
Brahmagupta
(MS y. 598-668)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MÖ y. 700 Bir yazıcı, Babillilere ait bir kil tablette yer tutucu bir sıfırı üç kancayla simgeler; bu sonraları iki adet eğik kama işaretiyle yazılır.

MÖ 36 Orta Amerika'da bir Maya steli (taş plak) üzerine kabuk şekliyle bir sıfır yazılıdır.

MS y. 300 Babilliler konumsal sayıları geliştirirler.

SONRA
1202 Pisalı Leonardo (Fibonacci) *Liber Abaci* kitabında Avrupalılara sıfırı tanıtır.

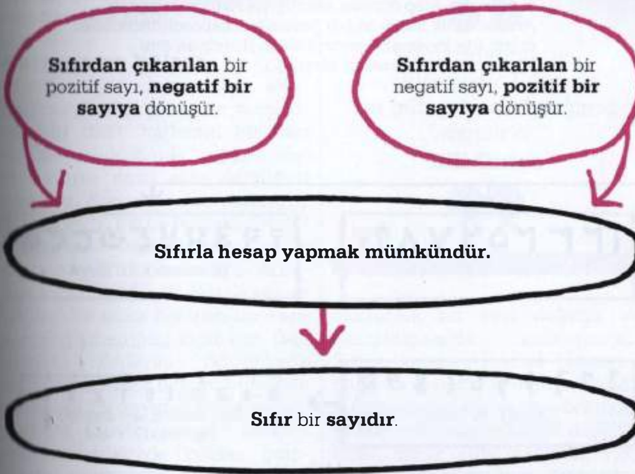
17. yüzyıl Sayı olarak sıfır nihayet yerleşik hale gelmiş ve yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bir şeyin eksikliğini simgeleyen bir sayı, çetin bir kavramdır; sıfırın geniş çevrelerce kabul görmesinin bu kadar uzun sürmesi bu yüzden olabilir. Babilliler ve Sümerler dahil pek çok kadim uygarlık sıfırı icat ettiklerini iddia ediyorlardı belki, ama sıfırı bir sayı olarak ilk defa kullanan, Hintli matematikçi Brahmagupta'ydı.

Sıfırın geliştirilmesi

Basamak değerli sistemlerde (konumsal sistemlere) "burada hiçbir şey yok" ifadesinin bir araç vasıtasıyla simgelenmesi gerekir. Örneğin en başta, mesela 35'le 305'i birbirinden ayırmak için bağ-

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ İkili sayı sistemi 176–77 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Karmaşık düzlem 214–15



lama bakan Babilliler (MÖ 1894-1539) en sonunda, boş değeri belirtmek amacıyla ters virgüllere benzeyen bir çift kama kullandılar. Böylelikle sıfır, dünyaya noktalama işareti biçiminde gelmiş oldu.

Tarihçilerin sorunu, ilk uygarlıkların sıfırı kullandığına ilişkin delilleri bulmak ve bunları delil kabul etmek olmuştur. Sıfırın zaman içinde kullanıma girip çıkması durumu daha da güçleştirmiştir. Örneğin MÖ y. 300'de Yunanlar, niceliklerin çizgi uzunluklarıyla temsil edildiği, geometriye dayalı daha karmaşık bir matematik geliştirmeye başlıyorlardı. Yunanların konumsal bir sayı sistemi olmadığından (uzunlukların var olmaması veya negatif olması mümkün değildir), sıfıra, hatta negatif sayılara (0'dan küçük sayılara) ihtiyaç yoktu.

Yunanlar, matematiği astronomide kullanılacak düzeyde geliştirdiklerinde nedeni belli olmasa da sıfırı simgelemesi için "O" kullanmaya başladılar. Greko-Romen bilgin Ptolemaios, 2. yüzyılda yazdığı astronomi kitapçığı Almagest'te, yuvarlak bir simgeyi, farklı basamaklarında ve sonlarında kullanıyor ama başlı başına bir sayı olarak görmüyordu. MS 1. binyılda Orta Amerika'da Mayalar, sıfırı bir kabuk şekliyle sayı olarak dahil ettikleri bir basamak değerli sistemi kullanıyorlardı. Mayaların aritmetikte kullandığı üç şekilden biriydi bu; diğer iki simge, 1'i temsil eden bir nokta ve 5 için bir çubuktu. Mayalar, sonucu yüz milyonlara varan hesaplamalar yapabiliyorlardı ancak coğrafi olarak kopuk durumda olmaları matematiklerinin başka kültürlere hiçbir zaman yayılmaması anlamına geliyordu.

Hindistan'da MS 1. binyılın ilk yüzyıllarında matematikte hızlı bir ilerleme sağlandı. 3. ve 4. yüzyıllara gelindiğinde bir basamak



Yunanlar, üzeri kumla kaplı ve bir masa veya tabla şeklindeki abax'ı sayı saymak için kullanıyorlardı. Bir sayıcı kaldırıldığında ortaya çıkan şekil olması nedeniyle "O"yu kullanmaya başladıkları bazı bilginlerce öne sürülmüştür.

Brahmagupta

MS 598'de dünyaya gelen astronom ve matematikçi Brahmagupta, Kuzeydoğu Hindistan'daki, kendi alanlarının bilim merkezi olan Bhillamala'da yaşadı. Ujjain'deki öncü astronomik gözlemevinin başına geçti, ayrıca sayı kuramı ve cebirdeki yeni çalışmalarını astronomi araştırmalarına dahil etti.

Brahmagupta'nın ondalık sayı sistemini kullanışı ve tasarladığı algoritmalar tüm dünyaya yayıldı ve sonraki matematikçilerin çalışmalarına dayanak oluşturdu. "Varlıklar" ve "borçlar" olarak adlandırdığı pozitif ve negatif sayılarla hesap yapmaya yönelik kuralları halen günümüzde alıntılanır. Brahmagupta ikinci kitabını tamamladıktan sadece birkaç yıl sonra, 668'de hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

628 *Brahmasphutasiddhanta (Doğru Kurulmuş Şekilde Brahma Öğretisi)*
665 *Khandakhadyaka (Yemek Lokması*

Hindistan, MS 1. yüzyıl

Hindistan, 9. yüzyıl

Müslüman İspanya, y. 11. yüzyıl

Arabistan, y. 11. yüzyıl

Hindistan, y. 11. yüzyıl

Avrupa, 15. Yüzyıl

Avrupa, 16. Yüzyıl

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

John Wallis'in sayı doğrusu, İngiltere, 17. Yüzyıl

Birinci yüzyıl Hint sayılarında sıfır yoktu. 9. yüzyıla gelindiğinde Brahmagupta'nın sıfırı (pembeyle vurgulanmıştır) Hindistan'da yaygın olarak kullanılıyordu, buradan da Arap dünyası aracılığıyla Avrupa'ya yayıldı. Avrupa'da ilk başta, hiçliği Şeytan'la ilişkilendirdiklerinden dolayı sıfır kavramını şeytani bulan Hıristiyan dini liderlerinin muhalefetiyle karşılaştı.

Nadi Yali yantrası Hindistan'ın Ujjain şehrinde bulunan 18. yüzyıldan kalma bir gözlemevinin bir parçasıdır. Brahmagupta'nın orada çalıştığı 7. yüzyıldan beri matematik ve astronomi merkezi olan gözlemevindeki eski bir sıfır meridyeniyle yengeç dönencesinin kesişim noktasında yer alır.

değerli sistem uzun zamandır kullanılmaktaydı, Brahmagupta'nın dönemi olan 7. yüzyıla gelindiğindeyse yuvarlak bir simgenin yer tutucu olarak kullanımı çoktandır oturmuş durumdaydı.

Sayı olarak sıfır

Brahmagupta sıfırla hesap yapmanın kurallarını belirledi. İlk olarak sıfırı, bir sayı kendisinden çıkarıldığında elde edilen sonuç olarak tanımladı (örneğin $3 - 3 = 0$). Böylece sıfır basit bir simgesel notasyon ya da yer tutucunun aksine başlı başına bir sayı olarak belirlenmiş oldu. Brahmagupta daha sonra sıfırla hesap yapmanın etkisini mercek altına aldı. Negatif bir sayıya sıfırı eklediğinde sonucun o negatif sayıya eşit olduğunu gösterdi. Benzer şekilde, pozitif bir sayıya sıfır eklenince de aynı pozitif sayı ortaya çıkıyordu. Brahmagupta negatif ve pozitif sayılardan sıfırın çıkarıldığı durumları da açıkladı ve sayıların yine değişmediği notunu düştü.

Brahmagupta daha sonra, sayıları sıfırdan çıkarmanın etkisini açıkladı. Sıfırdan çıkarılan pozitif bir sayının negatif bir sayıya dönüştüğünü, sıfırdan çıkarılan negatif bir sayınınsa pozitif bir sayıya dönüştüğünü hesapladı.

Bu hesaplama sayesinde, negatif sayılar pozitif sayılarla aynı sayı

> Kara delikler Tanrı'nın sıfıra bölme işlemi yaptığı yerlerdir.
>
> **Steven Wright**
> **Amerikalı komedyen**

sistemine girmiş oldu. Sıfır gibi negatif sayılar da uzunluk veya nicelik gibi pozitif değerler değil soyut bir kavramdı.

Çarpma ve bölme

Brahmagupta daha sonra sıfırı çarpmayla ilişkili olarak inceledi ve sıfır dahil herhangi bir sayı sıfırla çarpıldığında, çarpım olarak sıfırın nasıl elde edildiğini açıkladı. Sonraki adım daha güç bir görevdi: sıfıra bölme işlemini açıklamak. Brahmagupta bir *n* sayısının sıfıra bölündüğü işleminin sonucunu $n/0$ ifadesiyle yazıya geçirdi ve sıfıra bölünen bir sayının değişmediğini iddia etti. Gelgelelim ilerleyen dönemlerde bunun imkânsız olduğu anlaşıldı; herhangi bir sayının sıfırla çarpılmasıyla bu açıkça gösterilebilir (tanımı itibariyle bölme, çarpmada eksik olan sayıyı bulma işlemidir). Sonuç başlangıçtaki sayı olamaz çünkü herhangi bir sayı sıfırla çarpıldığında sonuç sıfırdır.

Günümüzde matematikçiler sıfıra bölme işlemini "tanımsız" olarak nitelendiriyorlar. $n/0$ için gerekli yanıtın "sonsuzluk" olduğunu önerenler de olmuştur ancak sonsuzluk bir sayı değildir ve hesaplamalarda kullanılamaz. Sıfırın kendisini sıfıra bölmenin daha da çetrefilli olduğu anlaşıldı. Sıfır herhangi bir sayıya bölündüğünde sıfır elde edildiği düşünülürse, sonuç sıfır olabilirdi. Herhangi bir sayının kendisine bölünmesi 1 sonucunu vereceğinden 1 de olabilirdi.

> Sıfır, bildiğimiz en sihirli sayıdır. Uğrunda her gün çaba sarfettiğimiz sayıdır o.
> **Bill Gates**

8. yüzyılda İslamiyetin Hindistan'ın çeşitli kesimlerine yayılması Hintli matematikçilerin, sıfır kavramı da dahil olmak üzere, bilgilerini Arap dünyası bilginleriyle paylaşmasını beraberinde getirdi. 9. yüzyılda İslami matematikçi el-Hârizmî, Hint-Arap sayıları üzerine, sıfırı da içeren konumsal değer sisteminin açıklandığı bilimsel bir eser kaleme aldı. Yine de bundan 300 yıl sonra Pisalı Leonardo (daha ziyade Fibonacci olarak tanınır) Hint-Arap rakamlarını Avrupa'ya tanıttığında sıfıra karşı hâlâ temkinliydi ve ona sayıdan değil + veya − gibi bir işleç gözüyle bakıyordu. 16. yüzyılda dahi, çok yönlü İtalyan bilgin Gerolamo Cardano ikinci ve üçüncü derece denklemleri sıfır olmadan çözüyordu. Avrupalılar sıfırı nihayet 17. yüzyılda, İngiliz matematikçi John Wallis'in sıfırı kendi sayı doğrusuna eklemesiyle kabul etti.

Can alıcı bir kavram

Matematikte sıfır olmasaydı bu kitaptaki birçok makale yazılamazdı; negatif sayı olmazdı, koordinat sistemi olmazdı, ikili sayı sistemi olmazdı (dolayısıyla da bilgisayar olmazdı), ondalık sayı olmazdı, sonsuz küçük nicelikler tanımlanamayacağından kalkülüs de olmazdı. Mühendislikteki atılımlar ciddi ölçüde kısıtlanmış olurdu. Sıfır belki de sayıların en önemlisidir. ■

Treviso Aritmetiği

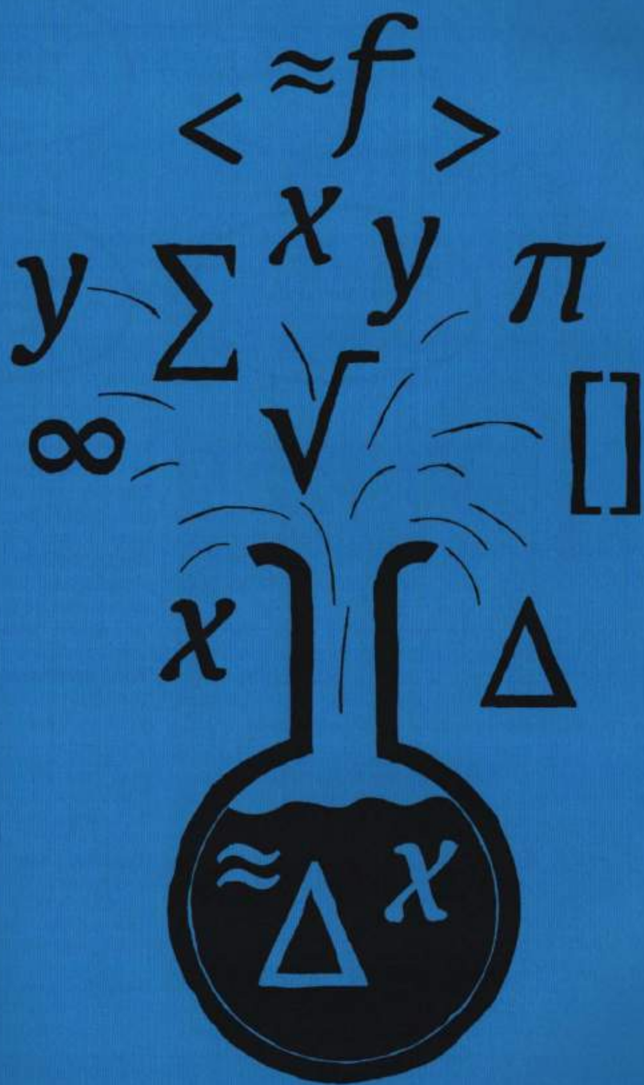
Sıfır rakamı İtalya'da ilk olarak, Treviso Aritmetiği olarak da bilinen, 1478'de isimsiz yayımlanan ve Avrupa'nın basılı ilk matematik ders kitabı olan *Arte dell' Abbaco*'yla (Hesaplama Sanatı) tanındı. Kitap çığır açıcıydı çünkü tüccarlara ve hesaplama problemlerini çözmek isteyen başka kişilere yönelik olarak günlük Venedikçede yazılmıştı. Hint-Arap basamak değerli ondalık sistemini özetliyor ve sayı sisteminin işleyişini tarif ediyordu. Meçhul yazar 0'ı 10'uncu sayı yapar ve "*cipher*" veya "*nulla*" adını verir; değerlerini artırmak üzere diğer sayıların sağına yazılmadığı sürece hiçbir değeri olmayan bir şeydir bu.

Treviso tanımlamasına göre sıfır sadece yer tutucu bir sayıdır. Kaldı ki yer tutucu sayı da hâlâ yeni bir kavramdı. Sayı olarak sıfır kavramı yüzyıllar boyunca kabul görmedi. Büyük çoğunluğu, günlük ticaretin gerektirdiği pratik hesaplamalarda sayıları kullanmayı öğrenmek isteyenlerden oluşan *Arte dell' Abbaco* okuyucularının da ilgisini çekmiyordu.

***Treviso Aritmetiği*'nden alınan çarpma işlemine yönelik bu kafes yönteminde** 56.289 sayısı 1234'le çarpılmaktadır. Hesaplamada sıfır, yer tutucu olarak ve son çözümde (70.072.626) kullanılmaktadır. Kitapta başka çarpma yöntemleri de sergilenmiştir.

CEBİR BİLİMSEL BİR SANATTIR

CEBİR



KISACA

KİŞİ
El-Hârizmî (y. 780-850)

ALAN
Cebir

ÖNCE
MÖ 1650 Mısırlılardan kalma Rhind papirüsünde doğrusal denklemlerin çözümlerine yer verilir.

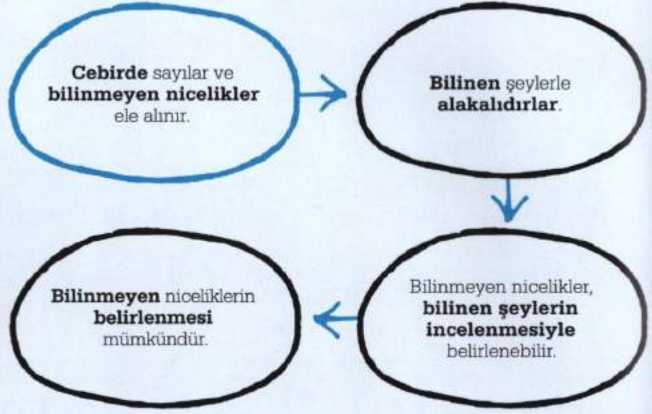
MÖ 300 Öklit'in *Öğeler*'iyle geometrinin temelleri atılır.

MS 3. yüzyıl Yunan matematikçi Diyofantus bilinmeyen nicelikleri temsil etmek amacıyla simgelerden yararlanır.

MS 7. yüzyıl Brahmagupta ikinci derece denklemi çözer.

SONRA
1202 Pisalı Leonardo, yazdığı *Liber Abaci*'de Hint-Arap sayı sistemini kullanır.

1591 François Viète, denklemlerdeki terimleri kısaltmak için harflerin kullanıldığı simgesel cebri tanıtır.

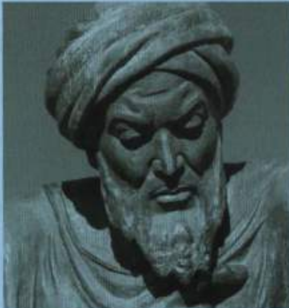


Bilinmeyen niceliklerin hesaplanmasına yarayan bir matematik yöntemi olan cebrin, Babillilere ve Mısırlılara kadar dayanan kökeni çivi yazılı tabletler ve papirüslerdeki denklemlerce gözler önüne serilir. Genelde geometriyle ilgili olup bir uzunluğun, alanın veya hacmin belirlenmesini gerektiren pratik problemleri çözme ihtiyacı cebrin geliştirilmesine sebebiyet verdi. Matematikçiler peyderpey kurallar geliştirerek üstesinden gelebilecekleri genel problemleri çeşitlendirmeyi amaçladılar. Uzunluk ve alanları hesaplamak için, değişkenler (bilinmeyen nicelikler) içeren denklemler ve karesi alınmış terimler tasarlandı. Babilliler tablolara bakarak, mesela bir tahıl ambarını kaplayan boşluk gibi hacimleri de hesaplayabiliyorlardı.

Yeni yöntem arayışı

Yüzyıllar içerisinde matematik geliştikçe problemler uzayıp kar-

El-Hârizmî



MÖ y. 780'de Özbekistan'ın şimdiki Hive şehri dolaylarında doğan Muhammed bin Mûsâ el-Hârizmî, taşındığı Bağdat'taki Beytülhikme'de akademisyen oldu.

El-Hârizmî, doğrusal ve ikinci derece denklemleri çözmeye yarayan sistemli kurallarından dolayı "cebrin" babası kabul edilir. Günümüzde hâlâ kullanılan yöntemleri "tamamlama ve dengeleme" yoluyla hesaplama üzerine önemli yapıtında bu kuralların özeti çıkarılmıştır. Diğer başarıları arasında, Latince çevirisiyle Avrupa'ya Hint-Arap rakamlarını tanıştırdığı Hint rakamları konulu metni yer alır. Coğrafya üzerine bir kitap yazdı, bir dünya haritasının oluşturulmasına yardımcı oldu, Yer'in çevresinin belirleneceği bir projede yer aldı, usturlabı (Yunanların daha önceleri denizcilikte kullandığı bir alet) geliştirdi ve bir dizi astronomi tablosu derledi. El-Hârizmî 850 yılı civarında hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

y. 820 *Hint Rakamlarıyla Hesaplama Üzerine*
y. 830 *Tamamlama ve Dengeleme ile Hesaplamaya Dair Özlü Kitabı*

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Rhind papirüsü 32–33 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–05 ▪ Denklemlerin cebirsel çözümü 200–01 ▪ Cebrin temel teoremi 204–09

maşıklaştı ve bilginler bunları kısaltıp basitleştirmek için yeni yollar aradılar.

Erken dönem Yunan matematiği büyük oranda geometriye dayansa da Diyofantus MS 3. yüzyılda yeni cebir yöntemleri geliştirdi ve bilinmeyen nicelikler için ilk simgeleri o kullandı. Ne var ki, standart cebirsel notasyonun kabul görmesi için aradan binyıldan uzun zaman geçmesi gerekecekti.

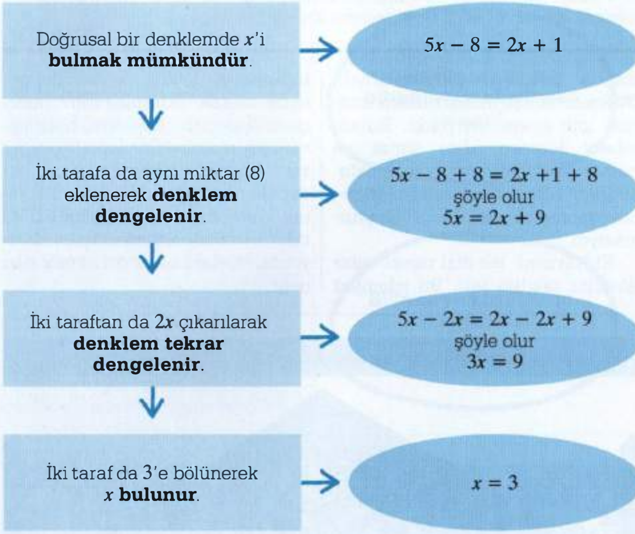
Roma İmparatorluğunun çöküşünün ardından Akdeniz çevresinde matematik düşüşe geçti ancak İslamiyetin 7. yüzyıldan itibaren yayılması cebirde bir çığır açacak denli etkiliydi. MS 762'de Halife Mansur, Bağdat'ta bir başkent kurdu ve burası çabucak önemli bir kültür, bilim ve ticaret merkezi haline geldi. Yunan matematikçiler Öklit, Apollonius ve Diyofantus'un yanı sıra Brahmagupta gibi Hintli bilginlerin eserleri dahil olmak üzere kadim kültürlere ait elyazmalarının elde edilip çevrilmesi şehre itibar kazandırdı. Bu eserler araştırma ve bilgi yayma merkezi haline gelmiş muazzam bir kütüphane olan Beytülhikme'de tutuluyordu.

İlk cebirciler

Beytülhikme'deki bilginler kendi araştırmalarını yürütüyorlardı. 830'da Muhammed bin Mûsâ el-Hârizmî de çalışmasını Kütüphaneye sundu: *The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing [Tamamlama ve Dengeleme ile Hesaplamaya Dair Özlü Kitabı]*. Kitap, cebir problemlerini hesaplama yollarını kökünden değiştirerek modern cebrin temel ilkelerini ortaya çıkardı. Daha kadim dönemlerdeki gibi, söz edilen problem türleri büyük oranda geometri problemleriydi. Geometri araştırmaları İslam dünyası için önem taşıyordu. Bunun sebebi kısmen, dini sanat ve mimaride insan sureti yasak olduğundan İslami tasarımların temelini geometrik şekillerin oluşturmasıydı.

El-Hârizmî bir dizi temel cebir işlemini takdim etti. Bu işlemleri indirgeme, mukabele ve dengeleme olarak tanımlıyordu. İndirgeme işlemi (bir denklemi basitleştirmek) mukabeleyle (*al-jabr*), diğer bir deyişle, çıkarılan terimleri denklemin diğer tarafına taşıyarak, ardından da denklemin iki tarafını dengeleyerek yapılabiliyordu. "Cebir" sözcüğü *al-jabr*'dan gelir.





El-Hârizmî, çalışmalarını dış dünyadan kopuk vaziyette yürütmüyordu, Antik Yunan ve Hintli matematikçilerin yapıtlarının çevirileri elinin altındaydı.Hint ondalık basamak değerli sistemi İslam dünyasına duyurdu; bu da daha sonra günümüzde yaygın olarak kullanılan Hint-Arap rakam sisteminin benimsenmesinin önünü açtı.

El-Hârizmî işe doğrusal denklemleri araştırmakla başladı. Bu denklemlerin böyle adlandırılmasının sebebi grafikleri çizildiğinde doğru oluşturmalarıdır. Doğrusal denklemler tek bir değişken içerir ve bu değişkenin üssü 2 veya daha fazla olamaz, yani değişkenin en fazla birinci kuvveti bulunabilir.

İkinci derece denklemler

El-Hârizmî simge kullanmıyor, denklemleri sözcüklerle yazıyor ve şekillerle destekliyordu. Örneğin $(x/3 + 1)(x/4 + 1) = 20$ denklemini şu şekilde kelimelere döküyordu: "Bir nicelik: Üçte birinin bir dirhem fazlasını, dörtte birinin bir dirhem fazlasıyla çarptım, yirmi etti"; 1 kuruşluk madeni para anlamına gelen bir dirhemi, el-Hârizmî tekli birimi simgelemek için kullanıyordu. Hârizmi'ye göre, tüm ikinci derece denklemler (x'in en büyük kuvvetinin x^2 olduğu denklemler), ona ait tamamlama ve dengeleme yöntemleri aracılığıyla altı basit kalıptan biri biçiminde sadeleştirilebilir. Modern notasyonda bunlar şöyledir: $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $ax^2 = bx + c$ ve $bx = c$. Bu altı türde a, b ve c harflerinin hepsi bilinen sayıları, x ise bilinmeyen niceliği temsil eder.

El-Hârizmî daha karmaşık problemlere de eğildi ve ikinci derece denklemleri çözmek için "kareye tamamlama" (sağda) olarak bilinen tekniğin uygulandığı geometrik bir yöntem üretti. Daha sonra, üçüncü derece denklemlerin (x'in en büyük kuvvetinin x^3 olduğu denklemler) genel bir çözümünü aradı ama bulamadı. Her şeye rağmen, onun bu hedefi gütmesi Antik Yunanlardan beri matematikte nasıl bir ilerleme yaşandığını ortaya koyuyordu.

Cebir yüzyıllarca geometri problemlerini çözmeye yönelik bir araçtan ibaret kalmış; oysa artık, giderek zorlaşan denklemleri hesaplamanın nihai hedef olduğu, başlı başına bir bilim dalı haline gelmişti.

Rasyonel yanıtlar

El-Hârizmî'nin uğraştığı çoğu denklemin çözümleri Hint-Arap ondalık sistemiyle rasyonel ve tam olarak ifade edilemiyordu. $\sqrt{2}$ (2'nin karekökü) gibi kadim Yunan uygarlığından beri, hatta daha kadim Babil kil tabletlerinden bilinmesine rağmen, rasyonel sayılar ile (kesir haline getirilebilen sayılar) kesir kısmı devirli örüntü içermeksizin sonsuz basamaktan oluşan irrasyonel sayılar arasındaki ayrımı ilk olarak MS 825'te el-Hârizmî yaptı. El-Hârizmî rasyonel sayıları "sesli", irrasyonel sayılarıysa "sessiz" diye tabir ediyordu.

El-Hârizmî'nin eserini Mısırlı

> Cebrin ana hedefi, önceden bilinmeyen niceliklerin değerini, bilinen sayılarla ifade edilen verili koşulları dikkatlice hesap ederek bulmaktır.
>
> **Leonhard Euler**

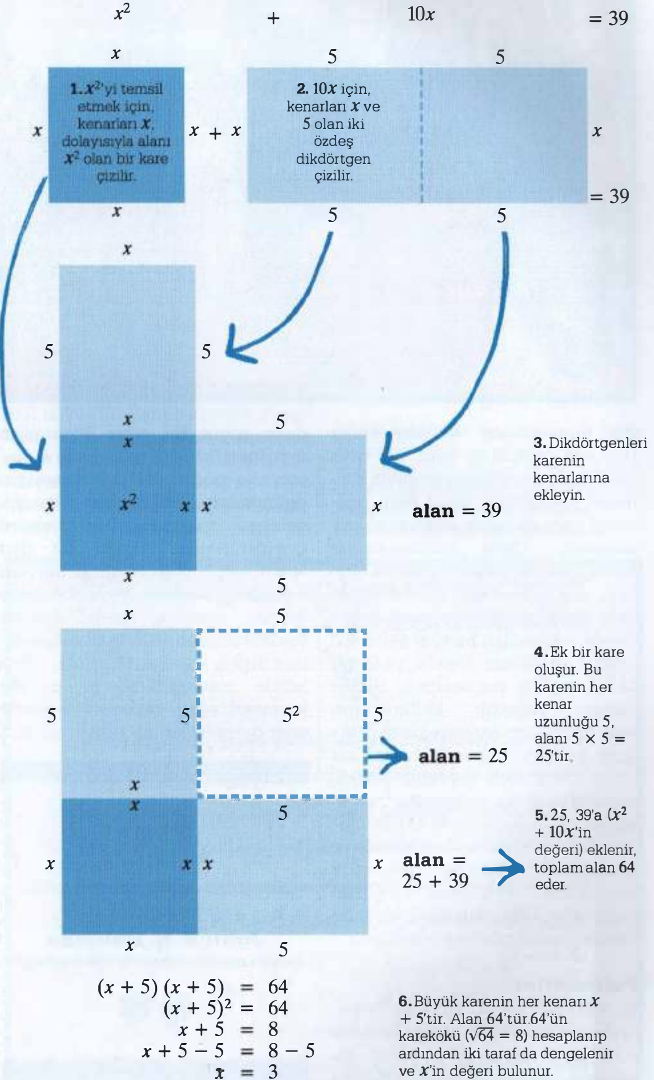
> Cebir yazılı geometriden başka bir şey değildir, geometri de şekilli cebirden.
>
> **Sophie Germain**
> **Fransız matematikçi**

matematikçi Ebu Kamil Şuca bin İslam (MS y. 850-930) ileriye taşıdı. Ebu Kamil Şuca'nın Cebir Kitabı, konuya hevesli eğitimli insanlardan ziyade matematikçilere yönelik akademik bir eser olacak şekilde tasarlanmıştı. Ebu Kamil irrasyonel sayıları, sıkıntılı anormallikler oldukları için yadsımayıp ikinci derece denklemlerin olası çözümleri olarak kabul ediyordu. *Hesaplama Sanatındaki Nadir Şeylere Dair Kitap*'ta Ebu Kamil "belirsiz denklemleri" (birden fazla çözümü olan denklemler) çözmeye girişti. Bu konuyu daha etraflıca incelediği *Book of Birds*'te (*Kuşlar Kitabı*), kuşlarla alakalı derleme cebir problemleri çıkardı. Bunlardan biri şuydu: "100 dirhemle 100 kuş, pazardan kaç şekilde alınabilir?".

Geometrik çözümler

9. yüzyılda el-Hârizmî'den 1486'da Mağribî Kalesâdi'ye kadar uzanan Arap "cebirciler" çağına dek, cebirdeki önemli gelişmeler geometrik betimleri destek alıyordu. Örneğin el-Hârizmî'nin ikinci derece denklemleri çözmeye yönelik "kareye tamamlama" yöntemi, gerçek bir karenin özelliklerinin hesaba katılmasını gerektirir ve sonraki bilginler de bu şekilde çalışmıştır. Örne-

El-Hârizmî, ikinci derece denklemlerin "kareye tamamlama" olarak bilinen bir yöntemle nasıl çözüldüğünü gösterdi. Bu örnekte $x^2 + 10x = 39$ denkleminde x'in nasıl bulunduğu gösterilmektedir.





12. yüzyılda yaşamış şair ve bilgin Basralı Al-Hariri'nin bir elyazmasındaki bu resimde İslami matematikçiler bir caminin kütüphanesinde toplanmışlardır.

ğin matematikçi ve şair Ömer Hayyam, nispeten yeni bir alan olan cebri aracılığıyla problem çözmeye meraklıydı, gerçi hem geometri hem de cebir yöntemini kullanıyordu. *Cebir Problemlerinin İspatı Üzerine İnceleme* (1070) başlıklı eserinde, Öklit'in belitlerindeki (ispat gerektirmeksizin doğru olduğu varsayılan bir dizi geometri kuralı) zorluklara ilişkin yeni bir bakış açısına yer verilmiş olması dikkate değerdir. El-Kereci'nin eski bir çalışmasına değinen Hayyam, birtakım öğelerin büyük bir küme içerisinden kaç farklı şekilde seçilebileceğini belirleyen binom katsayıları hakkında da fikirler üretir. İkinci derece denklemlerin çözümünde Öklit'in geometrik çizimlerini kullanan el-Hârizmî'den esinlenerek üçüncü derece denklemleri de çözmüştür.

Polinomlar

10. yüzyılda ve 11. yüzyılın başlarında, cebrin akademideki konumu açısından önem arz eden bir gelişme, geometriyi esas almayan daha soyut bir cebir kuramının üretilmesiydi. Bu gelişmede el-Kereci'nin yardımı oldu. Aritmetiğin polinomlara (bileşenleri karışık cebirsel terimler olan ifadeler) uygulanmasına ilişkin bir dizi işlem tespit etti. Nasıl ki sayıları toplama, çıkarma veya bölmeye ilişkin kurallar vardı, benzer şekilde polinomlarla yapılan hesaplara ilişkin kurallar oluşturdu. Böylelikle matematikçilerin gitgide karmaşıklaşan cebirsel ifadelerle yaptığı işlemler nispeten ölçünlü hale geldi ve cebrin aritmetikle olan köklü bağları pekişti.

> Bir gram cebir, bir ton sözlü teze bedeldir.
>
> **John B. S. Haldane**
> **İngiliz matematiksel biyoloji uzmanı**

Matematiksel ispat, modern cebrin hayati bir parçasıdır ve ispat araçlarından biri matematiksel tümevarımdır. El-Kereci bu ilkenin basit bir biçimini kullanarak cebirsel bir ifadenin en basit durum (mesela $n = 1$) için doğru olduğunu gösteriyor, sonra bu durumu kullanarak aynı cebirsel ifadenin $n = 2$ vb. için de doğru olduğunu gösteriyordu. Böylece n'nin her değer olanağı için ifadenin doğru olduğu yönündeki kaçınılamaz sonuca varılıyordu.

El-Kereci'nin ardıllarından biri 12. yüzyılda yaşamış bilgin bin Yahyâ bin Abbas el-Mağribî'dir. El-Mağribî'ye göre, cebri genelleştirilmiş kuralları olan bir aritmetik türü sayan yeni düşünce tarzı sayesinde, "nasıl ki aritmetikçiler

> Güneşin, parlaklığıyla yıldızları gölgede bırakması gibi bilgili insan da cebir problemlerini ortaya attığı, hele hele bunları çözdüğü takdirde, insan kalabalıklarının nezdinde başkalarının şöhretini gölgede bırakacaktır.
>
> **Brahmagupta**

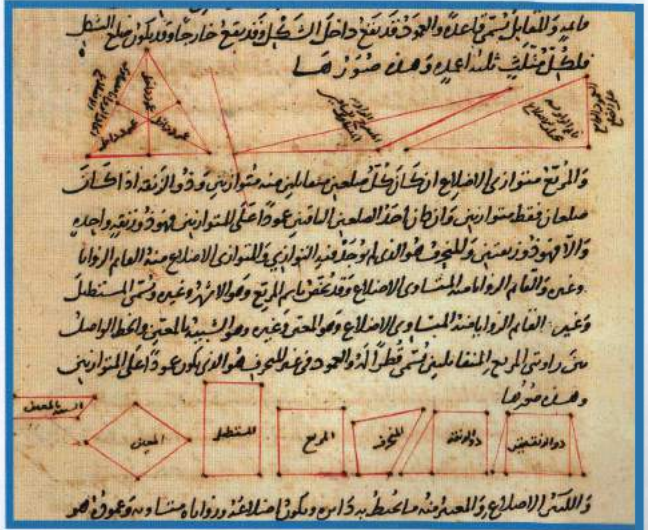
bilinenlerle işlem yapıyordu, cebirciler de aynı şekilde tüm aritmetik araçlarını kullanarak bilinmeyenlerle işlem yapacaktı". El-Mağribî, el-Kereci'nin polinomlar hakkındaki çalışmasını sürdürmesinin yanında, çok sonraları yürütülecek logaritmalar ve üslü ifadeler hakkındaki araştırmalarının önünü açan üslere ilişkin yasaları da geliştirerek matematikte kayda değer bir ilerlemeye aracı oldu.

Denklemleri grafikte göstermek

Üçüncü derece denklemler İskenderiyeli Diyofantus'un döneminden beri matematikçilere zorluk çıkarmıştı. Bunların anlaşılmasında el-Hârizmî ve Hayyam hatırı sayılır ilerleme kaydetmişlerdi. Muhtemelen İran'da doğan ve matematik konusunda başta Arşimet olmak üzere kendisinden önceki Yunan bilginlerden etkilenmişe benzeyen 12. yüzyıl bilgini Nasıreddin Tusi bu çalışmaları daha da geliştirdi. Tusi üçüncü derece denklemlerin çeşitlerini belirlemeye, el-Hârizmî ve Hayyam'a kıyasla daha çok ilgi duyuyordu. Grafik eğrilerine dair erkenden bir anlayış geliştirdi, maksimum ve minimum değerlerin önemini açıkça belirtti. Çalışması sayesinde cebirsel denklemlerle grafikler arasındaki (matematiksel simgelerle görsel anlatımlar arasındaki) bağlantı güçlendi.

Yeni bir cebir

Ortaçağ Arap bilginlerinin keşifleri ve yazıya döktükleri kurallar halen çağımız cebrinin temelini oluşturmaktadır. El-Hârizmî ve ardıllarının çalışmaları cebrin başlı başına bir bilim dalı haline gelmesinde kilit rol oynadılar. Gelgelelim matematikçilerin bilinen ve bilinmeyen değişkenleri simgeleyecek harfleri kullanarak denklemleri kısaltmaya başlaması 16. yüzyılı buldu. Fransız matematikçi François Viète'nin bu gelişmedeki rolü büyüktü. Çalışmalarıyla, Arapların cebir yordamından simgesel cebre geçilmesine öncülük etti. *Introduction to the Analytic Arts [Analitik Sanatlara Giriş]* (1591) eserinde Viète, matematikçilerin bir denklemdeki değişkenleri harflerle simgelemesi gerektiğini ileri sürdü: bilinmeyen nicelikleri temsilen sesli harfler, bilinenleri temsilen sessiz harfler. Bu âdetin en sonunda yerini bıraktığı René Descartes'ın geleneğiyle, alfabenin başındaki harfler bilinen sayılarla, sonundaki harfler bilinmeyen sayılarla temsil edilmeye başladı. Her şeye rağmen, cebir dilini Arap bilginlerin aklından bile geçirmediği bir sadeliğe kavuşturan kişi Viète'ydi. Bu yenilik, matematikçilerin gitgide karmaşık ve ayrıntılı hâle gelen denklemleri geometriye başvurmadan yazıya dökmesine olanak tanıdı. Simgesel cebir olmadan modern matematiğin nasıl gelişeceğini hayal etmek güç olurdu. ■



İslami cebirciler denklemleri, Ala-El-Din Muhammed el Ferjumedhi'nin 14. yüzyılda yazdığı *Treatise on the Question of Arithmetic Code*' daki [*Aritmetiğin Kodu Hakkında İnceleme*] gibi, şemalarla destekli metin biçiminde yazıyorlardı.



CEBRİ GEOMETRİNİN KISITLARINDAN KURTARMAK

BİNOM TEOREMİ

KISACA

KİŞİ
El-Kereci (y. 980-y. 1030)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MS y. 250 *Diyofantus Arithmetica*'da cebirle ilgili kavramlar sunar. Bunlara ileride El-Kereci el atacaktır.

MS y. 825 İranlı astronom ve matematikçi El-Hârizmî cebri geliştirir.

SONRA
1653 *Traité du triangle arithmétique*'te (*Aritmetik Üçgen Üzerine Araştırma*) Blaise Pascal, binom teoremindeki katsayıların ileride Pascal üçgeni olarak adlandırılacak üçgen şeklindeki örüntüsünü gözler önüne serer.

1665 Isaac Newton, binom teoreminden genel binom serisini geliştirerek kalkülüs çalışmasının temelini kısmen oluşturur.

Antik **Yunan'da** matematik neredeyse tamamen **geometri** tartışmalarına dayalıydı.

↓

El-Kereci bu **geleneği bozdu** ve denklemlerin çözümünü yalnızca **sayısal** bağlamda ele aldı.

↓

Binom teoremi dahil olmak üzere bir dizi **cebir kuralı** oluşturdu.

↓

Cebirsel çözümler için geometrik şekillere artık bel bağlanmayacaktı.

Birçok matematik işleminin merkezinde basit bir teorem yer alır: Binom teoremi. İki bilinen veya bilinmeyen terimin birbirine eklendiği veya çıkarıldığı basit bir cebirsel ifadeye binom denir. Binom teoremi de, parantez içindeki bu terimler çarpıldığında olup bitenlerin kısa bir özetidir. Binom teoremi olmasaydı çoğu matematik işlemini yapmak neredeyse imkânsız olurdu. Teorem şunu gösteriyordu: Binomlardaki terimler çarpıldığında sonuç, cebirsel ifade olarak yazılabilen veya üçgen bir kafes (örüntüyü 17. yüzyılda araştıran Blaise Pascal'ın adı verilip Pascal üçgeni olarak tanıtılmıştır) şeklinde gösterilebilen kestirilebilir bir örüntüyü izler.

Binomların anlamını kavramak

Binom örüntüsü ilk olarak Antik Yunan ve Hindistan uygarlıklarındaki matematikçe gözlenmesine rağmen, örüntüyü keşfedenin 8. ve 14. yüzyıllar arasında Bağdat'ta yıldızı parlayan çok sayıdaki bilginden biri olan İranlı matematikçi el-Kereci olduğu bilinir. El-Kereci cebirsel terimlerin birbirleriyle çarpılmasını mercek

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Sıfır 88–91 ▪ Cebir 92–99 ▪ Pascal üçgeni 156–61 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Cebrin temel teoremi 204–09

El-Kereci binom denklemlerin katsayılarına açıklık getirmek için bir tablo oluşturdu. Burada tablonun ilk satırları gösteriliyor. En üst satırda üsler, her üssün altında kalan sütunda da ilişkili olduğu katsayılar yer alıyor. İlk ve son sayılar her zaman 1'dir. Diğer her sayı, hemen solundaki sütunda bulunan komşu sayı ile o komşu sayının üstündeki sayının toplamıdır.

1	2	3	4	5
1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
	1	3	6	10
		1	4	10
			1	5
				1

$(a + b)^3$ ifadesinin açılımı, en üstünde 3 yazan sütuna bakarak bulunabilir. ⟶

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

> Binom teoremi ve bir Bach fügü uzun vadede tarihteki bütün savaşlardan daha önemlidir.
>
> **James Hilton**
> **İngiliz roman yazarı**

altına aldı. Tekil terimlere "monom" (x, x^2, x^3 vb.) adını verdi ve bunların birbirleriyle nasıl çarpılıp bölünebileceğini gösterdi. $6y^2 + x^3 - x + 17$ gibi "polinomları" da (birden fazla terim içeren ifadeler) gözden geçirdi. Yine de en büyük etkiyi yaratan, binomların parantez içindeki terimlerini çarpmaya yönelik formülü keşfetmesiydi.

Binom teoremi binomların kuvvetleriyle ilgilidir. Örneğin $(a + b)^2$ binomunu $(a + b)$ $(a + b)$ biçimine dönüştürerek açıp ilk parantez içindeki her terimi ikinci parantez içindeki her terimle çarpmak $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sonucunu verir. 2'nci kuvvet için hesaplamanın üstesinden gelinebilir ancak daha büyük kuvvetler için elde edilecek sonuçlar gitgide karmaşıklaşır. Binom teoremi, bilinmeyen terimlerin çarpıldığı katsayıların (mesela $2ab$'deki 2) örüntüsünün sırrını çözerek problemi basitleştirir. El-Kereci'nin keşfi, her kuvvetin açılımı için gereken katsayıların sütun sütun gösterildiği bir kafestir. Bir sütundaki katsayılar bir önceki sütundaki sayı çiftleri toplanarak hesaplanır. Açılımdaki kuvvetleri belirlemek maksadıyla binomun derecesi n olarak alınır. $(a + b)^2$ için $n = 2$'dir.

Cebir özgürlüğüne kavuşur

El-Kereci'nin binom teoremini keşfetmesi, matematikçilerin karmaşık cebirsel ifadelerle işlem yapabilmesine imkân verdi ve cebrin bütün yönleriyle geliştirilmesinin önünü açtı. El-Hârizmî'nin aşağı yukarı 150 yıl önce geliştirdiği cebirde, bilinmeyen niceliklerin hesabı için bir simgeler sisteminden yararlanılıyordu ve kapsamı kısıtlıydı. Geometri kurallarına bağlıydı ve çözümler açı ve kenar uzunlukları gibi geometrik büyüklüklerdi. El-Kereci'nin çalışması, bunun yerine cebrin tamamen sayılara dayandırılabileceğini gösterdi ve geometrinin elinden kurtardı. ■

El-Kereci

Aşağı yukarı MS 980 yılında doğan Ebu Bekir bin Muhammed bin el-Hüseyin el-Kereci'nin adı büyük olasılıkla Tahran yakınlarındaki Kerec şehrinden geliyordu ama hayatının büyük bölümünde Bağdat'ta, halifenin sarayında yaşadı. Matematik hakkındaki üç önemli yazısını 1015 yılı civarında burada yazdı. El-Kereci'nin binom teoremini geliştirdiği yapıt şu anda kayıp olsa da kendisinden sonraki yorumcuları fikirlerini muhafaza etti. El-Kereci aynı zamanda mühendisti ve *Extraction of Hidden Waters* (*Gizli Suların Çıkarılması*) subilimi konusundaki bilinen ilk kılavuzdur.

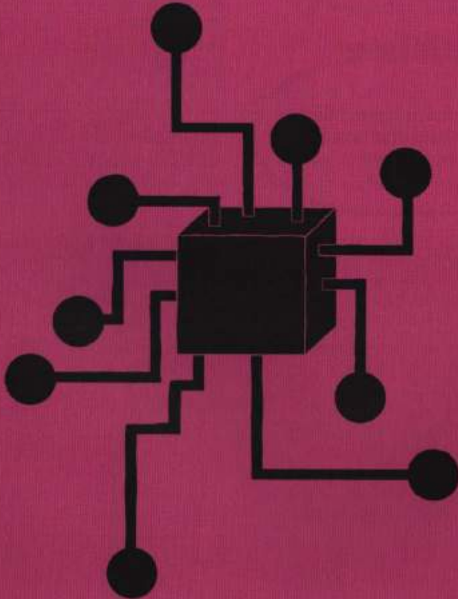
Hayatının ileriki dönemlerinde el-Kereci "dağlık kesime" (muhtemelen Kerec yakınlarındaki Elburz dağlarına) taşınıp buradaki vaktini kuyu açma ve sukanalı inşaatına yönelik pratik projeler üzerine çalıştı. MS 1030'da hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

Cebirdeki Olağanüstülük
Hesaptaki Harikuladelik
Hesaptaki Yeterlilik

TÜM AYRINTILARI VE DURUMLARIYLA ON DÖRT BİÇİM

ÜÇÜNCÜ DERECE (KÜBİK) DENKLEMLER



KISACA

KİŞİ
Ömer Hayyam (1048–1131)

ALAN
Cebir

ÖNCE
MÖ 3. yüzyıl Arşimet, üçüncü denklemleri iki koni kesitinin kesişimini kullanarak çözer.

MS 7. yüzyıl Çinli bilgin Wang Xiaotong bir dizi üçüncü derece denklemi sayısal yoldan çözer.

SONRA
16. yüzyıl İtalya'da matematikçiler üçüncü derece denklemleri en kısa sürede çözmeye yarayan yöntemler üretir ve onları gözleri gibi esirgerler.

1799–1824 İtalyan bilgin Paolo Ruffini ve Norveçli Henrik Abel, en küçük üslü terimi 5 olan denklemler için hiçbir cebir formülü bulunmadığını ortaya koyarlar.

Kadim dünyada bilginler problemlere bakışlarında geometriyi esas alıyorlardı. x'in üssünün 1 olduğu $4x + 8 = 12$ gibi basit doğrusal denklemler (bunlar bir doğruyu tanımlar) bir uzunluğun bulunmasında kullanılabilir, bir ikinci derece denklemdeki karesi alınmış bir değişkense (x^2) bilinmeyen bir alanı (iki boyutlu bir uzayı) temsil edebilir. Bir üst kademe olan üçüncü derece denklemlerdeyse x^3 terimi bilinmeyen bir hacimdir (üç boyutlu bir uzay).

MÖ 2000'de Babilliler ikinci derece denklemleri çözebiliyorlardı ama üçüncü derece denklemlerin çözümü için bundan ancak 3000 yıl sonra bir yöntem bulunabildi; bu

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Koni kesitleri 68–69 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Karmaşık düzlem 214–15

Üçüncü derece denklemler **üssü 3 olan bir değişken** (x^3) içerir.

↓

Antik Yunan uygarlığında **üçüncü derece denklemleri** yalnızca **cetvel** ve **pergel** kullanarak **çözmeye** çalıştılar.

↓

Ömer Hayyam üçüncü derece denklemleri çözmek için **daha hassas yöntemler** tasarladı. Yöntemlerini şöyle buldu:

↓ ↓

Denklemi, kareler (üssü 2 olanlar) ve **uzunluklar** (üssü 1 olanlar) içeren daha basit bir denklem olarak **açtı**.

Geometrik şemalar çizerek şekillerin kesiştiği yerleri inceledi.

hassas yöntemi, bir düzlem ile koninin kesişiminden meydana gelen koni kesitleri adlı eğriler aracılığıyla, İranlı şair ve bilim insanı Ömer Hayyam buldu.

Küplerin problemleri

Karmaşık problemlerin hesaplamasında geometriyi kullanan Antik Yunanlılar küplere çok kafa patlattılar. Bir küpün iki katı hacme sahip bir küpün nasıl üretileceği klasik bir bilmeceydi. Örneğin bir küpün her kenarı 1 uzunluğundaysa iki kat hacmi olan bir küpün kenar uzunlukları ne olmalıdır? Modern ifadeyle, kenar uzunluğu 1 olan bir küpün hacmi 1^3'se, hangi kenar uzunluğunun küpü (x^3) bu hacmin iki katı eder; yani $1^3 = 1$ olduğundan, $x^3 = 2$ ise x nedir? Yunanlar bu üçüncü derece denkleme çözüm bulmaya çalışmak için cetvel ve pergel kullandılar ama başarıya ulaşamadılar. Bu araçların üçüncü derece denklemlerin tamamını çözmeye yetmeyeceğini anlayan Hayyam, koni kesitlerini nasıl kullandığını ve diğer yöntemlerini cebir hakkındaki eserinde anlattı.

Üçüncü derece denklemler modern işlemlerle $x^3 + bx = c$. gibi basitçe ifade edilebilir. Modern notasyonun sunduğu tutumluluktan yoksun Hayyam'sa denklemlerini sözcüklerle ifade ediyor, x^3'ü "küpler", x^2'yi "kareler" ve sayıları "miktarlar" olarak tarif ediyordu. Örneğin $x^3 + 200x = 20x^2 + 2.000$ denklemini, "kenarının iki yüz katı", "kenarının yirmi katı ve iki bin" eden kübün sorulduğu bir problem olarak tarif



Ömer Hayyam

Pers İmparatorluğu topraklarında, Nişabur'da (günümüzde İran sınırlarına dahildir) dünyaya gelen Ömer Hayyam felsefe ve fen bilimleri eğitimi aldı. Astronom ve matematikçi olarak ünlense de hamisi Sultan Melikşah 1092'de ölünce saklanmak zorunda kaldı. 20 yıl sonra adı temize çıktı ve sessizlik içinde yaşayıp 1131'de hayatını kaybetti.

Hayyam'ın matematikteki en büyük yadigârı, üçüncü derece denklemler hakkındaki çalışmalarıdır. Bununla birlikte Öklit'in paralellik beliti olarak bilinen beşinci belitiyle ilgili önemli bir yorum da üretti. Astronom kimliğiyle, 20. yüzyıla dek kullanılan son derece hassas bir takvimin oluşturulmasına yardımcı oldu. Gariptir ki Hayyam günümüzde en çok, tek yazarı olmayabileceği bir şiir eseri olan ve 1859'da Edward Fitzgerald'ın İngilizceye çevirdiği *Rubaiyat*'la tanınır.

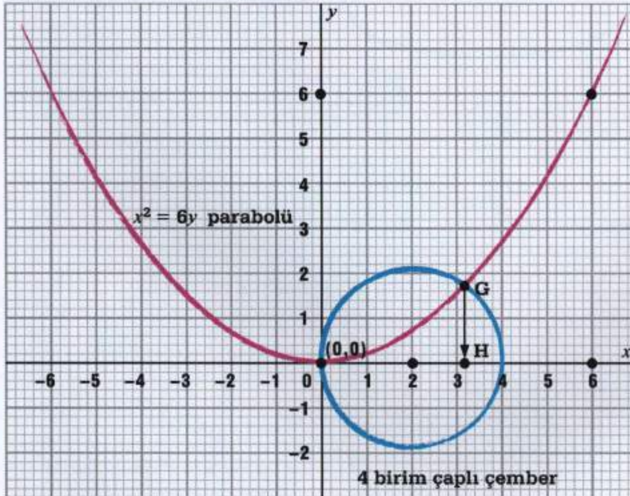
Önemli eserleri

y. 1070 *Cebir Problemlerinin İspatları Üzerine İnceleme*
1077 *Öklit'in Kitabındaki Zorlu Belitler Üzerine Yorumlar*

ediyordu. $x^3 + 36x = 144$ gibi nispeten basit bir denklem için Hayyam, geometrik şema çizme yöntemine başvururdu. Böylesi üçüncü derece denklemlerin daha basit iki denkleme bölebileceğini fark etti: biri bir çember, diğeri bir parabol için. Bu iki basit denklemi eşzamanlı olarak sağlayan x değerini hesap ederek başlangıçtaki üçüncü derece denklemi çözmeyi başardı. Bu, aşağıda gösterilmiştir. O zamanlar bu grafik yöntemleri matematikçilerin elinin altında olmadığından Hayyam söz konusu çember ve parabolün geometrik şekillerini çizmiş olmalıydı.

Hayyam koni kesitlerinin özelliklerini de araştırmış ve üçüncü derece denklemlere, şema içindeki çemberin uzunluğu 4 olarak belirlendiğinde çözüm bulunabileceği sonucuna varmıştı. Bu ölçüye c'nin b'ye bölünmesiyle veya aşağıdaki örnekteki gibi $^{144}/_{36}$ ile ulaşılır. Çember baş noktadan (0,0) geçiriliyordu, çemberin merkeziyse x ekseni üzerindeki (2,0) noktasındaydı. Hayyam bu şemadan yararlanarak çember ve parabolün kesiştiği noktadan x eksenine dik bir doğru çizdi. Çizginin x eksenini kestiği nokta (burada $y = 0$'dır), üçüncü derece denklemdeki x'in değerini verir. $x^3 + 36x = 144$ örneğinde yanıt $x = 3{,}14$'tür (iki ondalık basamağa yuvarlanmıştır).

Hayyam yaklaşık 600 yıl sonra icat edilecek olan koordinat ve eksenleri kullanmıyordu. Bunun yerine şekilleri olabildiğince doğru bir şekilde çiziyor ve şemalardaki uzunlukları dikkatlice ölçüyor olmalıydı. Ardından da astronomide sık sık kullanılan trigonometri tablolarını kullanarak yaklaşık bir sayısal değer buluyor olmalıydı. Hayyam'a göre sonuç her zaman pozitif bir sayıydı. Aşağıdaki grafikte görüldüğü üzere, aynı geçerlilikteki negatif bir yanıt da vardır ancak negatif sayılar kavramı, Hintli matematikçilerce farkına varılmış olsa da 17. yüzyıla dek genel olarak kabul görmedi.



$x^2 = 6y$ denkleminin parabolü (pembe) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ çemberini (mavi) keser. Kesişim noktası G'den x ekseni üzerindeki H'ye çizilen bir doğru, $x^3 + 36x = 144$ üçüncü derece denklemindeki x'in (3,14) değerini verir.

Hayyam'ın katkısı

MÖ 3. yüzyılda Arşimet üçüncü derece denklemleri çözme girişimlerinde koni kesiti kesişimlerini incelemiş olsa da Hayyam'ı farklı kılan, sistemli yaklaşımıydı. Genel bir kuramı üretmesini mümkün kılan buydu. Geometri ve cebri harmanlayarak uyguladığı yaklaşımını zenginleştirdi ve çember, hiperbol ve elipsleri kullanarak üçüncü derece denklemleri çözdü ancak onları nasıl oluşturduğunu hiç açıklamayıp sadece "araçlardan yararlandığını" söylemekle yetindi.

Hayyam bir üçüncü derece denklemin birden fazla kökü, dolayısıyla da birden fazla çözümü olabileceğini ilk fark edenlerdendi. Modem grafiğindeki, yılan gibi x ekseninin bir altına inip bir üstüne çıkarak kıvrımlar çizen eğride de görüleceği üzere, bir üçüncü derece denklemin en fazla üç kökü vardır. Hayyam iki kökü olduğunu sanıyordu; negatif değerleri dikkate almamış olmalıydı. Hayyam, çözüme ulaşmak için cebirle birlikte geometriyi kullanmak zorunda olmaktan hoşlanmıyor,

> Uzunlukları ne olursa olsun, kare-kare, dörtlü-küp ve küp-küpün kenarlarını bulmayı gösterdim; şimdiye dek bunu yapan çıkmadı.
>
> **Ömer Hayyam**

> Cebirler, önermelerle ispat edilen geometrik gerçekliklerdir.
> **Ömer Hayyam**

geometriye harcadığı emeğinin günün birinde yerini aritmetiğe bırakmasını umuyordu.

Hayyam'ın bu düşü, üçüncü derece denklemleri geometriye doğrudan başvurmadan çözen 16. yüzyıl İtalyan matematikçilerinin müjdecisiydi. Üçüncü derece denklemlerin ilk cebirsel çözümünü yapan kişi, çözüm ölümünden sonra defterinde bulunan Scipione del Ferro'ydu. O ve ardılları Niccolò Tartaglia, Lodovico Ferrari ve Gerolamo Cardano üçüncü derece denklemleri çözmek üzere cebirsel formüller üzerinde çalıştılar. Cardano, Ferro'nun çözümünü 1545'te *Ars Magna* başlıklı kitabında yayımladı. Çözümleri cebre dayanıyordu ama günümüzdekilerden farklıydı. Bu fark kısmen, o zamanlar sıfır ve negatif sayıların az kullanılmasından kaynaklanıyordu.



Burada, İran'ın Tebriz şehrindeki Gök Mescit'in (namı diğer "Mavi Cami") çini desenlerinde, kavisli kemerlerinde ve kubbelerinde görüldüğü gibi, İslami mimarinin geometrik şekillere düşkünlüğü belirgindir.

Modern cebre doğru

Üçüncü derece denklemlere çözüm arayışını sürdüren matematikçilerden biri de Rafael Bombelli'ydi. Bombelli bir küpkökün, karmaşık sayı olabileceğini ilk söyleyenlerdendi: Karmaşık sayılar, negatif bir sayının karekökünden (bu, "gerçel" sayılarda mümkün değildir) elde edilen "sanal" bir birimi içeren sayılardır. 16. yüzyılın sonlarında Fransız François Viète uyguladığı yer değiştirme ve sadeleştirme teknikleriyle daha modern bir cebirsel notasyon yaratarak çözümlerine ulaşıyordu. 1637'de René Descartes dördüncü derece denklemlerin (x^4 içeren denklemler) bir çözümünü yayımladı. Çözümde denklem, önce bir üçüncü derece denkleme, ardından iki adet ikinci derece denkleme indirgeniyordu. Günümüzde, bir üçüncü derece denklem, a'nın sıfır olmaması kaydıyla, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ biçiminde yazılabilir. Katsayılar (x değişkeni ile çarpılan a, b ve c) karmaşık sayı değil de gerçel sayı olduğunda, denklemin en az bir gerçel kökü, toplamda da en fazla üç kökü olur.

Hayyam'ın yöntemi günümüzde hâlâ öğretilir. Onun itinalı çalışması cebri ilk dönemlerinde ileri taşıdı, sonraki matematikçilerse cebrin ifade gücünü ve kapsamını geliştirmeye devam etti. ■

Yılın uzunluğu

1074'te, Pers İmparatorluğu hükümdarı Sultan Celaleddin Melikşah, Ömer Hayyam'ı 7. yüzyıldan beri kullanılan ay takvimini güneş takvimiyle değiştirmesi için görevlendirdi. Başkent İsfahan'da yeni bir gözlemevi kuruldu ve Hayyam, çalışmasında kendisine yardımcı olması için sekiz astronomdan oluşan bir ekip topladı.

Yüksek bir hassasiyetle 365,24 gün olarak hesaplanan yıl mart ayında, görünen güneşin ekvatorun tam üzerinde olduğu bahar gündönümünde başlıyordu. Ayların her biri, güneşin burçlar kuşağında ilgili bölgeye girişine göre hesaplandı; bu işlem hem hesaplama hem de fiili gözlemleri gerektirdi. Güneşin geçiş sürelerinde 24 saat farklılık olabildiğinden, ayların uzunluğu 29 ila 32 gündü ama yıldan yıla da değişebiliyordu. Sultanın adı verilen yeni Celali takvimi 15 Mart 1079'da kullanılmaya başladı ve ancak 1925'te düzeltilebildi.

EVRENİN HER AN HER YERDE ÇINLAYAN MÜZİĞİ

FIBONACCI DİZİSİ



KISACA

KİŞİ
Fibonacci olarak da tanınan Pisalı Leonardo (1170-y. 1250)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MÖ 200 Hintli matematikçi Pingala, sonraları Fibonacci dizisi olarak ünlenecek sayı dizisine Sanskritçe şiir vezinleri konusunda değinir.

MÖ 700 Hintli şair ve matematikçi Virahanka, Fibonacci dizisi hakkında yazar.

SONRA
17. yüzyıl Almanya'da Johannes Kepler, dizideki ardışık terimlerin oranının yakınsadığını fark eder.

1891 Édouard Lucas, *Théorie des Nombres*'de (*Sayı Kuramı*) Fibonacci dizisinin adını koyar.

Sayı dizileri, birbirlerine bir **kuralla bağlı** sayıların art arda dizilişidir.

0 ve 1'le başlayan Fibonacci dizisinde sıradaki sayı önceki iki sayının toplamıdır.

0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2;
1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5;
3 + 5 = 8; 8 + 5 = 13...

Dizi sonsuza kadar devam eder.

Doğal yaşamda birçok defa meydana gelen bir sayı dizisi vardır. Bu dizideki her sayı kendisinden önceki iki sayının toplamıdır (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 vb.). İlk olarak Hintli bilgin Pingala'nın MÖ yaklaşık 200'de değindiği diziye daha sonra, Fibonacci adıyla da bilinen İtalyan matematikçi Leonardo Pisano'nun (Pisalı Leonardo) adı verildi ve Fibonacci dizisi olarak anıldı. Fibonacci, diziyi 1202 tarihli *Liber Abaci*'de (*Hesaplama Kitabı*) masaya yatırdı. Dizinin doğa, geometri ve ticarette yararlanılan tahmin yürütme uygulamaları vardır.

Tavşanlarla ilgili bir problem

Fibonacci'nin *Liber Abaci*'de sunduğu bir problem, tavşan nüfusunun artışıyla alakalıydı. Bir çift tavşanla başlamak üzere peş peşe her ay kaç çift tavşan olacağını okuyuculardan hesaplamasını istiyordu. Fibonacci bir-

Fibonacci



1170'te İtalya'da, muhtemelen Pisa'da, Leonardo Pisano adıyla doğan Fibonacci, ölümünden sonraki uzun bir zaman zarfında Fibonacci ("Bonacci'nin oğlu") adıyla tanınmıyordu. Leonardo diplomat babasıyla birlikte çok seyahat etti ve Kuzey Afrika'daki Bugia'da bir muhasebe okulunda okudu. Orada, 1'den 9'a kadar olan rakamları temsilen kullanılan Hint-Arap simgeleriyle karşılaştı. Avrupa'da kullanılan upuzun Roma sayılarına kıyasla basitliklerine hayran kaldığı bu simgelerden, 1202'de yazdığı *Liber Abaci*'de söz etti.

Leonardo Mısır, Suriye, Yunanistan, Sicilya ve Provence'a gidip farklı sayı sistemlerini de inceledi. Yapıtı geniş kitlelerce okundu ve Kutsal Roma İmparatoru II. Friedrich'in dikkatini çekti. Fibonacci y. 1240-1250 aralığındaki bir tarihte hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

1202 *Liber Abaci (Hesaplama Kitabı)*
1220 *Practica Geometriae (Geometrinin Uygulaması)*
1225 *Liber Quadratorum (Kareler Kitabı)*

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Pisagor 36–43 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Cebir 92–99 ▪ Altın oran 118–23 ▪ Pascal 156–61 ▪ Benford yasası 290

Ebeveyn

Yavru

Ocak



Üreyemeyecek kadar genç bir tavşan çifti.

Şubat



Tavşan çifti artık üreyecek olgunluktadır.

Mart




Şimdi iki yavru tavşan ebeveynlerine katılmış ve ebeveynler tekrar üreyecektir.

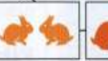
Nisan

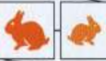




İkinci nesil tavşanlar artık üreyecek olgunluktadır.

Mayıs

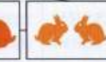


Şimdi üç olgun çift ve olgun olmayan iki çift vardır.

Haziran






Altıncı ayda sekiz çift tavşan vardır.

Her ay bazı tavşanlar olgunlaşır, bazıları ürer. İlk altı ayda çiftlerin sayısı 1, 1, 2, 3, 5 ve 8 dizisi şeklinde artar. Dört ay içerisinde gelecek nesillerin 13, 21, 34 ve 55 çift tavşan içereceği tahmin edilebilir.

takım kabuller belirledi: Hiçbir tavşan ölmüyordu, tavşan çiftleri her ay ama ancak iki aylık olup olgunluk yaşına geldikten sonra çiftleşiyordu ve her çift her ay bir erkek bir de dişi yavru dünyaya getiriyordu. İlk iki ayda başlangıçtaki çiftten başka tavşan olmayacağını söyledi: Yalnızca ilk çift üreme çağına geleceğinden, üçüncü ayın sonunda toplam iki çift, dördüncü ayın sonundaysa üç çift olacaktı.

Bu aşamadan sonra nüfus daha çabuk artar. Beşinci ayda hem başlangıçtaki çift hem de çiftin yavruları tavşan yavrular, ancak ikinci yavru çifti henüz çok gençtir. Sonuçta toplam beş tavşan çifti vardır. Aydan aya devam eden bu sürecin sonucunda her sayının kendisinden önceki iki sayının toplamı olduğu, Fibonacci dizisi adıyla ünlenen bir dizi ortaya çıkar: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 vb. Çoğu matematik problemi gibi bu da varsayıma dayalıdır: Fibonacci'nin tavşanların davranışıyla ilgili kabulleri gerçekçi değildir.

Arıların nesilleri

Doğada beliren Fibonacci dizilerinin bir örneği kovandaki arılarla ilgilidir. Erkek bir arı, yani dron, kraliçe arının döllenmemiş bir yumurtasından gelişir. Yumurta döllenmemiş olduğundan, dronun yalnızca bir ebeveyni vardır: "annesi". Dronların kovandaki görevleri farklıdır; bu görevlerden biri kraliçeyle çiftleşip yumurtalarını döllemektir. Döllenmiş yumurtalar gelişerek dişi arı haline gelir, onlar da kraliçe veya işçi olabilir. Demek ki bir nesil öncesinde dronun yalnızca bir atası vardır, o da annesidir; iki nesil öncesinde iki atası, yani "dede ve ninesi" (annesinin anne ve babası) vardır; üç nesil öncesinde "üç büyük dede ve ninesi" (ninesinin iki ebeveyni ve dedesinin annesi) vardır. Daha da öncesine gidildiğinde, bir önceki neslin beş üyesi, ondan önceki neslin sekiz üyesi vb. vardır. Örüntü açıktır: Ataların her bir neslindeki üye sayısı Fibonacci dizisini meydana getirir. Aynı nesilden bir erkek ve bir dişinin ebeveynlerinin toplam sayısı

> Meğer doğanın tasarlama yöntemini anlamanın anahtarı Fibonacci dizisiymiş.
>
> **Guy Murchie**
> **Amerikalı yazar**

Bir dizideki her **sayı**, kendisinden **bir önceki** sayıya **bölünürse bir oran** ortaya çıkar.



Ardışık herhangi iki **Fibonacci** sayısının birbirine oranı **1,618'e** gitgide yaklaşır.



1,618 aslında $(1 + \sqrt{5}) \div 2$ olan **"altın oranın"** bir yaklaşık değeridir.



Fibonacci dizisi gibi **altın orana** da **doğada** sıkça rastlanır.

üçtür. Onların ebeveynlerininki beş, onların ebeveynlerininkiyse sekiz büyük dede ve ninedir. Örüntüde sekiz önceki nesle kadar geriye gidildiğinde Fibonacci dizisi devam eder: 13, 21, 34, 55 vb. ata.

Bitki yaşamı

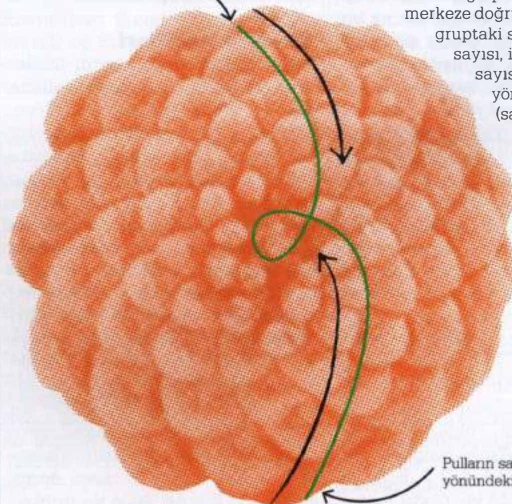
Fibonacci dizisi bazı bitkilerin yaprak ve tohumlarının dizilişinde de görülebilir. Örneğin çam kozalaklarının ve ananasların dış pullarının sarmal oluşumunda Fibonacci sayıları gözlemlenir. Birçok çiçeğin üç, beş veya sekiz (Fibonacci dizisinde bulunan sayılar) taç yaprağı vardır. Kanaryaotunda 13, hindibada çoğunlukla 21, farklı papatya çeşitlerinde 34 veya 55 taç yaprağı bulunur. Ne var ki diğer pek çok çiçeğin dört veya altı taç yaprağı vardır, bu nedenle diziye ait sayılar yaygın olmasına rağmen başka örüntülere de rastlanır.

Her Fibonacci sayısı, kendisinden önceki iki sayının toplamıdır; dolayısıyla ilk iki sayı, üçüncü hesaplanmadan belirtilmelidir. Fibonacci dizisi bir yineleme bağıntısıyla (bir dizideki bir sayıyı kendisinden önceki sayılara göre tanımlayan bir denklemle) tanımlanabilir. İlk Fibonacci sayısı f_1 şeklinde yazılır, ikincisi f_2 ve n, 1'den büyük olmak üzere, denklem şöyledir: $f_n = f_{(n-1)} + f_{(n-2)}$. Örneğin beşinci Fibonacci sayısını (f_5) bulmaya çalışıyorsanız, f_4 ile f_3'ü toplamanız gerekir.

Fibonacci oranları

Fibonacci dizisindeki ardışık terimlerin oranını hesaplamak bir hayli ilginçtir. Her sayıyı, dizide

> Bir örümcek bir duvara her gün fitlerce tırmanır ve her gece sabit bir sayı kadar aşağı kayarsa, duvarı kaç günde tırmanır?
>
> **Fibonacci**



Yukarıdan bakıldığında çam kozalağının pullarının iki sarmal grubu halinde ilerlediği görülebilir. Biri saat yönünde, diğeri saatin ters yönünde olmak üzere iki grup da dışarıdan merkeze doğru ilerler. Her bir gruptaki sarmalların sayısı, iki Fibonacci sayısı olan 13 (saat yönü) ve 8'dir (saatin ters yönü).



Piyano klavyesinde gam dizisi sekizi beyaz beşi siyah olmak üzere, iki do arasında 13 tuş içerir. Siyah tuşlar ikili ve üçlü gruplar halindedir. Bu sayıların tamamı Fibonacci dizisinde bulunur.

kendisinden bir önceki sayıya bölünce şunlar elde edilir: $1/1 = 1$, $2/1 = 2$, $3/2 = 1.5$, $5/3 = 1.666...$, $8/5 = 1.6$, $13/8 = 1.625$, $21/13 = 1.61538...$, $34/21 = 1.61904...$ Bu sürecin sonsuza kadar sürdürülmesiyle sayıların aşağı yukarı 1,618'e yaklaştığı gösterilebilir. Buna altın oran denir. Aynı sayı, yaptığı her çeyrek dönüşte 1,618 çarpanı kadar genişleyen, altın sarmal denen bir eğride de mevcuttur. Doğada bu sarmal karşımıza sıklıkla çıkar: Örneğin çam kozalaklarının tohumları, ayçiçekleri ve kirpi otları altın sarmal şeklinde büyür.

Sanat ve analiz

Fibonacci dizisine şiir, sanat ve müzikte de rastlanabilir. Örneğin şiirdeki hoş bir ritim, ardışık mısralar 1, 1, 2, 3, 5 ve 8 heceden oluştuğunda ortaya çıkar ve uzun zaman önce bu şekilde düzenlenmiş, 6 mısra ve 20 hecelik bir şiir geleneği vardır. MÖ 200 civarında Pingala, Sanskritçe şiirin bu örüntüyü içerdiğini biliyordu. Romalı şair Virgil'se aynı örüntüyü kullanmıştı.

Fibonacci dizisi müzikte de kullanılmıştır. Fransız besteci Claude Debussy (1862–1918), çeşitli bestelerde Fibonacci sayılarından yararlandı. *Cloches à travers les feuilles* bestesinin çarpıcı zirve bölümünde parçadaki ölçü çizgilerinin toplam sayısının zirve bölümündeki ölçü çizgilerine oranı yaklaşık olarak 1,618'dir.

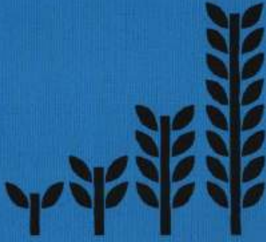
Çoğunlukla sanatla ilişkilendirilse de Fibonacci dizisinin finansta da kullanışlı bir araç olduğu ortaya çıkmıştır. Günümüzde borsa fiyatlarının hangi noktada yükselip hangisinde ineceğini tahmin etmek amacıyla Fibonacci dizisinden elde edilen oranlar analiz aracı olarak kullanılmaktadır. ■



***Liber Abaci*'nin** özgün elyazmasının bir sayfasında Fibonacci dizisi sağ tarafta liste halinde görünmekte.

Uygulamadaki çözümler

Fibonacci, dizisini kullanışlı bir buluş olarak sunmuştu. Örneğin *Liber Abaci*'de kâr marjı hesabı ve para birimlerinin dönüştürülmesi gibi ticarette karşılaşılan birçok problemin nasıl çözüleceğini açıklıyordu. *Practica Geometriae*'de (1220), benzer üçgenler (açıları özdeş ama boyutları farklı üçgenler) kullanarak uzun bir cismin yüksekliğini bulmak gibi arazi ölçümüyle ilişkili problemleri çözüyordu. Liber Quadratorum (1225) başlıklı yapıtındaysa Pisagor üçlülerini bulmak da dahil sayı kuramının çeşitli konu başlıklarına el atıyordu. Pisagor üçgenleri dik üçgenlerin kenar uzunluklarını temsil eden üç adet tamsayıdan oluşan gruplardır. Bu üçgenlerde en uzun kenarın (hipotenüsün) karesi, iki kısa kenarın karelerinin toplamına eşittir. Fibonacci, dizisinde 5'ten sonraki her ikinci sayının (13, 34, 89, 233, 610 vb.), dik bir üçgenin, iki kısa kenarı tamsayı olduğunda, hipotenüsünün uzunluğu olduğunu buldu.



İKİYE KATLAMANIN KUVVETİ

SATRANÇ TAHTASINDAKİ BUĞDAY

KISACA

KİŞİ
Sissa ben Dahir
(MS 3. veya 4. yüzyıl)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MÖ y. 300 Öklit kareleri tanımlamak için kuvvet kavramını tanıtır.

MÖ y. 250 Arşimet üslü sayıları çarparken üsler toplanarak da çarpımın bulunabildiğini tespit ettiği üslü sayılar yasasını kullanır.

SONRA
1798 İngiliz ekonomist Thomas Malthus, insan nüfusu üstel olarak büyürken gıda arzının daha yavaş artmasıyla bir felaket yaşanacağı tahmininde bulunur.

1965 Intel'in kurucu ortağı Amerikalı Gordon Moore, bir mikroçipteki transistör sayısının 18 ayda bir kabaca iki katına çıktığını saptar.

Satranç tahtasındaki buğday problemine ilişkin ilk belge 1256'da Müslüman tarihçi İbn-i Hallikân'ın kaleminden çıkmıştır. Oysa bu belgede muhtemelen 5. yüzyılda Hindistan'da ortaya çıkan daha eski bir uyarlama yeniden aktarılmıştır. Hikâyede satrancın mucidi Sissa ben Dahir, hükümdarı Kral Sharim'in huzuruna çağırılır. Kral satranç oyunundan öylesine zevk almıştır ki Sissa'ya ne isterse istesin armağan etmeyi teklif eder. Sissa'nın isteği bir miktar tahıl olur ve 8 × 8'lik satranç tahtasındaki kareleri kullanmak suretiyle arzu ettiği miktarı anlatır. Bir buğday (veya hikâyenin bazı uyarlamalarına göre pirinç) tanesi satranç tahtasının sol alt karesine koyulur. Ardından tanelerin sayısı sağa gittikçe ikiye katlanır, dolayısıyla ikinci karede iki buğday tanesi, üçüncü karede dört buğday tanesi olur ve sağ üstteki 64. kareye varana kadar her satırda soldan sağa ilerlenerek bu böyle devam eder.

Görünüşte kıymetsiz olan armağan karşısında afallayan kral, buğday tanelerinin sayılmasını buyurur. 8'inci karede 128 buğday tanesi, 24'üncü karede 8 milyondan fazla, satranç tahtasının ilk yarısının sonuncusu olan 32'inci karedeyse 2 milyondan fazla buğday tanesi vardır. An itibarıyla kralın tahıl ambarı boşalmaya yüz tutmuştur ve kral, sırf sıradaki kare için, yani 33'üncü kare için 4 mil-



Bakterilerin bölünmesi üstel büyümenin örneklerinden biridir; tek bir hücre bölündüğünde iki hücre oluşturur, onlar da bölününce dört hücre meydana gelir ve bu böyle sürüp gider. Bu sayede bakteriler çok hızlı bir şekilde yayılır.

Ayrıca bkz. Zenon'un hareket paradoksları 46–47 ▪ Tasım mantığı 50–51 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Catalan kestirimi 236–37

Sissa'nın satranç tahtasındaki buğday kavramı, sayıların üstel büyümeyle ne kadar çabuk artabileceğinin eski bir örneğidir. (1 milyondan itibaren sayıların değerleri yaklaşık değerlerdir.) Bu satranç tahtasındaki buğday tanelerinin toplamı 18 katrilyondur.

72 trilyar	**144 trilyar**	**288 trilyar**	**0,6 katrilyon**	**1,2 katrilyon**	**2,3 katrilyon**	**4,6 katrilyon**	**9,2 katrilyon**
281 trilyon	**562 trilyon**	**1 trilyar 123 trilyon**	**2 trilyar 252 trilyon**	**9 trilyar 7 trilyon**	**9,007 trillion**	**18 trilyar**	**36 trilyar**
1 trilyon	**2 trilyon**	**4 trilyon**	**8 trilyon**	**17 trilyon**	**35 trilyon**	**70 trilyon**	**140 trilyon**
4 milyar	**8 milyar**	**16 milyar**	**33 milyar**	**66 milyar**	**131 milyar**	**262 milyar**	**524 milyar**
16 milyon	**32 milyon**	**64 milyon**	**128 milyon**	**256 milyon**	**512 milyon**	**1 milyar**	**2 milyar**
65,536	**131,072**	**262,144**	**524,288**	**1 milyon**	**2 milyon**	**4 milyon**	**8 milyon**
256	**512**	**1,024**	**2,048**	**4,096**	**8,192**	**16,384**	**32,768**
1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**

yar buğday tanesi, diğer bir deyişle koca bir tarla kadar buğday tanesi gerektiğini fark eder. Danışmanları, son kare için 9,2 trilyon buğday tanesi gerekeceğini ve satranç tahtasındaki buğday tanelerinin toplamının 18.446.744.073.709.551.615 (2^{64} – 11) olacağını hesaplarlar.

Sissa'nın bu fikri, art arda sıralanmış terimlerin her birinin kendisinden bir önceki terimin iki katı olduğu geometrik serinin bir örneğidir: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 vb. 2'den itibaren bu sayıların tamamı 2'nin kuvvetleridir: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ vb. İndis sayısı, yani üs, diğer sayının (bu örnekte 2'nin) kendisiyle kaç defa çarpıldığını gösterir. Serideki son terim olan 2^{63}, 2'nin kendisiyle 63 defa çarpılmasıdır.

Üslerin kuvveti

Bu serideki değerlerin artışı üsteldir. Üslere, 1'in belirli bir sayıyla kaç defa çarpılacağına ilişkin yönergeler olarak bakılabilir. Örneğin 2^3, 1'in 2'yle 3 defa çarpılacağı anlamına gelir: $1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$, 2^1'se, 1'in 2'yle yalnızca bir defa çarpılacağı anlamına gelir: $1 \times 2 = 2$. Satranç tahtasının ilk karesinde 1 buğday tanesi vardır, dolayısıyla bu serinin ilk terimi 1'dir. 1 sayısı 2^0 şeklinde yazılabilir çünkü bu ifade 1'in 2'yle sıfır defa çarpılmasıyla eşdeğerdir ve 1 etkilenmez. Hatta 0'ın herhangi bir kuvveti bu nedenle 1'e eşittir.

Üstel büyüme ve bozunum, günlük yaşamın pek çok yönünü ilgilendirir. Örneğin ışınetkin bir izotop üstel bir hızla bozunarak başka bir atomun biçimini alır. Bu, yarı ömre sebep olur, diğer bir deyişle başlangıçtaki miktarı ne olursa olsun maddenin yarısı aynı sürede bozunur. ■

Satranç tahtasının ikinci yarısı

Son dönemin düşünürleri, son yıllarda teknolojide görülen değişim hızı için mecazen satranç problemini kullanır. 2001'de bilgisayar bilimcisi Ray Kurzweil yazdığı etkileyici makalede teknolojinin son yollardaki üstel büyümesini anlattı. Satranç tahtasının ikinci yarısındaki buğday tanelerine benzer şekilde, teknolojik gelişimin hızının, zaman içerisinde büyümenin her aşamada eskisine göre ikiye katlandığı modeli izleyip süratle kontrolden çıkacağını tahmin etti

Kurzweil teknolojideki bu büyüme hızının önünde sonunda tekilliğe ulaşacağını iddia ediyordu. Fizikte tekillik, bir fonksiyonun sonsuz değer aldığı nokta olarak tanımlanır. Teknoloji örneğindeki tekillik, yapay zekânın bilişsel becerisinin insanınkini geride bırakacağı noktadır.

RÖNES

1500–1680

ANS

Luca Pacioli, *Divina Proportione* yapıtında **altın oranı mercek altına alır**.



1509

1545



Gerolamo Cardano, yayımladığı Ars Magna yapıtında **karmaşık sayılara** ikinci derece denklemlerin **çözümleri olarak** bakar.

Robert Recorde **eşittir işaretini** (=) ilk defa **kullanır**.



1557

1572



Rafael Bombelli'nin *Algebra*'sında (*Cebir*) **karmaşık sayılar** ilk kez baştan başa **incelenir**.

Simon Stevin **tamsayı olmayan niceliklerin notasyonunu** Avrupa'ya tanıtır.



1585

1614



John Napier, **büyük sayıları basitleştirip** daha kullanışlı sayılara dönüştürmek için **logaritmaları icat eder.**

Gilles de Roberval **bir sikloitin altında kalan alanı** bulmaya yönelik bir yöntem belirler.



1634

1636



Girard Desargues **tasarı geometriyi** geliştirir.

Katolik Kilisesi ortaçağ boyunca Avrupa genelinde kayda değer bir siyasi güce sahipti ve akademide hemen hemen tekel konumundaydı ama 15. yüzyılda otoritesi sarsıldı. Rönesans ("yeniden doğuş") olarak bilinen yeni bir kültürel hareket, klasik Greko-Romen döneminin güzel sanatlar ve felsefesine yeniden duyulan ilgiyle canlandı.

Rönesansta keşiflere duyulan açlık da "Bilim Devrimini" körükledi; matematik, felsefe ve bilimle ilgili klasik metinler geniş kitlelerce ulaşılabilir hâle geldi ve yeni bir düşünür neslinin esin kaynağı oldu. 16. yüzyılda Katolik Kilisesinin egemenliğini sarsan Protestan Reformu da aynı etkiyi yarattı. Rönesans sanatı matematiğe de etki etti. Rönesans döneminin başlarıyla etkin olan matematikçi Luca Pacioli, klasik sanatta çok önemli yer tutan altın oranın matematiğini araştırdı. Resimde perspektifin yenilikçi kullanımından ilham bulan Girard Desargues'yse bunun ardındaki matematiği keşfe çıkıp tasarı geometri alanını geliştirdi. Uygulama alanları üzerine fikir yürütülmesi de ilerleme getirdi: Ticaret daha karmaşık muhasebe araçlarını gerekli kılarken, uluslararası ticaret iyi bir trigonometri kavrayışı isteyen denizcilikte atılımlar sağladı.

Matematikteki yenilikler

Hesaplama sektöründeki büyük bir atılım, Hint-Arap sayı sisteminin benimsenmesi ve eşitlik, çarpma ve bölme gibi işlevleri temsil eden simgelerin kullanımının artmasıyla elde edildi. Kayda değer bir diğer gelişim, 10-tabanlı bir sayı sisteminin tasarlanması ve 1585'te Simon Stevin'in ondalık işaretini tanıtması oldu.

Çağın uygulamayla ilgili gereksinimlerini karşılamak adına matematikçiler alakalı hesaplamaları içeren tablolar hazırladılar. John Napier 17. yüzyılda logaritmalarla hesap yapmanın bir yolunu geliştirdi. İlk mekanik hesaplamaların kökeni bu dönemde gelen icatlardı. William Oughtred'in sürgülü cetveli ve gerçek bilgisayarlara giden yoldaki ilk adım olan Gottfried Leibniz'in mekanik hesap makinesi, bu icatlardandı.

Ellerinin altındaki yeni metinlerden ilham bulan başka mate-

1637
Rene Descartes günümüzde halen kullanılan Kartezyen **koordinat-eksen** sistemini geliştirir.

1644
Keşiş Marin Mersenne kendi adının verildiği **asal sayıları bulma yöntemini** tarif eder.

1653
Blaise Pascal kendi adını taşıyan **üçgeni hakkındaki araştırmasını** yayımlar.

1654
Pascal ile Pierre de Fermat arasında geçen yazışma **olasılık kuramının zeminini** hazırlar.

1656
Christiaan Huygens'in **tautochrone (aynı zaman) problemine bulduğu çözüm** daha hassas saatlerin yapılmasının önünü açar.

1665–75
Gottfried Leibniz ve Isaac Newton **muhtemelen birbirlerinden habersizce kalkülüsü geliştirirler.**

1679
Leibniz ikili sayı sistemini kullanarak hesap yapan bir makine düşünüyle geleceğin bilgisayar programlamasının temelini atar.

matikçiler daha kuramsal çalışmalar yürüttüler. 16. yüzyılda Gerolamo Cardano gibi İtalyan matematikçiler üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin çözümüyle meşgul oldular, Marin Mersenne asal sayıları bulmaya yönelik bir yöntem geliştirdi, Rafael Bombelli'yse sanal sayıların kullanımına ilişkin kurallar belirledi. 17. yüzyılda matematik keşifleri daha önce görülmedik bir hız kazandı ve öncü konumuna erişen pek çok modern matematikçi ortaya çıktı. Bunlardan biri olan filozof, bilim insanı ve matematikçi René Descartes'ın problem çözmeye yaklaşımı modern bilim çağına zemin hazırladı. Matematiğe en büyük katkısı olarak, bir noktanın konumunun eksenlere göre belirlendiği bir koordinat sistemini icat edip çizgi ve şekillerin cebirsel denklemlerle tanımlandığı analitik geometriyi kurdu. Rönesansın son döneminin bir diğer matematikçisi, adını tüm dünyaya duyurmuş Pierre de Fermat'dır. Fermat ününü büyük oranda, 1994'e kadar çözülemeyen esrarengiz son teoremine borçludur. Kalkülüs, sayı kuramı ve analitik geometrinin geliştirilmesine katkıları daha az bilinir. Bir diğer matematikçi Blaise Pascal ile kumar ve şans oyunları üzerine yazışmaları sonucunda olasılık alanının temeli atıldı.

Kalkülüsün doğuşu

17. yüzyılın temel kavramlarından biri, çağlarının iki bilim devi Gottfried Leibniz ve Isaac Newton tarafından, birbirlerinden habersizce geliştirildi. Gilles de Roberval'ın bir sikloitin altında kalan alanı bulmaya çalıştığı araştırmasını kaldığı yerden sürdüren Leibniz ve Newton, sürekli değişim ve ivme gibi kavramların hesaplandığı problemler üzerinde çalıştılar. Elealı Zenon, Antik Yunan'da meşhur hareket paradokslarını ortaya koyduğundan beri bu problemler matematikçilerin kafasını allak bullak etmişti. Probleme buldukları çözüm, sonsuz küçüklerle hesap yapmaya ilişkin bir kurallar bütünü olan kalkülüs teoremiydi. Newton'a göre kalkülüs, fizik ve özellikle de gezegenlerin hareketiyle ilgili çalışmaları için kullanışlı bir araçtı. Leibniz'se kalkülüsün kuramsal öneminin farkına varıp diferansiyel ve integrasyon konularıyla ilgili kuralları düzeltti. ■

SANATIN VE YAŞAMIN GEOMETRİSİ

ALTIN ORAN



KISACA

KİŞİ
Luca Pacioli (1445–1517)

ALAN
Uygulamalı geometri

ÖNCE
MÖ 447-432 Yunan heykeltıraş Phidias'ın tasarladığı Partenon'un, sonradan, altın orana çok yakın olduğu söylenir.

MÖ y. 300 Öklit altın oranın bilinen ilk yazılı bahsine *Öğeler* kitabında yer verir.

MS 1202 Fibonacci ünlü dizisini tanıtır.

SONRA
1619 Johannes Kepler, Fibonacci dizisindeki sayıların altın orana yaklaştığını ispatlar.

1914 Amerikalı matematikçi Mark Barr'ın altın oran için Yunancadaki fi (ϕ) harfini kullandığı söylenir

"[Altın oran] kötüyü zor [üretilir], iyiyi basit [üretilir] yapan bir büyüklük ölçüsüdür.
Albert Einstein"

Altın oran, **orantıyla ilgilidir.**

↓

İki sayının büyüğü küçüğüne bölündüğünde çıkan sonuç, iki sayının **toplamı büyük sayıya bölündüğünde** çıkanla birebir aynıysa o iki sayı arasında altın oran vardır.

↓

Fibonacci dizisinde herhangi iki ardışık sayı, mesela 55 ve 89, **altın orana** yakınlaşır.

↓

89 ÷ 55 = 1,618 (üç ondalık haneye yuvarlanmıştır) → 89 + 55 = 144 → 89 ÷ 55 = 1,618 (üç ondalık haneye yuvarlanmıştır)

Sanat, felsefe, din, bilim ve matematik gibi alanların birbirlerine günümüzdekine nazaran çok daha yakın olduğu düşünülen bir entelektüel yaratıcılık devriydi Rönesans. İlgi uyandıran hususlardan biri, matematik, orantı ve güzellik arasındaki ilişkiydi. 1509'da İtalyan papaz ve matematikçi Luca Pacioli, kaleme aldığı *Divina Proportione*'de (*İlahi Oran*) mimari ve görsel sanatlarda perspektifin matematiksel ve geometrik esaslarına değindi. Kitabın çizimleri, Pacioli'nin arkadaşı ve meslektaşı, ayrıca Rönesansın başta gelen sanatçı ve çok yönlü bilginlerinden Leonardo da Vinci'ye aitti.

Rönesanstan bu yana, "altın oran", "altın orantı" veya Pacioli'nin tabiriyle İlahi Oran aracılığıyla sanatın matematiksel analizi, geometrik mükemmelliği simgeliyor. Bir doğru iki parçaya bölündüğünde uzun parçanın uzunluğunun (a) kısa uzunluğa (b) oranı, doğrunun tamamının ($a + b$) uzun parçanın uzunluğuna a) oranıyla aynıysa altın oran elde edilmiş olur. Buradan: $(a + b) \div a = a \div b$. Bu oranın değeri Yunancadaki ϕ ("fi") harfiyle gösterilen bir matematik sabitidir. ϕ adı, Antik Yunan heykeltıraşı Phidias'tan (MÖ 500-432) gelir. Altın oranın sunduğu estetik olanakları ilk fark edenlerden birinin Phidias olduğu düşünülür. Atina'daki Partenon'un tasarımında altın oranı kullandığı iddia edilir.

ϕ de π (3,1415…) gibi irrasyonel sayıdır (kesir şeklinde ifade edilemeyen bir sayı), dolayısıyla da tekrarlamayan gelişigüzel bir

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Platonik katılar 48–49 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Fibonacci dizisi 106–11 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Penrose karoları 305

örüntüye sahip sonsuz sayıda ondalık basamakla uzatılabilir. Yaklaşık değeri 1,618'dir. Sıradan gibi görünen bu sayının sanatta, mimaride ve doğada estetik açıdan göze bu kadar hoş gelen orantıları meydana getirmesi matematiğin harikalarından biridir.

Fi'yi keşfetmek

Kimileri Antik Yunan mimarisinde ϕ ile ilişkili orantılara rastlanabileceği kanısındadır. Hatta daha da kadim dönemlerde yaşamış Antik Mısırlılarca MÖ y. 2560'ta Giza'ya, tabanının yüksekliğine oranı 1,5717 olacak şekilde inşa edilen Büyük Piramit'te bulunduğunu düşünenler vardır. Ne var ki ilkçağ mimarlarının bu ideal oranın farkında olduklarına işaret eden delil yoktur. Altın orana yaklaşılmış olması, istemli bir matematiksel araçtansa bilinçsiz bir eğilimin sonucu olabilirdi.

Samoslu Pisagor'la ilişkili yarı gizemli bir matematikçi ve filozoflar grubu olan Pisagorcuların simgesi beş köşeli yıldızdı (pentagram). Beş köşeli yıldızın bir kenarı diğerini, oranları ϕ olan iki parçaya böler. Pisagorcular sayıların evrenin temeli olduğundan emindi ve iki tamsayının birbirine oranı olarak açıklanabileceğine de inanıyorlardı. Pisagorcu öğretiye göre, herhangi iki uzunluğun ikisi de, daha kısa olan belirli bir uzunluğun tamsayı katlarıdır. Başka bir tabirle, birbirine oranları rasyonel bir sayıdır ve bu sebeple tamsayıların birbirine oranı olarak ifade edilebilirler. İddiaya göre, Pisagor'un müritlerinden Hippasos bunun doğru olmadığını keşfedince Pisagorcu diğer müritler onu nefretle suda boğmuşlardır.

Yazılı kayıtlar

Altın orana yapılan en kadim yazılı atıflar İskenderiyeli matematikçi Öklit'in MÖ y. 300 tarihli çalışmasında bulunur. Öklit'in *Öğeler*'inde Platon'un daha önceleri anlattığı Platonik katılar (örneğin dörtyüzlüler) ele alınıyor ve altın oran (Öklit'in "aşıt ve ortalama oran" olarak adlandırdığı)

> “İyi elbette ki hep güzeldir ve güzel şeylerde orantı hiçbir zaman eksik olmaz.”
> **Platon**

Platonik katıların büyüklükleri üzerinden gösterilerek açıklanıyordu. Öklit, altın oranı cetvel ve pergel kullanarak oluşturmayı gösterdi.

Fi ve Fibonacci

Altın oran, başka bir ünlü matematik olgusu olan Fibonacci dizisi adlı sayı dizisiyle de yakından ilişkilidir. Fibonacci dizisini Pisalı Leonardo, yani Fibonacci, 1202 tarihli kitabı *Liber Abaci*'de tanıtıyordu. Fibonacci dizisindeki

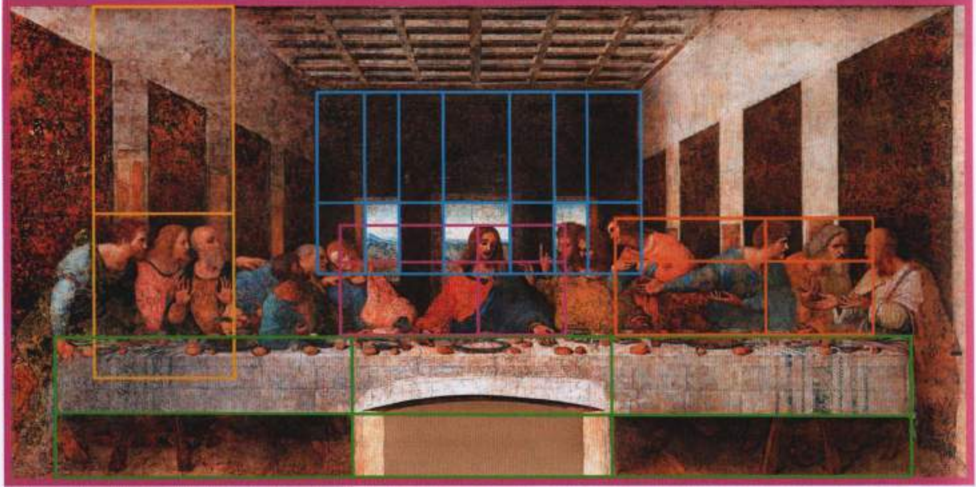
Luca Pacioli



Luca Pacioli 1445'te Toskana'da doğdu. Gençliğinde Roma'ya taşındıktan sonra sanatçı matematikçi Pierro della Francesca'dan ve ünlü mimar Leon Battista Alberti'den eğitim alarak geometri, sanatsal perspektif ve mimari konularında bilgi edindi. Öğretmen oldu ve İtalya'yı gezdi. Fransisken keşiş olarak yemin ederek manastır hayatıyla öğretmenliği bir arada götürdü. 1496'da Pacioli Milano'ya taşınıp ücret sorumlusu olarak çalışmaya başladı. Burada bulunduğu sırada özel matematik dersleri de verdi; öğrencilerinden biri Pacioli'nin *Divina Proportione*'sinin çizimlerini yapan Leonardo da Vinci'ydi. Pacioli günümüzde hâlâ kullanılmakta olan bir muhasebe yöntemini de geliştirdi. 1517'de Toskana'daki Sansepolcro'da vefat etti.

Önemli eserleri

1494 *Arimetik, geometri, oranlar ve orantılılığa dair özet*
1509 *Divina Proportione İlahi Oran*



Leonardo da Vinci'nin, *The Last Supper* (*Son Akşam Yemeği*) (1494-1498) eserinde altın dikdörtgenler kullandığı iddia edilir. Raffaello ve Michelangelo gibi diğer Rönesans sanatçıları da oranı kullanmıştır.

ardışık sayılar, kendilerinden hemen önceki iki sayının birbirine eklenmesiyle bulunur: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

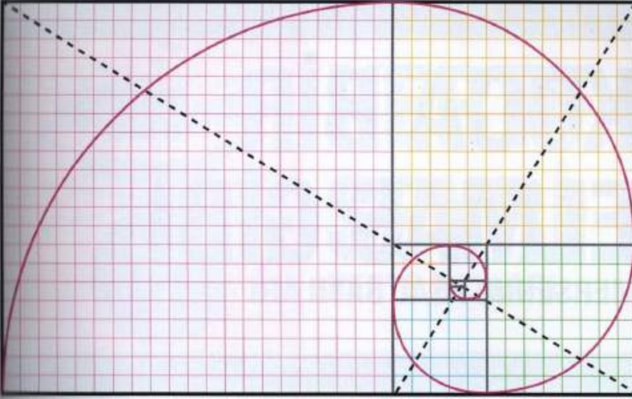
Fibonacci dizisindeki bir sayı kendisinden hemen önceki sayıya bölününce altın oran elde edildiği ancak 1619'da, Alman matematikçi ve astronom Johannes Kepler tarafından gösterildi. Bu hesaplama, dizinin ne kadar ilerisinde yapılırsa, yanıt ϕ'ye o kadar yakındır. Örneğin 6.765 ÷ 4.181 = 1,61803. Fibonacci'nin dizisi de altın oran da doğada yaygın olarak mevcut gibi görünmektedir. Örneğin pek çok çiçek türü Fibonacci sayısında taç yaprağı içerir ve aşağıdan bakıldığında, çam kozalağının pulları saat yönünde 8, saatin ters yönünde 13 sarmal dizilişindedir.

Doğada altın orana yaklaşan bir başka örnek de, yaptığı her dönüşte ϕ çarpanı oranında genişleyen altın spiraldir. Bir altın dikdörtgeni gitgide küçülen kare ve altın dikdörtgenlere bölerek ve karelerin içerisine çeyrek daireler çizerek (bkz. sonraki sayfada) altın sarmal çizilebilir. Notilus kabuğu gibi doğal sarmal şekiller altın sarmala benzemekle birlikte, büyüklükleri tam olarak altın oranı vermez. Altın sarmalı ilk defa 1638'de Fransız filozof, matematikçi ve çok yönlü bilgin Descartes tarif etti; İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli de üzerine araştırma yürüttü. Altın sarmal bir logaritmik eğriyle oluşturulabildiğinden Fransız matematikçi Pierre Varignon tarafından bir "logaritmik sarmal" çeşidi olarak sınıflandı.

Sanat ve mimari

Altın oran müzik ve şiirde de bulunmasına rağmen, daha çok 15. ve 16. yüzyıl Rönesans sanatıyla ilişkilendirilir. Da Vinci'nin *Son Akşam Yemeği* (1494-1498) tablosunun altın oran içerdiği söylenir. Meşhur "Vitruvius Adamı" çiziminin de (bir çember ve karenin içine çizilmiş "mükemmel oranlara sahip" bir adam) ideal insan bedeni ebadında altın oran örnekleri içerdiği söylenir. Gerçekte, Antik Romalı mimar Vitruvius'un kuramlarının resmedildiği Vitruvius Adamı, altın

> İnsan güzelliğini altın oranla tanımlamak sorunludur çünkü yeterince araştırdığınız takdirde bir örüntü bulmanız hemen hemen kesindir.
>
> **Hannah Fry**
> **İngiliz matematikçi**



Bir altın sarmal, bir altın dikdörtgenin içine çizilebilir. Dikdörtgenin kareler ve küçük bir dikdörtgen meydana gelecek şekilde bölünmesi ve aynı işlemin küçük dikdörtgenin içerisinde tekrarlanmasıyla oluşturulur. Ardından karelerin içerisine çeyrek daire çizildiğinde altın sarmal meydana gelir.

oranlara pek de uygun değildir. Buna rağmen, pek çok kişi daha sonra altın oranı insanların çekiciliğiyle ilişkilendirmeye çalışmıştır (bkz. sağdaki kutuda).

Altın orana karşı

19. yüzyılda Alman psikolog Adolf Zeising mükemmel insan bedeninin altın oranla uyumlu olduğunu iddia etti; bir insanın boy uzunluğunun, ayağından göbek deliğine kadar olan mesafeye bölünmesiyle altın oran bulunabiliyordu. 2015'te Stanford Üniversitesinde matematik profesörü olan Keith Devlin altın oranın "150 yıllık bir aldatmaca" olduğunu iddia etti. Zeising'in çalışmasını, altın oranın tarih boyunca estetikle ilişkili olduğu düşüncesinden dolayı suçluyordu. Devlin'in iddiasına göre, Zeising'in düşünü, sanat ve mimari tarihinde insanların altın oranı geriye dönük olarak uygulamasına neden olmuştu. Benzer biçimde, 1992'de Amerikalı matematikçi George Markowsky altın oranın insan bedenindeki sözümona keşiflerinin özensiz ölçümlerden kaynaklandığını ileri sürdü.

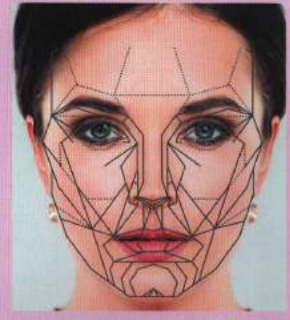
Modern kullanımları

ϕ'nin tarihteki kullanımı üzerinde hâlâ tartışılsa da modern yapıtlarda altın oranın izlerine hâlâ rastlanabilir; Salvador Dali'nin, bizzat resmin altın dikdörtgen şeklinde olduğu *Sacrament of the Last Supper* (*Son Akşam Yemeği Ayini*) bunlardandır. Sanat dışında, altın oranla modern geometride de karşılaşılır. Yapısında altın oran barındıran Fibonacci karolarının sahibi İngiliz matematikçi Roger Penrose'un çalışmaları bu bakımdan özel bir yere sahiptir. Televizyon ve bilgisayar ekranlarının 16:9 görüntü gibi boy/en oranları da ϕ'ye yaklaşır, keza neredeyse mükemmel altın dikdörtgen olan modern banka kartları da. ■

Güzelliğin oranı

Araştırmalara göre yüz simetrisi, bir insanın algılanan çekiciliğini belirleyen önemli bir etken. Gelgelelim altın oranla açıklanan oranların kendileri daha da büyük bir etkenmiş gibi görünmekte. Yüzündeki oranlar altın orana yaklaşık olan (örneğin kafanın uzunluğunun enine oranı) insanların, olmayanlara kıyasla daha çekici olduğu sık sık belirtilir. Oysa şimdiye dek yapılan araştırmalar yetersiz ve genellikle tutarsızdır; altın oranın bir insanın yüzünü daha çekici kıldığına inanmak için yeterince sağlam bir bilimsel dayanak yoktur.

Amerikalı estetik cerrah Stephen Marquardt altı oranın insan yüzüne uygulandığı bir "maske" (bkz. aşağıda) yarattı. Marquardt'ın iddiasına göre, bir yüz maskeyle ne kadar uyumluysa o kadar güzel. Ama öte yandan kimileri de estetik cerrahi için şablon olarak kullanılan maskeyi matematiğin etik olmayan, temelsiz bir şekilde kullanılması olarak görüyor.



Stephen Marquardt'ın yarattığı maske, güzelliği Batılı beyaz modellere göre tanımlamakla eleştirilir.



KOCA BİR ELMAS GİBİ

MERSENNE ASAL SAYILARI

KISACA

KİŞİLER
Hudalrichus Regius (16. yüzyıl başları), **Marin Mersenne** (1588–1648)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MÖ y. 300 Öklit, 1'den büyük her tamsayının, asal sayıların çarpımı olarak yalnızca tek bir şekilde ifade edilebileceğini belirten aritmetiğin temel teoremini ispatlar.

MÖ y. 200 Eratosthenes asal sayıları hesaplamanın bir yöntemini geliştirir.

SONRA
1750 Leonhard Euler, Mersenne sayısı olan $2^{31} - 1$'in asal sayı olduğunu doğrular.

1876 Fransız matematikçi Édouard Lucas $2^{127} -$ 'in bir Mersenne asal sayısı olduğunu doğrular.

2018 Şimdiye dek bilinen en büyük asal sayı olan $2^{82\,589\,933} - 1$ bulunur.

Sadece kendilerine veya 1'e bölünebilen sayılar anlamına gelen asal sayılar, özellikle tüm pozitif tamsayıların yapıtaşları olarak düşünülebildikleri için, Pisagor'un okulundaki Antik Yunanların onları ilk araştırdığı dönemden bu yana bilginler için merak konusu olmuştur. 1536'ya kadar matematikçiler, $2^n - 1$ denkleminde n yerine hangi asal sayı koyulursa koyulsun sonucun da asal sayı olacağına inanıyorlardı. Ne var ki, hakkında adından başka şey bilmediğimiz Hudalrichus Regius, 1536'da yayımlanan Utriusque Arithmetices Epitome (İki Aritmetiğin Özeti) eserinde $2^{11} - 1 = 2.047$ eşitliğine dikkat çekti. $2.047 = 23 \times 89$ olduğundan, bu bir asal sayı değildir.

Mersenne'in etkisi

Regius'un asal sayılar üzerine çalışmasını, başka bilginler $2^n - 1$ ile ilgili yeni varsayımlar ortaya atarak sürdürdüler. Bunların en dikkat çekeni, Fransız keşiş Marin Mersenne'in 1644 tarihli varsayımıydı. 2^n-1'in, n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 ve 257 için $2^n - 1$'in geçerli olduğunu belirledi. Mersenne'in çalışması konuya olan ilgiyi canlandırdı ve $2^n - 1$ ile oluşturulan asal sayılar şimdi Mersenne asal sayıları (M_n) olarak bilinmektedir.

Bilgisayarların kullanımı başka Mersenne asal sayılarının bulunması mümkün kıldı. Mersenne'in n değerlerinden ikisinin (67 ve 257) hatalı olduğu ortaya çıktı ama buna karşılık 1947'de üç yeni asal sayı bulundu: n = 61, 89ve 107 (M_{61}, M_{89}, M_{107}). 2018'deyse Büyük Mersenne Asalları Arama Ağı (Great Internet Mersenne Prime Search), bilinen 51'inci Mersenne asal sayısını meydana çıkardı. ■

> Sayı kuramının güzelliği, tamsayıların basitliğiyle asal sayıların karmaşık yapısı arasındaki çelişkidedir.
>
> **Andreas Knauf**
> **Alman matematikçi**

Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Eratosthenes kalburu 66–67 ▪ Riemann varsayımı 250–51 ▪ Asal sayı teoremi 260–61



KERTE SEYRİ

KERTE HATLARI

KISACA

KİŞİLER
Pedro Nunes (1502-1578)

ALAN
Çizge kuramı

ÖNCE
MS 150 Greko-Romen matematikçi Ptolemaios enlem ve boylam kavramlarını belirler.

y. 1200 Çin, Avrupa ve Arap dünyasındaki denizciler manyetik pusulayı kullanır.

1522 Portekizli denizci Ferdinand Macellan'ın gemisi dünyanın çevresinin turlandığı ilk seferi tamamlar.

SONRA
1569 Flaman haritacı Gerardus Mercator'un haritası sayesinde, denizcilere kerte hattı rotalarını haritaya düz çizgiler şeklinde çizme olanağı sağlanır.

1617 Hollandalı matematikçi Willebrord Snell, sarmal kerte hattına "loksodrom" adını verir.

Yaklaşık 1500'de gemiler dünyanın okyanuslarını aşmaya başlayınca denizciler bir problemle karşılaştı: yerkürenin eğri yüzeyini hesaba katarak dünya üzerinde rota çizmek. Problem, Portekizli matematikçi Pedro Nunes'in *Treatise on the Sphere* (*Küre Üzerine İnceleme*) (1537) yapıtında kerte hattını tanıtmasıyla çözüldü.

Kerte sarmalı

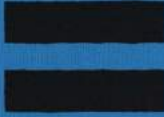
Bir kerte hattı, her meridyeni (boylam çizgisini) aynı açıyla keser. Meridyenler kutuplara doğru birbirlerine yaklaştığından kerte hatları sarmal çizerek bükülür. Hollandalı matematikçi Willebrord Snell 1617'de bu sarmallara loksodrom adını verdi ve loksodromlar uzay geometrisinde temel bir kavram haline geldi.

Kerte hattı denizciler için faydalıdır çünkü bir sefer için tek bir pusula kerterizi sağlar. 1569'da, tüm kerte hatlarının düz olması için boylam çizgilerinin paralel olarak çizildiği Mercator haritaları kullanıma girdi. Böylece insanların haritada tek bir düz çizgi çekerek rota çizmesi mümkün oldu. Gelgelelim, yerkürenin çevresindeki en kısa mesafe kerte değil büyük çemberdir, yani merkezi Yer'in merkezinde bulunan herhangi bir çember. Bir büyük çemberi izlemek ancak GPS'nin icadıyla kullanışlı olmuştur. ■



Bir loksodrom, kuzey veya güney kutuptan başlar ve yerkürenin etrafında sarmal çizerek her bir meridyeni aynı açıyla keser. Bir kerte hattıysa bu sarmalın tamamı veya bir parçasıdır.

Ayrıca bkz. Koordinatlar 144–51 ▪ Huygens'in tautochrone eğrisi 167 ▪ Çizge kuramı 194–95 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–29



EŞİT UZUNLUKTA BİR ÇİFT ÇİZGİ

EŞİTTİR İŞARETİ VE KULLANILAN DİĞER SİMGELER

KISACA

KİŞİ
Robert Recorde (1510-1558)

ALAN
Sayı sistemleri

ÖNCE
MS 250 Yunan matematikçi Diyofantus, *Arithmetica*'da değişkenleri (bilinmeyen nicelikleri) temsil etmek için simgeleri kullanır.

1478 *Treviso Arithmetic*'te toplama, çıkarma, çarpma ve bölme hesaplamalarının nasıl yapıldığı basit bir dille açıklanır.

SONRA
1665 İngiltere'de Isaac Newton limitler, fonksiyonlar, türevler gibi kavramların kullanıma sunulduğu sonsuz küçükler kalkülüsünü geliştirir. Bu işlemler kısaltma amacıyla kullanılacak yeni simgeleri gerektirir

1801 Carl Friedrich Gauss eşleşiklik (eşit boyut ve şekil) simgesini tanıtır.

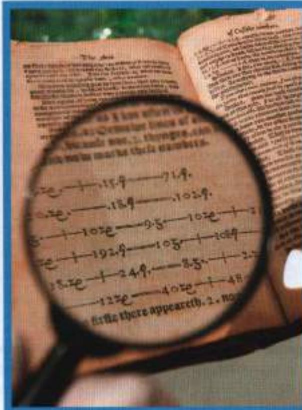
16. yüzyılda Galli doktor ve matematikçi Robert Recorde, araştırması için kolları sıvadığı sıralarda aritmetikte kullanılan notasyon hakkında uzlaşı sağlanmamıştı. Sıfır dahil Hint-Arap rakamları yerleşikleşmiş ama hesaplamaların simgelenmesine ilişkin seçenekler son derece kısıtlıydı.

1543'te Recorde, *The Grounde of Artes* başlıklı yapıtı sayesinde toplama (+) ve çıkarma (−) simgeleri İngiltere'de matematikte kullanılmaya başladı. Bu işaretler ilk olarak, Alman matematikçi Johannes Widman'ın yazdığı *Mercantile Arithmetic*'te [*Ticari Aritmetik*] (1489) meydana çıkmıştı ancak Widman'ın kitabı yayımlanmadan önce de muhtemelen Alman tüccarlarca zaten kullanılıyordu. Bu simgeler önce İtalya ardından İngiltere'deki bilginler tarafından kullanıldıkça işaretlerin yerini, yavaş yavaş, artıyı simgeleyen "p" ve eksiyi simgeleyen "m" aldı.

Daha sonra 1557'de Recorde kendisine ait yeni bir simgeyi önerdi. *Whetsone of Witte*'de [*Aklın Bileytaşı*] "eşitliği" simgelemek için iki özdeş paralel çizgiyi (=) kullandı ve "herhangi iki şey bundan daha eşit" olamaz iddiasında bulundu. Recorde, simgelerin, matematikçileri hesaplamaları yazıyla yazmaktan kurtaracağını ileri sürdü. Eşittir işareti geniş çapta benimsendi ve günümüzde çarpma (×) ve bölme (÷) gibi işlemler için kullanılan diğer simgelerin çoğu 17. yüzyılda yaratıldı.

Cebrin notasyonu

İlk cebir tekniklerinin geçmişi iki binyıldan da eskiye, Babilliler döne-



Robert Recorde eşittir işaretini (=), kendisinin buradaki alıştırma kitaplarının birinde de görüldüğü üzere, hesaplamalarında test etti. Recorde'un işareti modern biçimine kıyasla belirgin derecede uzundu.

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Cebir 92–99 ▪ Ondalık sayılar 132–37 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Kalkülüs 168–75

Simgelerin oluşturuluşu

Simge	Anlam	İcat eden	Tarih
−	Çıkarma	Johannes Widman	1489
+	Toplama	Johannes Widman	1489
=	Eşittir	Robert Recorde	1557
×	Çarpma	William Oughtred	1631
<	Küçüktür	Thomas Harriot	1631
>	Büyüktür	Thomas Harriot	1631
÷	Bölme	Johann Rahn	1659

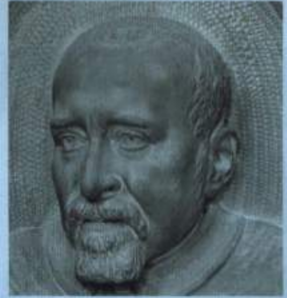
mine dayansa da, 16. yüzyıldan önceki çoğu hesaplama, birörnek olmamakla birlikte kimi zaman kısaltılarak sözcüklerle yazıya dökülüyordu. Her ikisi de cebrin gelişimine önemli katkılarda bulunan İngiliz matematikçi Thomas Harriot ve Fransız matematikçi François Viète, tutarlı bir simgesel notasyon ortaya çıkarmak üzere harflerden yararlandılar. Sistemleriyle günümüzdeki notasyon arasında göze en çok çarpan farklılık, bir kuvveti ifade etmek üzere tekrarlı harflerin kullanılmasıydı. Örneğin a^3, *aaa*; x^4 ise *xxxx*'ti.

Modern bir sistem

Fransız matematikçi Nicholas Chuquet 1484'te üsleri (kuvvet derecelerini) simgelemek için üst imleri kullandıysa da günümüzdeki yazılışlarıyla belirtmedi; örneğin $6x^2$, 6.2'ydi. Üst imlerin yaygınlaşması 150 yıldan uzun zaman aldı; 1637'de René Descartes $3x + 5x^3$ gibi tanıdık örnekler kullandıysa da x^2'yi *xx* şeklinde yazmaya devam etti. Üst im notasyonu ancak saygın Alman matematikçi Carl Gauss x^2'yi kullanmayı tercih ettiğinde yer etmeye başladı. Descartes da denklemlerdeki bilinmeyenler için ***x***, ***y*** ve ***z***'yi, bilinen sayılar içinse ***a***, ***b*** ve ***c***'yi kullanarak katkıda bulundu.

Cebirsel notasyon rağbet görene kadar aradan çok uzun zaman geçmiş olabilirdi ancak bir simge akla uygun gelip matematikçilere problem çözmede yardımcı olduğunda norm haline geliyordu. 17. yüzyılda dünyanın farklı yerlerindeki matematikçilerin arasındaki uzlaşının iyileşmesi de bu tür notasyonların çok daha çabuk benimsenmesi sonucunu doğurdu. ■

> “Sözcüğü tekrar tekrar yazma zahmetinden kurtulmak adına "eşittir" yerine çalışmalarımda çoğu zaman kullandığım bir çift paralel çizgiyi kullanacağım.”
>
> **Robert Recorde**



Robert Recorde

Tenby, Galler'de 1510 civarında doğan Recorde ilk önce Oxford Üniversitesinde tıp okudu, ardından 1545'te Cambridge Üniversitesinden doktorluk unvanını kazandı. İki üniversitede de matematik dersi verdi ve 1543'te cebir üzerine İngilizcedeki ilk kitabı yazdı. Recorde Londra'da bir süre tıpla uğraştıktan sonra 1549'da, Bristol darphanesinin denetçiliğine getirildi. Gelgelelim, ileride Pembroke Kontu olacak William Herbert'a ordusu için fon sağlamayı reddetmesinin ardından darphane kapandı.

1551'de Recorde, Dublin darphanesinin idaresini aldı; sorumluluğu Almanya'daki gümüş madenlerini de kapsıyordu. Bilançoda kâr göstermeyi başaramayınca madenler de kapandı. Recorde daha sonra, yetkisini kötüye kullandığı gerekçesiyle Pembroke'u mahkemeye vermeye çalıştı ama beklediğinin tam aksine, iftira ettiği gerekçesiyle kendisine karşı dava açıldı. Para cezasını ödemediği için 1557'de Londra'daki bir hapishaneye gönderilen Recorde 1558'de orada hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

1543 *Aritmetik: Sanatların Temeli*
1551 *Bilgiye Giden Yol*
1557 *Aklın Bileytaşı*

EKSİNİN ARTISI ÇARPI EKSİNİN ARTISI EKSİ EDER

SANAL VE KARMAŞIK SAYILAR



KISACA

KİŞİ
Rafael Bombelli (1526–72)

ALAN
Cebir

ÖNCE
16. yüzyıl İtalya'da Scipione del Ferro, Tartaglia, Antonio Fior ve Ludovico Ferrari üçüncü derece denklemleri çözmek için halkın huzurunda yarışırlar.

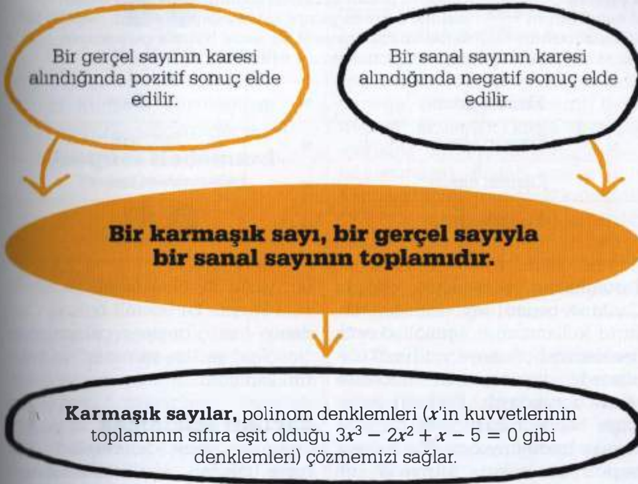
1545 Gerolamo Cardano'nun cebir kitabı *Ars Magna*, basılı ilk karmaşık sayılı hesaplamaları içerir.

SONRA
1777 Leonhard Euler $\sqrt{-1}$ için i notasyonunu tanıtır.

1806 Jean-Robert Argand, karmaşık sayılara geometriden yaklaşarak getirdiği bir yorumu yayımlar; bu eseri Armand şeması için önayak olur.

16. yüzyılın sonlarında İtalyan matematikçi Rafael Bombelli, Algebra kitabında sanal ve karmaşık sayıların kullanımına ilişkin kuralları belirlediğinde bir ilki gerçekleştrdi. Bir sanal sayının karesi alındığında sonuç negatif olur; tüm sayıların (ister pozitif ister negatif) karesinin pozitif sayı olduğunu tespit eden olağan kurala aykırdır bu. Bir karmaşık sayı, (sayı doğrusu üzerindeki) herhangi bir gerçel sayı ile bir sanal sayının toplamıdır. a ve b gerçel sayılar ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, Karmaşık sayılar $a + bi$ kalıbındadır. Farklı problemleri çözebilmek adına sayı kavramını genişletmek, bilginlerin yüzyıllardır süregelen bir ihtiyacıdır.

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–05 ▪ Denklemlerin cebirsel çözümü 200–01 ▪ Ondalık sayılar 204–09 ▪ Cebrin temel teoremi 214–15



Sanal ve karmaşık sayılar bu açılımdaki yeni araçlardı ve Bombelli'nin *Algebra*'sı bunların ve diğer sayıların işleyişine dair anlayışı derinleştirdi. $x + 1 = 2$ gibi en basit denklemleri çözmek için, sadece pozitif tamsayılar gereklidir. $x + 2 = 1$'i çözmek için x negatif bir tamsayı olmalıdır. $x^2 + 2 = 1$'in çözümü içinse negatif bir sayının karekökü gerekir. Bombelli'nin elinin altındaki sayıların arasında bu olmadığından icat edilmesi gerekti ve sonuçta sanal birim ($\sqrt{-1}$) kavramı ortaya çıktı. Negatif sayılara 1500'lerde hâlâ güvenilmiyordu, sanal ve karmaşık sayılar onyıllarca geniş çapta kabul görmedi.

Acımasız rekabet

Karmaşık sayılar kavramı ilk olarak Bombelli'nin yaşadığı dönemde, İtalyan matematikçiler üçüncü derece denklemlerin olabildiğince verimli çözümlerini aradığı sırada su yüzüne çıktı. Bu arayışlarında, çok yönlü İranlı bilgin Ömer Hayyam'ın 12. yüzyılda tasarladığı geometrik yöntemlere bel bağlamadılar. Çoğu ikinci derece denklem cebirsel formüllerle çözülebildiğinden, üçüncü derece denklemlerde işe yarayacak benzer bir formül arayıordu. Bologna Üniversitesinde matematik profesörü olan Scipione del Ferro, bazı üçüncü derece denklemleri çözmeye yönelik cebirsel bir yöntem keşfederek ileriye dönük büyük bir adım attıysa da, kapsamlı formül için arayış devam etti.

Bu dönemin İtalyan matematikçileri, üçüncü derece denklemleri herkesin önünde en kısa sürede çözmek için birbirlerine meydan okurlardı. Saygın bir üniversitede matematik profesörlüğü koltuğuna oturmak isteyen her bilgin için bu müsabakalarda nam salmak vazgeçilmez hâle gelmişti. Bunun sonucu olarak, pek çok matematikçi, yöntemini kamu yararı adına paylaşmak yerine gizli tutuyordu. Del Ferro $x^3 + cx = d$ kalıbındaki denklemlere çözüm arıyordu. Tekniğini yalnızca iki kişiye, Antonio Fior ve Annibale della Nave'ye aktardı ve sır olarak saklayacaklarına dair yemin ettirdi. Kısa süre sonra, Del Ferro'ya Niccolò Fontana (Tartaglia, yani "Kekeme" lakabıyla tanınan) kafa tuttu. Matematikte büyük bir yeteneğe sahip gezgin bir öğretmen, öte yandan mali imkânları kısıtlı olan Tartaglia, üçüncü derece denklemleri del Ferro'dan bağımsız ola-

> Kimileri sanal arkadaşlara inanır. Bense sanal sayılara inanıyorum.
> **R. M. ArceJaeger**
> **Amerikalı yazar**

> [Sanal birimi] toplama işleminde "eksinin artısı" diye, çıkarma işleminde "eksinin eksisi" diye ifade edeceğim.
> **Rafael Bombelli**

Bombelli'nin sanal sayıların birleşimlerine yönelik kuralları

Rafael Bombelli karmaşık sayılarla yapılan işlemlerle ilgili kuralları belirledi. Pozitif sanal birimi tanımlamak için "eksinin artısı," negatif sanal birimi tanımlamak için "eksinin eksisi" terimlerini kullandı.

Örneğin pozitif bir sanal birimin negatif bir sanal birimle çarpımı pozitif bir tamsayıya eşittir, negatif bir sanal birimin negatif bir sanal birimle çarpımıysa negatif bir tamsayıya eşittir.

Eksinin artısı	×	Eksinin artısı	=	Eksi
Eksinin artısı	×	Eksinin eksisi	=	Artı
Eksinin eksisi	×	Eksinin eksisi	=	Eksi
Eksinin eksisi	×	Eksinin artısı	=	Artı

rak çözebildiği genel bir yöntem keşfetti. Del Ferro 1526'da hayatını kaybettiğinde Fior, onun formülünü dünyaya duyurmanın zamanı geldiğine karar verdi. Tartaglia'yı bir üçüncü derece denklem düellosuna davet etti ama Tartaglia'nın üstün yönteminlerine yenik düştü. Bunu duyan Gerolamo Cardano, Tartaglia'yı yöntemlerini kendisiyle paylaşmaya ikna etti. Del Ferro'nun anlaşmasındaki gibi, yöntemin asla yayımlanmaması şart koşuldu.

Pozitif sayıların ötesi

O sırada tüm denklemler pozitif sayılar kullanılarak çözülüyordu. Tartaglia'nın yöntemiyle çalışan Cardano, negatif sayıların kareköklerini kullanmanın üçüncü derece denklemleri çözmeye yardımcı olabileceği düşüncesiyle mücadele etmek zorundaydı. Yöntemi denemeye besbelli hazır olsa da ikna olmuşa benzemiyordu. Söz konusu negatif çözümleri "kurmaca" ve "yanlış" olarak niteleyip, bulunmalarına harcanan düşünsel gayreti "zihinsel işkence" diye tabir etti. *Ars Magna* başlıklı eserinde negatif kareökü nasıl kullandığını ortaya koymuştur. Şöyle yazar: "5 + $\sqrt{-15}$ ile çarpıldığında 25 −(−15) bulunur, ki bu + 15'tir. Dolayısıyla çarpım 40'tır". Karmaşık sayı içeren yazılı ilk hesaplama bu olmasına karşın, bu önemli buluşu Cardano es geçip çalışmasına "muğlak" ve "işe yaramaz" yaftalarını yapıştırdı.

Sayıları açıklamak

Üçüncü derece denklemleri çözmeye uğraşan çeşitli matematikçilerin arasındaki mücadeleyi, Rafael Bombelli özümsedi. Cardano'nun *Ars Magna*'sını büyük hayranlıkla okudu. Kendisinin ürettiği eseri Algebra, daha kolay anlaşılır türdendi, konunun etraflı ve yenilikçi bir incelemesiydi. Eserde negatif sayıların aritmetiği araştırılıyor ve öncesine kıyasla büyük bir ilerlemeyi temsil eden tasarruflu bir notasyona yer veriliyordu.

Eserde pozitif ve negatif niceliklerle hesap yapmanın temel kuralları özetlenir, mesela: "artı çarpı artı, artı eder; Eksi çarpı eksi, artı eder." Sonra, sanal sayıları toplama, çıkarma ve çarpma kuralları günümüzde matematikçilerin kullandığından farklı terimlerle sıralanır. Örneğin Bombelli, "Eksinin artısı çarpı eksinin artısı, eksi eder" der, yani pozitif bir sanal sayı ile pozitif bir sanal sayı çarpıldığında sonuç negatif bir sayı olur: $\sqrt{-n} \times \sqrt{-n} = -n$. Bombelli karmaşık sayılarla ilgili kurallarının, çözümün sonucu negatif bir sayının karekökünün

Rafael Bombelli

1526'da İtalya'nın Bologna şehrinde doğan Rafael Bombelli, altı kardeşin en büyüğüydü. Babası yün tüccarıydı. Bombelli yükseköğrenim görmese de bir mühendis mimardan eğitim aldı ve mühendis olup hidrolikte uzmanlaştı. Matematiğe de ilgi duydu, hem eskilerin hem de çağdaşı olan matematikçilerin çalışmalarını inceledi. Bir drenaj projesinin yeniden başlamasını beklediği zaman zarfında önemli eseri için kolları sıvadı. *Algebra* başlıklı bu yapıtında, ilk olarak, karmaşık sayıların aritmetiği ilkel düzeyde ama etraflıca sunuluyordu.

Diyofantus'un *Arithmetica*'sının Vatikan'ın kütüphanesindeki bir nüshasından çok etkilenen Bombelli, kitabın İtalyancaya çevrilmesine yardımcı oldu ve bunun üzerine Algebra'yı gözden geçirdi. Üç cilt, öldüğü 1572 yılında, eksik son iki ciltse 1929'da yayımlandı.

Önemli eseri

1572 ***Algebra (Cebir)***

> Gerçeğin mıntıkasında iki hakikat arasındaki en kısa yol, karmaşığın mıntıkasından geçer.
> **Jacques Hadamard**
> **Fransız matematikçi**

bulunması gereken üçüncü derece denklemlere uygulanışına dair örnekler de verdi. Bombelli'nin notasyonu zamanının ötesinde olmasına rağmen cebirsel simgelerin kullanımı henüz emekleme dönemindeydi. İki yüzyıl sonra İsviçreli matematikçi Leonhard Euler sanal birim için *i* simgesini kullanıma sundu.

Karmaşık sayıların uygulanması

Denklem çözmek ve giderek karmaşıklaşan diğer matematik işlemlerini yapmak için kullanılan doğal sayılar, gerçel sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar gibi sayı kümelerinin arasına sanal ve karmaşık sayılar da katıldı.

On yıllar geçtikçe bu tür sayı kümeleri formüllerde kullanılabilecek kendi evrensel simgeleri oldu. Örneğin bir sayı kümesinin belirtilmesi amacıyla süslü ayraçlar içerisine alınmış {0, 1, 2, 3, 4...} kümesindeki doğal sayılar için kalın ve büyük yazılan N kullanılır. 1939'da Amerikalı matematikçi Nathan Jacobson, a ve b gerçel sayılar ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $\{a + bi\}$ karmaşık sayılar kümesini simgelemesi için kalın ve büyük C'yi belirledi.

Tüm polinom denklemlerin eksiksiz olarak çözülmesini sağlamayan karmaşık sayıların, buna ilaveten, matematiğin diğer dallarında da, hatta sayı kuramında bile (başta pozitif sayılar olmak üzere tamsayıların incelenmesi) son derece yararlı olduğu görüldü. Sayı kuramcıları, tamsayıları karmaşık sayılar (bir gerçel değer ile bir sanal değerin toplamı) gibi düşünerek karmaşık analiz (karmaşık sayılar içeren fonksiyonların araştırması) imkânı sunan etkili tekniklerle tamsayıları araştırabiliyorlar. Örneğin Riemann zeta fonksiyonu karmaşık sayı içeren ve asal sayılar hakkında bilgi sağlayan bir fonksiyondur. Karmaşık sayıların diğer uygulama alanları arasında, fizikçilerin elektromanyetizma, akışkan dinamiği, kuantum mekaniği uygulamaları ve mühendislerin elektronik devre tasarlama ve ses sinyali araştırmaları yer alır. ■

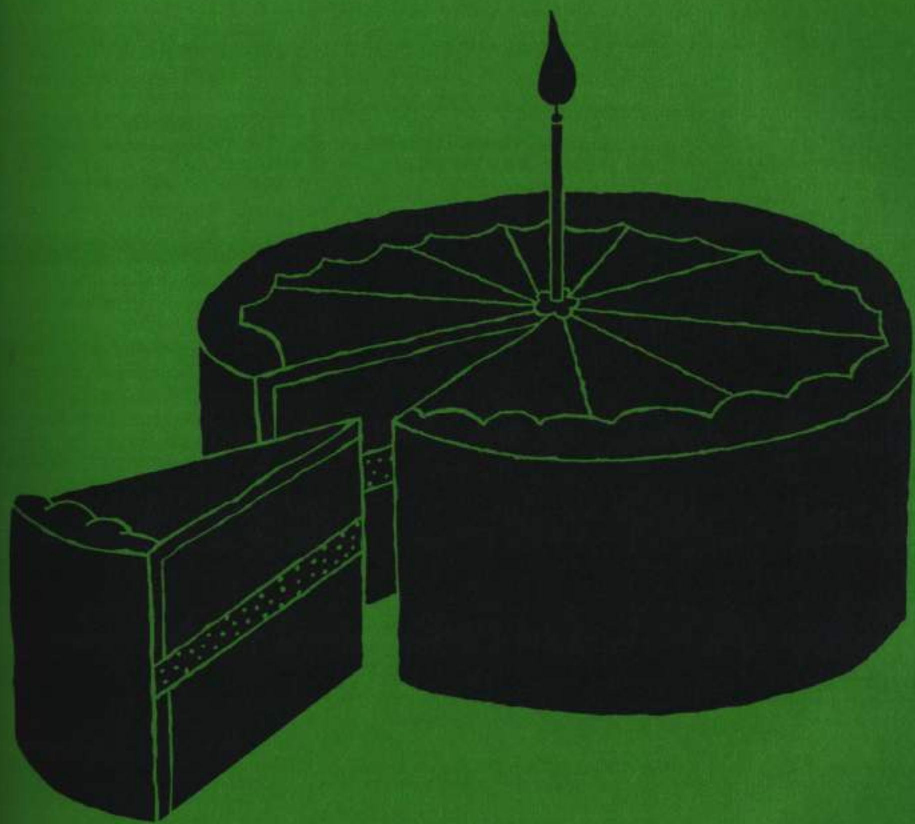
> İnsanlarda, sayıların uygunsuz davranmaması gerektiğine dair çok eskilerden gelen içkin bir algı vardır.
> **Douglas Hofstadter**
> **Biliş bilimci**



Aynı bardağın yan yana dizildiği görselde bir parça buza (solda) mavi renkte gıda boyası damlatılır. Buz parçası eridikçe mavi boya dibe çöker. Karmaşık sayılar bu tür sıvıların hız (sürat ve yön) modellemelerinde kullanılır.

ONDALIK SANATI

ONDALIK SAYILAR



KISACA

KİŞİ
Simon Stevin (1548–1620)

ALAN
Sayı sistemleri

ÖNCE
MS 830 El-Kindî'nin dört ciltlik *On the use of Indian numerals* (*Hint rakamlarının kullanımı üzerine*) eseri sayesinde, Hint rakamlarını temel alan basamak değerli sistem Arap dünyasında yaygınlık kazanır.

1202 Pisalı Leonardo'nun *Liber Abaci*'si Arap sayı sistemini Avrupa'ya taşır

SONRA
1799 Fransız Devrimi sırasında Fransız para birimine ve ölçülerinde metrik sistem kullanıma sokulur.

1971 İngiltere, Latin sisteminden gelen paunt, şilin ve peniden vazgeçer.

"Kırmak" anlamına gelen Latince sözcük *fractio*'dan adını alan kesirler [*fractions*], MÖ 1800'den başlamak üzere Mısır'da, bir bütünün parçalarını ifade etmek için kullanılıyordu. Başlarda, payı (üstteki sayısı) 1 olan kesirler anlamına gelen birim kesirlerle sınırlıydılar. Antik Mısırlıların $^2/_3$ ve $^3/_4$ için simgeleri vardı, ancak diğer kesirler birim kesirlerin toplamı şeklinde gösteriliyordu, örneğin $^1/_3 + ^1/_{13} + ^1/_{17}$. Bu sistem miktarları kaydetmede işe yarıyor, hesaplamalarda yaramıyordu. Simon Stevin'in *De Thiende* (*Ondalık Sanatı*) 1585'te yayımlanana dek yaygınlaşan ondalık sayı sistemi olmadı.

10'un önemi

Flaman mühendis ve matematikçi Simon Stevin 16. yüzyılın sonları ve 17. yüzyılın başlarındaki çalışmalarında sık sık hesaplama yapıyordu. Kesirleri, on sayısının kuvvetlerinden oluşan bir taban sistemiyle kullanarak bu hesaplamaları basitleştirdi. Stevin'ın, bir ondalık sayı sisteminin önünde sonunda evrenselleşeceği yönündeki tahmini doğru çıktı. Tarih boyunca kültürler, bir bütünün parçalarını ifade etmek için çok çeşitli tabanlar kullanmıştı.

> İyi bir notasyon, beyni lüzumsuz çabadan büsbütün kurtarıp daha ileri problemler üzerinde yoğunlaşması için özgür kılar.
>
> **Alfred North Whitehead**
> **İngiliz matematikçi**

Antik Roma'da kesirler 12-tabanlı bir sisteme dayanıyor ve sözcüklerle yazılıyordu: $^1/_{12}$'ye uncia, $^1/_{24}$'e semiuncia deniyordu. Ne var ki bu külfetli sistem insanların hesap yapmasını zorlaştırıyordu. Babilliler kesirleri, kendilerine ait 60-tabanlı sayı sistemlerini kullanarak ifade ediyorlardı, ama tamsayıları temsil eden sayılar ile bir bütünün parçası olan sayıları yazılı olduklarında ayırt etmek güçtü. Avrupalılar sayıları yazıya geçir-

Simon Stevin



1548'de günümüzde Belçika sınırları dahilindeki Brugge'de doğan Simon Stevin muhasebeci, veznedar ve yazman olarak çalıştıktan sonra 1583'te Leiden Üniversitesine girdi. Orada, Orangeli William'ın varisi Prens Maurice'le tanışıp arkadaş oldu. Prens'e matematik dersleri veren Stevin ona askeri strateji konusunda da danışmanlık yaptı ve onun görev döneminde İspanya'ya karşı önemli zaferler alındı. 1600'de Prens Maurice, fevkalade bir mühendis de olan Stevin'den üniversitede mühendislik okulu kurmasını istedi. 1604'te başlayan Levazım Dairesi Başkanlığı görevindeyken Avrupa'nın genelinin orduda ve mühendislikte benimseyeceği birçok yenilikçi fikri öne sürdü. Matematik dahil çeşitli alanlarda çok sayıda kitap yazdı. 1620'de vefat etti.

Önemli eserleri

1583 *Problemata geometrica (Geometri Problemleri)*
1585 *De Thiende (Ondalık Sanatı)*
1585 *De Beghinselen der Weeghconst (Ağırlık Ölçme Sanatının İlkeleri)*

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Fibonacci dizisi 106–11 ▪ İkili sayılar 176–77

mek ve hesaplama yapmak için yüzyıllarca Roma rakamlarını kullandılar.

Ortaçağda yaşamış İtalyan matematikçi Pisalı Leonardo (Fibonacci adıyla da tanınır) Arap dünyasındaki gezisinde basamak değeri temelli Hint sayı sistemine rastladı. Tamsayıların yazıya geçirilmesi ve hesap yapılmasında ne kadar kullanışlı ve etkili olduğunu çabucak kavradı. Arapların ürettiği birçok kavramı Batıya taşıyan *Liber Abaci* (1202) yeni bir kesir notasyonunu da Avrupa'ya tanıtarak günümüzde kullanılan notasyonun kaynağı oldu. Fibonacci'yse payı paydaya (alttaki sayıya) bölmek için yatay bir çubuk kullandı ancak Arapların kesri tamsayının sağı yerine soluna yazma âdetini sürdürdü.

Ondalık sayıların tanıtılması

Geleneksel kesirlerin hem zamana hem de hatalara mal olduğunu fark eden Stevin bir ondalık sistemi kullanmaya başladı. Paydası 10'un kuvvetleri olan "ondalık kesirler" kavramı Stevin'den beş yüzyıl önce Ortadoğu'da kullanılmıştı ama bir bütünün parçalarının yazıya dökülmesi ve hesaplamalarda kullanılması bakımından ondalık sayıların Avrupa'da yaygınlaşmasını sağlayan, Stevin oldu.

Stevin, basamak değerini temel alan Hint sayı sistemininin tamsayılar için yararlarını olduğu gibi aktardığı bir notasyon sistemini ondalık kesirler için önerdi. Daha önce kesirlerin toplamı biçiminde yazılan sayılar, örneğin 32 + 5⁄10 + 6⁄100 + 7⁄1000, Stevin'in yeni notasyonunda artık tek bir sayıyla yazılabilecekti. Stevin her sayının sağına bir yuvarlak koydu; bunlar başlangıçtaki ondalık kesrin paydasını kısa yoldan temsil ediyordu. 32'den sonra, 32 tamsayı olduğundan, 0 geliyordu; 6⁄100 ise, örneğin, 6 ve bir yuvarlağın içindeki 2'yle ifade ediliyordu. 100, 10^2'ye eşit olduğundan bu 2 sayısı, başlangıçtaki paydanın 10'un kaçıncı kuvveti olduğunu

> Ondalık sayılar, ondalık kavramını sağladığı ilerlemeden doğan bir tür aritmetik icadıdır ve sıfır karakterlerine de yer verir.
> **Simon Stevin**

Kesirler **ondalık sisteme çevrilirken paydaları** (alttaki sayısı) **10'un bir kuvveti** olan **ondalık kesirlere** dönüştürülür.



Kesri **ondalık sayı** olarak yazmak için, dönüştürülen kesrin **payı** (üstteki sayısı) kullanılır; örneğin 25⁄100, 0,25 olur.



Pay, **ondalık virgülü** gibi bir ondalık **ayracın** soluna yazılarak sayının **tamsayı olmadığı** gösterilir.



Ondalık sistem tamsayı olmayan miktarların **toplanıp çıkarılmasını** kolaylaştırır.

Stevin'in notasyonunda, dönüştürülen kesrin paydasının 10'un kaçıncı kuvveti olduğunu belirtmek için yuvarlaklar kullanılıyordu. Burada, günümüzde 32,567 olarak ifade edilen sayıyı Stevin'in nasıl yazacağı gösterilmektedir.

3 2 ⓪ 5 ① 6 ② 7 ③

Ondalık sistem kesirlerin bölünmesini ve çarpılmasını kolaylaştırır, özellikle de 10'la. Buradaki 32,567 (veya $32 + 5/10 + 6/100 + 7/1{,}000$) örneğinde sayılar bir sütun sola veya sağa kayarak ondalık ayracının diğer tarafına geçer.

	Yüzler 100	Onlar 10	Birler 1	Onda birler $\frac{1}{10}$	Yüzde birler $\frac{1}{100}$	Binde birler $\frac{1}{1000}$	On binde birler $\frac{1}{10{,}000}$
× 1		3	2	5	6	7	
× 10	3	2	5	6	7		
÷ 10			3	2	5	6	7

simgeliyordu. Benzer şekilde $7/1000$ de, 7 ve onun arkasından gelen yuvarlağın içindeki 3'e dönüşüyordu. Toplamın tamamı, bu örüntü izlenerek yazılabiliyordu (bkz. s. 135, sağ altta). Bir sayının tamsayı kısmıyla kesir kısmının arasına koyulan simgeye ondalık ayracı denir. Stevin'in yuvarlağın içindeki sıfır kavramı daha sonra, günümüzde ondalık virgülü adı verilen virgüle dönüştü. Stevin'in notasyonunda virgülün konumu orta çizgi hizasındaydı (orta yükseklikte) ama ara sıra çarpma işlemi için kullanılan nokta notasyonuyla karışmaması için alt satır çizgisi hizasına taşındı. Stevin'in 10'un kuvvetleri için belirlediği yuvarlaklar da kullanımdan kaldırıldı, yani $32 + 5/10 + 6/100 + 7/1000$ artık 32,567 şeklinde yazılabiliyordu.

Farklı sistemler

Ondalık noktası hiçbir zaman evrensel çapta kabul edilmedi. Birçok ülke ondalık ayracı olarak nokta yerine virgül kullanır. Binlik ayracının (çok büyük veya bazen çok küçük bir sayının tamsayı kısmındaki üç haneli grupları ayıran simgeler) kullanımı olmasa iki yaygın notasyonla ilgili bir sorun kalmazdı. Örneğin Birleşik Krallık'ta 2,500,000 sayısındaki virgüller binlik ayraçlarıdır ve hem sayının okunmasını hem de büyüklüğünün anlaşılmasını kolaylaştırmak için kullanılır. Birleşik Krallık'ta ondalık ayracı için nokta, binlik ayracı için virgül kullanılır. Dünyanın diğer yerlerinde, ondalık ayracı olarak virgül kullanılıyorsa, binlik ayracı için nokta kullanılır. Örneğin Vietnam'da, iki yüz bin Vietnam dongunun fiyatı genellikle 200.000 şeklinde yazılır.

İnsanların notasyonu anlamlandırmasına bağlam çoğu zaman yetebilir ama öte yandan bu durum ciddi aksiliklere de yol açabilir. Bu probleme çözüm getirmek üzere toplanan, ağırlık ve ölçülerin ele alındığı 22. Genel Konferans'ta (Uluslararası Ağırlıklar ve Ölçüler Bürosundan 60 ülke temsilcisinin katıldığı toplantı), ondalık ayracı olarak satır çizgisi hizasında ister nokta ister virgül kullanılabilmesine karar verilmekle birlikte, binlik ayraç



İspanya'da kullanılan ondalık ayracı, Katalonya'daki bu pazar tezgâhında da görüldüğü gibi, virgüldür. İspanyolcada elyazısında üst virgül (apostrofun benzeri) de yaygındır.



Paris'teki Vaugirard caddesinde bulunan bu mermer levha, metrenin tanımı ilk olarak Fransız Académie des Sciences kurumunca 1792'de yapıldıktan sonra döşenen 16 hakiki metre göstergesinden biridir.

için bu iki simgeden biri yerine boşluk belirlendi. Bu notasyon henüz evrensellik kazanmış değil.

Ondalık sayıların faydaları

Tamsayıları toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin aynısı ondalık sayılarla da yapılabilir. Bu sayede temel aritmetik işlemler önceki yönteme göre çok daha kolay bir yoldan yapılır. Önceki yöntemde kesirlerle hesap yapmak için farklı kural dizilerini öğrenmek gerekiyordu. Örneğin kesirlerle çarpma işlemi yaparken paylar paydalardan ayrı çarpılıyor, ardından sonuçta elde edilen kesir indirgeniyordu. Ondalık kesirlerdeyse 10'un kuvvetleriyle çarpmak ve bölmek dolambaçsızdır; 32,567 örneğindeki (bkz. sol üstte) gibi ondalık ayracı basitçe sola veya sağa taşınabilir.

Stevin ondalık sisteme dayalı para sistemi, ağırlık ve ölçülerin evrensel düzeyde kullanıma girmesinin an meselesi olduğuna inanıyordu. Uzunluk ve ağırlık için ondalık ölçüler (metre ve kilogramın kullanıldığı), Avrupa'da bundan 200 yıl kadar önce, Fransız Devrimi sırasında kullanıma girmişti. Fransa, metrik sistemi kullanmaya başladığında, zaman için de bir ondalık sistemi kullanıma sokmaya çalıştı; bir günde 10 saat, bir saatte 100 dakika ve bir dakikada 100 saniye olacaktı. Girişimleri öyle az rağbet gördü ki sadece bir yıl sonra rafa kaldırıldı. Çinlilerse aşağı yukarı 3000 yıllık bir zaman zarfında çeşitli ondalık zaman kalıplarını uygulamaya koymuş ama en sonunda MS 1645'te ondalık zaman kullanımını bırakmışlardı.

ABD'de, ölçüm ve para sisteminde ondalık sistemin kullanılmasını Thomas Jefferson savunuyordu. Jefferson, 1784 tarihli makalesiyle, Kongreyi dolar, on sent [*dime*] ve sentin kullanıldığı bir ondalık para sistemine geçmeye ikna etti. Hatta "*dime*" sözcüğü *The Art of Tenths*'in Fransızcasına atılan Disme başlığından gelir. Ne var ki Jefferson'ın görüşü ölçüler için işlemedi ve inç, fit ve yarda günümüzde halen kullanılmaktadır. Avrupa'da para birimlerinin çoğunda 19. yüzyılda ondalık sisteme geçilmesine rağmen, ondalık para birimi Britanya Krallığı'nda 1971'de kullanıma girdi. ■

Devirsiz ve devirli ondalık sayılar

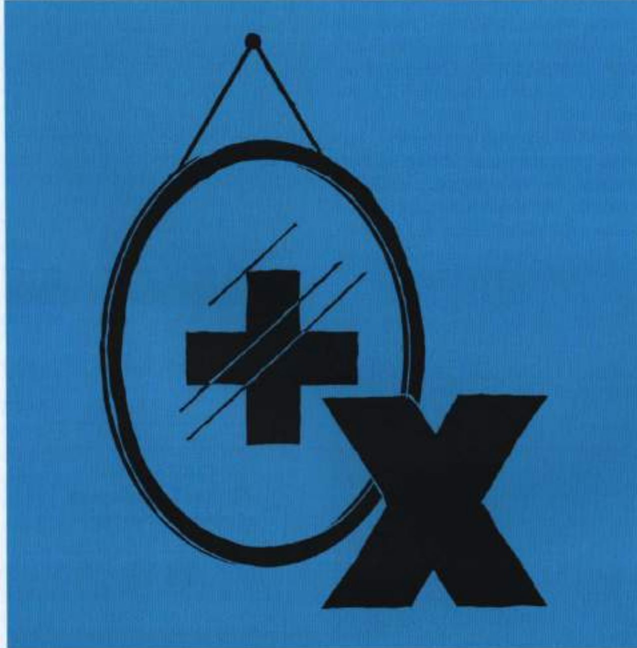
Kesirler, pay paydaya bölünerek ondalık sayılara dönüştürülür. Pay yalnızca 2 veya 5'e bölünebiliyor ve başka asal sayıya bölünemiyorsa (10 için olduğu gibi), o zaman ondalık sayı devirsizdir. Örneğin $^3/_{40}$, 0,075 şeklinde ifade edilebilir, ayrıca tam bir değerdir çünkü 40 yalnızca 2 ve 5 asal sayılarıyla bölünebilir.

Diğer kesirler devirli ondalık sayılara dönüşür, yani sona ermezler. Örneğin $^2/_{11}$'in ondalık sisteme göre yazılışı şöyledir: 0,18181818... Hem 1 hem de 8'in devrettiğini göstermek için $0.\dot{1}\dot{8}$ şeklinde simgelenir. Devreden kısmın uzunluğu ($0.\dot{1}\dot{8}$ için iki sayı), payın **1** eksiğinin bir çarpanı olacağından, tahmin edilebilir (dolayısıyla kesrin paydası 11'se, devreden kısımdaki rakamların sayısı 10'un bir çarpanı olur). Bunlar, sonlu olmayan ve devirli örüntü içermeyen irrasyonel sayılardan farklıdır. İrrasyonel sayılar iki tamsayının kesri olarak ifade edilemez.

> “Bilim tarihinin belki de en önemli olayı, ondalık sistemin icadıdır…”
>
> **Henri Lebesgue**
> **Fransız matematikçi**

ÇARPMAYI TOPLAMAYA DÖNÜŞTÜRMEK

LOGARİTMALAR



KISACA

KİŞİ
John Napier (1550–1617)

ALAN
Sayı sistemleri

ÖNCE
14. yüzyıl Hintli matematikçi Keralalı Madhava, dik üçgenlerin açılarının hesaplanmasına yardımcı olması için trigonometrik sinüslerin isabetli bir tablosunu çıkarır.

1484 Fransa'da Nicolas Chuquet geometrik serileri kullanarak hesaplama üzerine bir makaleyi kaleme alır.

SONRA
1622 İngiliz matematikçi ve din adamı William Oughtred, üzerinde logaritmik ölçekler bulunan sürgülü cetveli icat eder.

1668 Alman matematikçi Nicholas Mercator, *Logarithmo-technia*'da "doğal logaritmalar" terimini ilk defa kullanır.

Binlerce yıl çoğu hesaplama, sayma tablosu veya abaküs gibi araçlar kullanılarak elle yapıldı. Özellikle çarpma bıktırıcı ve toplamaya kıyasla çok daha zordu. 16. ve 17. yüzyıllardaki Bilim Devriminde güvenilir bir hesaplama aletinin olmaması, fazlasıyla uzun hesaplamalar gerektirdiği için hata olasılığı daha yüksek olan denizcilik ve astronomi gibi alanlarda kaydedilecek ilerlemelerin önüne geçti.

Serilerle çözüme ulaşmak

15. yüzyılda Fransız matematikçi Nicolas Chuquet, aritmetik ve geometrik dizilerin arasındaki ilişkinin, hesaplamayı nasıl kolaylaştı-

Ayrıca bkz. Satranç tahtasındaki buğday 112–13 ▪ Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Asal sayı teoremi 260–61

16. yüzyılda **büyük sayıları çarpmak uzun ve zahmetli** bir işlemdi.

↓

John Napier **sayı tabloları** geliştirerek bu işlemi **basitleştirdi**.

→

Bu tablolarda her sayının eşdeğer bir **"yapay sayısı"** ya da **logaritması** vardı.

↓

İki sayı, **logaritmalarının toplanıp** sonucun tekrar sıradan bir sayıya **dönüştürülmesiyle** çarpılabiliyordu.

←

Logaritmalar matematikçilerin **karmaşık çarpma işlemlerini toplama işlemleriyle** tamamlamasını sağlar.

abileceğini araştırdı. Bir aritmetik dizideki her sayı ile ondan bir önceki sayı arasında sabit bir nicelik kadar fark vardır; örneğin 1, 2, 3, 4, 5, 6... (1'er 1'er artan) veya 3, 6, 9, 12... (3'er 3'er artan). Geometrik bir dizide, ilk terimden sonraki her sayı, kendisinden önceki sayının "ortak oran" adı verilen belirli bir miktarla çarpılmasıyla belirlenir. Örneğin 1, 2, 4, 8, 16 dizisinin ortak oranı 2'dir. Bir geometrik dizi (1, 2, 4, 8... gibi) ve onun üzerine de bir aritmetik dizi (1, 2, 3, 4...) yazıldığında, üstteki sayıların, 2'nin aşağıdaki serideki sayıları veren üsleri olduğu görülebilir. İskoç toprak sahibi John Napier'ın geliştirdiği logaritma tablolarının temelini, bu yöntemin çok daha karmaşık bir çeşidi oluşturuyordu.

Logaritmaları üretmek

Napier sayılara büyük bir ilgi duyuyor ve zamanının büyük bölümünü hesaplamaları kolaylaştırmanın yollarını aramaya ayırıyordu. 1614'te, ilk logaritma tanımını ve tablosunu yayımladı; belirli bir sayının bir logaritması, sabit başka bir sayının (taban) o belirli sayıyı veren üssü veya kuvvet derecesi-

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Bu tablodaki alt satır geometrik bir dizi (2'nin gitgide artan kuvvetleri), üst satırsa 2'nin, alt satırdaki sayıları veren üslerinin (kuvvet derecelerinin) gösterildiği bir aritmetik dizidir. (Her sayının 0'ıncı kuvveti 1'dir.) Alt satırdaki 16 ve 32 sayılarını çarpmak için, bu sayıların üsleri (4 + 5) toplanır ve 2^9 (= 512) elde edilir.



John Napier

John Napier 1550'de Edinburgh civarındaki Merchiston kalesinde, varlıklı bir ailenin çocuğu ve geleceğin 8. Merchiston Lordu olarak dünyaya geldi. Henüz 13 yaşında St. Andrews Üniversitesine girdi ve teoloji, tutkulu bir merakı oldu. Mezun olmadan önce Avrupa'da okumak üzere buradan ayrıldı ama bu dönemiyle ilgili çok az bilgi sahibiyiz.

Napier 1571'de İskoçya'ya döndü ve vaktinin büyük bölümünü mülküne ayırıp toprağını ve hayvancılığını geliştirmek üzere yeni tarımcılık yöntemleri tasarladı. Koyu bir Protestan olarak Hıristiyanlığı hedef alan önemli bir de kitap yazdı. Astronomiye duyduğu ilgisi ve astronominin gerektirdiği hesaplamaları yapmanın daha basit yollarını bulma arzusu logaritmaları icat etmesini sağladı. Bunlara ek olarak, üzerinde sayılar bulunan çubukların kullanıldığı bir hesaplama aleti olan Napier'ın Kemiklerini yarattı. Napier 1617'de Merchiston Kalesinde hayata veda etti.

Önemli eserleri

1614 *Logaritmanın Olağanüstü Kurallarının Açıklaması*
1617 *Rabdologiae*

dir. Bu tabloların kullanılmasıyla karmaşık hesaplamaları kolaylaştırdı ve trigonometrinin daha çabuk geliştirilmesini sağladı. Napier hesaplamanın temel ilkesinin yeterince basit olduğunu fark etti: Zahmetli çarpma işleminin yerine daha basit olan toplama işlemini koyabilirdi. Her sayının eşdeğer bir "yapay sayısı" (Napier'ın ilk aşamada belirlediği terim) olacaktı. (Napier daha sonra, Yunancada orantı anlamına gelen *logos*'la, sayı anlamına gelen *arithmos*'un birleşiminden türetilen "logaritma" isminde karar kıldı.) İki logaritmanın toplanması ve ardından yanıtın tekrar sıradan sayıya dönüştürülmesiyle, başlangıçtaki sayılar çarpıldığında çıkan sonuç elde edilir. Bölme işlemi içinse bir logaritma diğerinden çıkarılır ve sonuç yeniden dönüştürülür.

Napier logaritmalarını üretmek için iki paralel çizgi üzerinde ilerleyen iki parçacığı gözünün önüne getirdi. İlk çizgi sonsuz uzunluktaydı, ikincinin uzunluğuysa sabitti. İki parçacık da aynı başlangıç konumundan aynı anda ve aynı hızda çıkıyordu. Sonsuz çizginin üzerindeki parçacık düzgün hareketle ilerliyor, dolayısıyla eşit sürelerde eşit mesafeleri katediyordu. İkinci parçacığın hızı, çizginin sonuna kadar olan mesafeyle orantılıydı. İkinci parçacık başlangıç noktasıyla çizginin sonunun tam ortasında başlangıç hızının yarısıyla, çizginin dörtte üçünü katettiği noktada ilk hızının çeyreğiyle ilerlemektedir vb. Bunun anlamı, ikinci parçağın çizginin sonuna asla erişemeyeceği, aynı şekilde ilk parçacığın sonsuz çizgi üzerindeki yolculuğu asla sona ermeyecektir. Herhangi bir anda iki parçacığın konumlarının arasında özel bir ilişki vardır. İlk parçacığın katettiği mesafe ikinci parçacığın kalan mesafesinin logaritmasıdır. İlk parçacığın ilerleyişi aritmetik bir ilerleyiş, ikinci parçacığınkiyse geometrik bir ilerleyiş olarak görülebilir.

> Çok uzun bir sürede kısa kısa ve mükemmel birtakım kurallar buldum.
> **John Napier**

Yöntemi iyileştirmek

Napier'ın hesaplamalarını tamamlayıp ilk logaritma tablolarını *Logaritmanın Olağanüstü Kurallarının Açıklaması* başlığıyla yayımlayana kadar aradan 20 yıl geçti. Oxford Üniversitesinde matematik profesörü olarak görev yapan Henry Briggs, Napier'ın tablolarının önemini takdir etmesine rağmen kullanışsız buldu.

Briggs, Napier'ı 1616 ve 1617 yıllarında ziyaret etti. Münazaralarının sonucunda 1'in logaritmasının 0 olarak, 10'un logaritmasınınsa 1 olarak baştan tanımlanması gerektiği konusunda anlaştılar. Bu yaklaşım logaritmaların kullanımını çok daha kolay kıldı. Briggs, 10'un logaritmasının 1 olduğuna ilişkin saptamalarında yola çıkarak sıradan sayıların logaritmalarının hesaplanmasında da Briggs'in yardımı oldu ve tabloları baştan hesaplamak için birkaç yılını daha ayırdı. Yayımlanan sonuçlar 14 ondalık basamakla hesaplanan logaritmaları içeriyordu. Briggs'in



pH logaritmik ölçeği bazikliği ve asitliği ölçer. 2 değerinde pH, 3 değerinde pH'tan 10 kat, 4 değerinde pH'tan 100 kat daha asidiktir.

Logaritmik ölçekler

Değerlerin düzenli artışlarla değil de üstel olarak değişebildiği ses, akış ve basınç gibi fiziksel değişkenleri ölçerken genellikle logaritmik bir ölçek kullanılır. Bu tür ölçeklerde, ölçülen şeyin gerçek değeri yerine bir değerin logaritması kullanılır. Logaritmik bir ölçekteki heri bir adım, kendisinden önceki adımın herhangi bir katıdır. Örneğin bir $\log_{10}$ ölçeğinde her bir birimlik artış ölçülen şeyde 10 katlık bir artışı yansıtır.

Yankıbilimde ses şiddeti desibelle ölçülür. Desibel ölçeğinin referans düzeyi, 0 dB olarak tanımlanan işitme eşiğidir. 10 kat daha yüksek bir sese 10 desibel değeri, 100 kat daha yüksek bir sese 20 desibel değeri, 1000 kat daha yüksek bir sese 30 desibel değeri atanır vb. Bir sesin, insan kulağınca 2 kat daha yüksek algılanması için 10 kat daha şiddetli olması gerektiğinden, bu logaritmik ölçek işitme duyumuz için uygundur.



Napier'ın logaritmaları açıkladığı kitabı, başlık sayfasında da görüldüğü üzere, 1614'te yayımlandı. Logaritma tablolarının ilkeleri ölümünden iki yıl sonra, 1619'da yayımlandı.

14 ondalık basamakla hesapladığı 10-tabanlı logaritmalar $\log_{10}$ veya bayağı logaritmalar olarak bilinir. Daha önceki 2'nin kuvvetleri tablosu (bkz. s 139) basit bir 2-tabanlı veya $\log_2$ tablosu olarak düşünülebilir.

Logaritmaların etkisi

Logaritmaların bilime doğrudan etkisi özellikle astronomide hissedildi. Alman astronom Johannes Kepler 1605'te gezegen hareketlerine ilişkin ilk iki yasasını yayımladı ama devrim niteliğindeki üçüncü yasasını keşfetmesi ancak logaritmik tabloların icadından sonra mümkün oldu. Bu yasa, bir gezegenin güneşin etrafındaki yörüngesinde bir turu tamamlaması için gereken sürenin, o gezegenin ortalama yörünge uzaklığıyla ilişkisini açıklar. Kepler 1620'de *Ephemerides novae motuum coelestium* başlıklı kitabında yayımladığı bu keşfini Napier'a adadı.

Üstel fonksiyon

Daha sonra, 17. yüzyılda logaritmalar sayesinde daha da önemli bir şey su yüzüne çıktı. Sayı serilerini incelemekte olan İtalyan matematikçi Pitero Mengoli, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ almaşık serisinin değerinin yaklaşık 0,693147... değerinde ve 2'nin doğal logaritması olduğunu ortaya koydu. Doğal logaritmanın (*ln*) (doğal olarak oluştuğu için böyle adlandırılır; belli bir büyüme düzeyine ulaşmak için gereken süreyi gösterir), sonraları e simgesiyle anılacak, yaklaşık değeri 2,71828 olan özel bir tabanı vardır. Bu sayı doğal büyüme ve azalma ile ilişkisinden dolayı matematikte son derece önemli bir yere sahiptir.

Önem taşıyan üstel fonksiyon kavramını gün ışığına çıkaran, Megnioli'nin yürüttüğü ve benzeri araştırmalardı. Bu fonksiyon, finans ve istatistiğin yanı sıra bilimin başka birçok alanında yeri olan üstel büyümeyi temsil etmek maksadıyla kullanılır. Üstel büyümede, belirli herhangi bir anda, bir niceliğin artışı o niceliğin büyüklüğüyle orantılıdır, dolayısıyla ne kadar büyükse o kadar hızlı artar. Üstel fonksiyon, b'nin 0'dan büyük olup 1'e eşit olmadığı, x'inse herhangi bir gerçel sayı olabildiği, $f(x) = b^x$ biçimindedir. Matematikte, logaritmalar üstellerin (sayıların kuvvetleri) tersidir ve herhangi bir tabana sahip olabilir.

> [Napier] harcanan emeğin süresini kısaltarak astronomların ömrünü ikiye katlamıştır.
> **Pierre-Simon Laplace**

Euler'in çalışması için bir temel

Hatasız logaritmik tablolar elde etme arayışı Nicholas Mercator gibi matematikçileri bu alanda başka araştırmalar yürütmeye teşvik etti. 1668'de yayımlanan *Logarithmotechnica*'da, $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$ doğal logaritması için bir seri formülü çıkardı Mercator. Mengoli'nin x'in 1'e eşit olduğu tespitine bir eklemeydi bu. Napier'ın ilk logaritmik tablosunu olştuturmasından 130 yıldan fazla bir zaman sonra, 1744'te, İsviçreli matematikçi Leonhard Euler e^x ve e^x'in doğal logaritma ile ilişkisi üzerine eksiksiz bir açıklama yayımladı. ■



1941'de bir Kadın Yardımcı Hava Kuvvetleri mensubunun burada kullandığı sürgülü cetvelin üzerinde çarpma, bölme ve daha başka işlemleri kolaylaştıran logaritmik ölçekler bulunmaktadır. 1622'de icat edilen bu gereç, cep tipi hesap makinelerinin icadından önce son derece önemli bir matematik aracıydı.



DOĞA HER ŞEYİN OLABİLDİĞİNCE AZINI KULLANIR

MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMİ

KISACA

KİŞİ
Johannes Kepler (1571–1630)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ y. 240 Mekanik Teoremlerin Yöntemi bölünmezlerden yardım alarak eğrisel şekillerin alan ve hacimleri hakkında tahmin yürütür.

SONRA
1638 *Eğrilerin Maksimum ve Minimum Noktalarını ve Teğetlerini Bulma Yöntemleri* yapıtını yayar.

1671 *Seriler ve Akılar Yöntemi Üzerine İnceleme* Newton, fonksiyonların maksimum ve minimum noktaları gibi problemleri çözmeye yönelik yeni analitik yöntemler üretir.

1684 *Maksimum ve Minimum Noktalar İçin Yeni Yöntem* yayımlar.

Astronom Johannes Kepler, daha çok, gezegenlerin yörüngelerinin eliptik şeklini keşfetmesi ve gezegen hareketlerine ilişkin üçüncü yasasıyla bilinir ama matematiğe de büyük bir katkıda bulunmuştur. 1615'te fıçı gibi eğri şekilli katıların maksimum hacimlerini hesaplamanın bir yöntemini icat etti.

Kepler bu araştırma alanına ikinci karısıyla evlendiği 1613'te merak salmıştı. Düğündeki şarap tüccarı fıçıdaki şarabı ölçmek için bir çubuğu tepedeki delikten çaprazlamasına sokup şarabın çubuğun neresine kadar geldiğine bakması ilgisini çekmişti. Kepler her fıçı şekli için bunun işe yarayıp yaramadığını merak etti ve kazıklanmış olabileceği şüphesiyle hacimler meselesini analiz etmeye karar verdi. Ulaştığı sonuçları 1615'te, *Nova stereometria doliorum vinariorum* (*Şarap Fıçılarının Yeni Katı Geometrisi*) başlığı altında yayımladı.

Kepler, eğri şekillerin alan ve hacimlerini hesaplamanın yollarını inceledi. İlkçağlardan itibaren matematikçiler "bölünmezleri" (bölünemeyecek kadar ufak öğeler) kullanmayı tartışmışlardı. Teoride bunlar herhangi bir şekle sığdırılabilir ve birbirlerine eklenebilirler. Örneğin bir dairenin alanı incecik pasta dilimleri şeklindeki üçgenler aracılığıyla belirlenebilir.

Kepler bir fıçının veya başka herhangi bir üç boyutlu şeklin hacmini bulmak için, onu bir ince katmanlar

Kepler **şarap tüccarlarının onu kazıklandığını** hissetti ve **bir fıçının içeriğini ölçmenin** hassas bir yolunu bulmak istedi.

↓

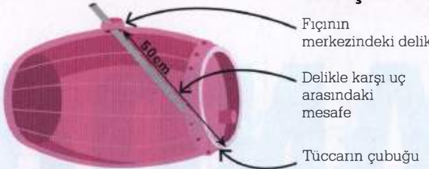
Arşimet'ten esinlenip şarabın hacmini tam olarak bulmak için **sonsuz küçükler yöntemini** uygulayarak fıçıyı ince kesitlere böldü.

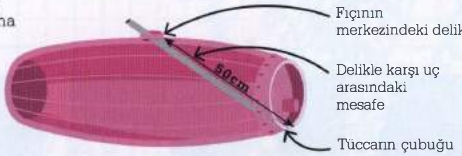
↓

Kepler'in kullandığı yöntem, **kalkülüsün geliştirilmesi** yönünde atılan anahtar bir adımdı.

Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Koordinatlar 144–51 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–83

Tüccarın çubuğu bu iki fıçıya çaprazlamasına daldırıldığında eşit bir derinliğe iner, dolayısıyla tüccar iki fıçıya da aynı fiyatı biçer. Oysa ikinci fıçının uzatılmış şekli, hacminin daha küçük olduğu, yani ilk fıçıya kıyasla aynı fiyata daha az şarap içerdiği anlamına gelir





yığını olarak düşünürdü. Toplam hacim, katmanların hacimlerinin toplamıdır. Fıçı örneğindeki her katman alçak bir silindirdir.

Sonsuz küçükler

Silindirlerle ilgili sorun şudur: Kalınlıkları varsa düz kenarları fıçının eğri şekilli yüzeyine oturmayacaktır ama öte yandan, kalınlığı olmayan silindirlerin hacmi yoktur. Çözümü "sonsuz küçükler" (ortadan kaybolmadan var olabilecek en ince dilimler) kavramını kabul etmekte buldu Kepler. Bu fikir Arşimet gibi Antik Yunan insanlarıyla zaten ortaya atılmıştı. Sonsuz küçükler, sürekli şeylerle süreksiz birimlere bölünmüş şeyler arasında köprü görevi görür.

Kepler daha sonra maksimum hacimli fıçı şekillerini bulmak için kendi silindir yöntemini kullandı. Silindirlerin yüksekliği, çapı ve tepeden tabana çaprazlamasına inen bir doğrunun tanımladığı üçgenlerle çalıştı. Çapraz çizgi, tüccarın çubuğu gibi sabitse fıçı yüksekliğinin değişmesinin hacmi nasıl değiştireceğini irdeledi. Bulduğu sonuca göre maksimum hacimli fıçılar, yüksekliği çapının 1,5 katından birazcık az olan, alçak, bodur fıçılar (düğünündeki fıçılar gibi) oluyordu. Buna karşılık, Kepler'in Rhine ırmağı kıyısındaki memleketinin uzun boylu fıçıları çok daha az şarap alıyordu.

Kepler ayrıca şekil maksimuma yaklaştıkça hacmin artış hızının azaldığını fark etti. Kalkülüsün doğuşuna katkıda bulunan bu gözlem, maksimum ve minimum noktalara yönelik araştırmaların kapısını araladı. Kalkülüs sürekli değişimin matematiğidir ve bu bakımdan maksimum ve minimum noktalar bir değişimdeki dönüm noktaları veya limitlerdir (bir grafiğin tepe veya dip noktalarıdır).

Kepler gibi Pierre de Fermat da, ondan hemen sonra, maksimum ve minimum noktaları analiz etti ve bu sayede 17. yüzyılda Isaac Newton ve Gottfried Leibniz'in kalkülüsü geliştirmesine zemin hazırladı. ■



Johannes Kepler

1571'de Almanya'nın Stuttgart şehrinde dünyaya gelen Johannes Kepler 1577 yılındaki "Büyük Kuyrukluyıldıza" tanık oldu ve astronomi merakını hayat boyu yitirmedi.

Kepler, Avusturya'nın Graz şehrindeki Protestan ruhban okulunda öğretmenlik yaptı. Katolik olmayanlar 1600'de Graz'dan sürülünce Kepler, arkadaşı Tycho Brahe'nin yaşadığı Prag'a taşındı. İlk karısının ve oğulunun ölümünün ardından taşındığı Avusturya'nın Linz şehrinde imparatorluk matematikçisi olarak asli görevi kapsamında astronomi tabloları düzenledi.

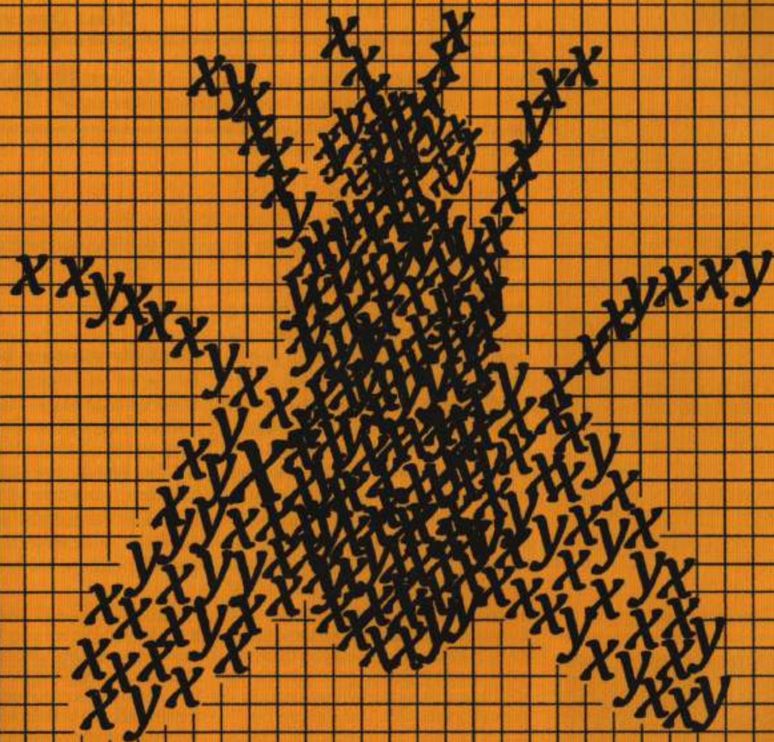
Kepler, Tanrı'nın, evreni matematiksel bir plan doğrultusunda yarattığından emindi. Astronomi araştırmaları, özellikle de gezegen hareketlerine ilişkin yasaları ve astronomi tabloları, en bilinen çalışmalarıdır. 1630'daki ölümünden bir yıl sonra cereyan eden Merkür'ün geçişinin tahminine uygun olduğu gözlemlendi.

Önemli eserleri

1609 *Yeni Astronomi*
1615 *Şarap Fıçılarının Yeni Katı Geometrisi*
1619 *Dünyanın Harmonileri*
1621 *Kopernik'in Astronomisinin Özeti*

TAVANDAKİ SİNEK

KOORDİNATLAR



KISACA

KİŞİ
René Descartes (1596–1650)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ 2. yüzyıl Pergeli Apollonius doğru ve eğrilerin üzerindeki noktaların konumlarını inceler.

y. 1370 Fransız filozof Nicole Oresme nitelik ve nicelikleri, koordinatlarla tanımlanan çizgilerle temsil eder.

1591 Fransız matematikçi François Viète cebirsel notasyonda değişkenler için simgeleri kullanır.

SONRA
1806 Jean-Robert Argand karmaşık sayıları temsil etmek amacıyla bir koordinat düzlemini kullanır.

1843 İrlandalı matematikçi William Hamilton iki yeni sanal birimi ekleyerek dört boyutlu uzayda gösterilen dördeyleri yaratır.

Geometride (şekil ve ölçümlerin incelenmesi) koordinatlar tek bir noktayı (tam olarak bir konumu) sayılarla tanımlamak için kullanılır. Kullanılan farklı birçok koordinat sistemi vardır ancak bunların en yaygını, Fransız filozof René Descartes'ın Latinceleştirilmiş Renatus Cartesius'tan adını alan Kartezyen sistemdir. Descartes, koordinat geometrisini, fen bilimlerinde hakikate ulaşma yöntemlerini öne sürdüğü *Discours de la Méthode* (*Yöntem Üzerine Konuşma*) başlıklı felsefi eserinin üç ekinden biri olan *La Géométrie*'de (*Geometri*, 1637) gözler önüne serdi. Diğer iki ek, ışık ve hava üzerineydi.

> Yalnızca çemberler ve doğrular aracılığıyla inşa edilebilen problemler.
> **René Descartes**
> **geometriyi tanımlıyor**

Yapıtaşları

Koordinat geometrisi, Antik Yunan'da Öklit'in *Öğeler*'i yazdığı 2000 yıl kadar öncesinden beri güç bela gelişen geometri dalını dönüştürdü. Denklemleri çizgilere (çizgileri de denklemlere) dönüştürerek de cebirde devrim yarattı. Bilginler Kartezyen koordinatları kullanarak matematiksel ilişkileri görselleştirebildiler. Çizgiler, yüzeyler ve şekiller de bir tanımlı noktalar silsilesiyle yorumlanabiliyordu ve böylece insanların doğa olguları üzerinde düşünme biçimi değişti. Volkanik patlama veya kuraklık gibi olaylar için şiddet, süre ve frekans gibi unsurların grafiğini çıkarmak, eğilimlerin tespit edilmesine yardımcı olabiliyordu.

Yeni bir yöntem bulmak

Descartes'ın koordinat sistemini nasıl geliştirdiğine ilişkin iki farklı söylenti mevcuttur. Bunların birine göre, yatak odasının tavanında uçuşan bir sineği seyrettiği sırada bu düşünce kafasına dank etmişti. Bitişik iki duvara göre sineğin yerini sayılarla tarif edip konumunu bir grafikte gösterebileceğini fark

René Descartes



René Descartes, Fransa'nın Touraine şehrinde, alt kademeden soylu bir ailenin oğlu olarak dünyaya geldi. Annesi onu doğurduktan kısa süre sonra ölünce büyükannesinin yanına gönderildi. Daha sonra bir Cizvit kolejine girdi, ardından hukuk okumak üzere Poitiers'ye gitti. 1618'de Fransa'dan ayrılıp Hollanda'ya gitti ve paralı asker olarak Hollanda Ordusuna yazıldı.

Descartes bu sıralarda felsefi kavramlar ve matematik teoremleri geliştirmeye başladı. 1623'te Fransa'ya döndüğünde ömrü boyunca yetecek bir gelir elde etmek amacıyla oradaki mülkünü sattı, ardından okumak için tekrar Hollanda'ya taşındı. 1649'da İsveç Kraliçesi Christina onu kendisine özel ders vermesi ve yeni bir akademi kurması için davet etti. Zayıf bünyesi kış soğuğuna dayanamayan Descartes, Şubat 1650'de zatürreye yakalanıp hayata veda etti.

Önemli eserleri

1630–33 *Le Monde (Dünya)*
1630–33 *L'Homme (Man)*
1637 *Discours de la Méthode (Yöntem Üzerine Konuşma)*
1637 *La Géométrie (Geometri)*
1644 *Principia philosophia (Felsefenin İlkeleri)*

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Koni kesitleri 68–69 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Kerte hatları 125 ▪ Viviani'nin üçgen teoremi 166 ▪ Karmaşık düzlem 214–15 ▪ Dördeyler 234–35

Dikdörtgen bir tavanın uzunluğu ve genişliği vardır.

Yatay (*x*) ve **dikey (*y*)** ölçümlerden yararlanılarak iki boyutlu **koordinatların** yerleri saptanır.

Tavandaki bir sineğin konumu böylelikle matematiksel olarak ifade edilebilir.

etmişti. Diğer söylentiyse, 1619'da Güney Almanya'da paralı asker olarak görev yaptığı dönemde söz konusu fikri rüyasında gördüğü yönündedir. Geometri ile cebir arasındaki, koordinat sisteminin dayanağı olan ilişkiyi de o zamanlar çözdüğü düşünülür.

En basit Kartezyen koordinat sistemi tek boyutludur: Konumlar bir doğru üzerinde gösterilir. Doğrunun bir uç noktası sıfır noktası olarak belirlenir; o sıfır noktasından başlanarak, eşit uzunluktaki veya bir uzunluğun eşit parçalarından oluşan aralıklarla, diğer tüm noktalara sırayla sayı atanır. Doğru üzerindeki bir noktayı tarif etmek için sadece tek bir koordinat sayısı yeterlidir (bir mesafeyi cetvelle sıfırdan bir uzunluk birimine kadar ölçmek gibi). Daha yaygın olarak, koordinatlar, uzunluğu ve genişliği olan iki boyutlu yüzeylerdeki veya ayrıca derinliği olan üç boyutlu bir uzaydaki noktaları tarif etmek için kullanılır. Bunun yapılabilmesi için her biri aynı sıfır noktasından veya baş noktadan başlayan, birden fazla sayı doğrusuna ihtiyaç vardır. Düzlem (iki boyutlu düz bir yüzey) üzerindeki bir nokta için, iki sayı doğrusu gereklidir. *x* ekseni adı verilen yatay doğru ve dikey y doğrusu daima birbirine dik olup kesiştikleri tek yer baş noktadır. x eksenine apsis, *y* eksenine ordinat denir. İki eksenden birer sayının "koordinasyonuyla" bir konumun yeri tam olarak gösterilir.

> Eğer fen bilimlerinde tutarlı ve kalıcı olması muhtemel herhangi bir şeyi tesis edeceksem, işe ta en baştan, temelden başlamam gerektiğinin farkına vardım.
>
> **René Descartes**

Grafik değeri okurken bu iki sayı günümüzde sıralı değişken grubu (belli bir sıraya göre parantez içerisine yazılan dizi) şeklinde gösterilir. Sıralı ikilide (*x*,*y*) apsis (*x*'in değeri) daima ordinattan (*y*'nin değeri) önce gelir. Negatif sayılar tam anlamıyla kabul görmeden önce tasarlanmalarına rağmen koordinatlar günümüzde hem negatif hem pozitif değerleri taşırlar; negatif değerler baş noktanın altında ve solunda, pozitif değerler baş noktanın üstünde ve sağında yer alır. İki eksen birlikte, koordinat düzlemi adı verilen bir noktalar sahasını oluşturur. Koordinat düzleminin


GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.
Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.
AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

***La Géometrie*'nin** bu basımı (bilginlerin kullandığı dil olduğundan Latincededir) 1639'da basıldı. Descartes, eğitim düzeyi nispeten düşük kişilerin okuyabilmesi için kitabı ilk olarak Fransızcada yayımlamıştı.

merkezi baş noktadır (0,0) ve iki boyutta dışa doğru genişler. Sonsuza kadar uzanabilen bu düzlemin üzerindeki her nokta, bir sayı çiftiyle kesin olarak tarif edilebilir.

Üç boyutlu uzayın grafiğini çıkarmak

Üç boyutlu bir uzay için sıralı değişken grubundaki (x, y, z) koordinatlara üçüncü bir sayı gerekir. z; x ve y eksenlerinin oluşturduğu düzleme dik, üçüncü bir ekseni ifade eder (bkz. s. 151). Her eksen çifti kendi düzlemini oluşuturur; bunlar birbirlerini dik açıyla keser ve böylece uzayı oktant adı verilen sekiz bölgeye ayırırlar. Her bir oktant içerisinde kalan koordinatlar x, y ve z'nin değerlerinden oluşan sekiz diziden biriyle gösterilir. Bu sekiz dizi, tamamı negatif değerlerden tamamı pozitif değerlere uzanan ve arada altı adet pozitif ve negatif birleşim olanağını kapsayan bir yelpazedir.

Eğriler

La Géométrie'de, koordinat sisteminin yakın gelecekteki temelleri atılır. Oysa Descartes'ın öncelikli merakı, başta eğriler olmak üzere çizgileri daha iyi anlayabilmesi için, koordinatların cebri kullanmasına nasıl yardımcı olabileceğini bulmaktı. Bunun için şekillerin koordinatları ve bir x ve y ikili değişkeninin arasındaki ilişkiler üzerinden tarif edildiği, analitik geometri denen yeni bir matematik alanını yarattı. Şekillerin cetvel ve pergelle çizilerek tanımlandığı Öklit'in "sentetik geometrisinden" çok farklıydı bu. Eski yöntem kısıtlayıcıydı, buna karşılık Descartes'ın yeni yöntemi bin bir türlü yeni olanağı doğurdu.

17. yüzyılda yeniden ilgi odağı olan eğriler *La Géométrie*'de enine boyuna işlenir. Söz konusu ilgi kısmen, Antik Yunan matematikçilerin bilimsel eserlerinin yeni çevrilmiş olmasının yanı sıra astronomi ve mekanik gibi bilimsel araştırmalarda eğrilerin önemli yer tutmasıydı.

Koordinatlar, eğrilerin ve şekillerin, görsel olarak gösterilebilen cebirsel denklemlere dönüştürülmesini mümkün kılar. Baş noktadan çaprazlamasına ve iki eksene de eşit uzaklıkta geçen bir doğru, cebir kullanılarak $y = x$ olarak, koordinatları da (0,0), (1,1), (2,2) vb. biçiminde tarif edilebilir. Öte yandan, örneğin $y = 2x$ doğrusu (0,0), (1,2), (2,4) koor-

> Çözdüğüm her problem, sonradan başka problemlerin de çözülmesine yarayan birer kural haline geldi.
> **René Descartes**

Bir çizginin üzerindeki her nokta bir x sayısıyla tanımlanabilir.

↓

Bir düzlemin (düz yüzey) **üzerindeki her nokta iki sayıyla** (x ve y) tanımlanabilir.

→

Bir çizginin üzerindeki noktaların hepsinde x ile y'nin arasında **aynı ilişki** mevcuttur.

↓

Tüm doğrular **cebirsel bir denklemle gösterilebilir.**

←

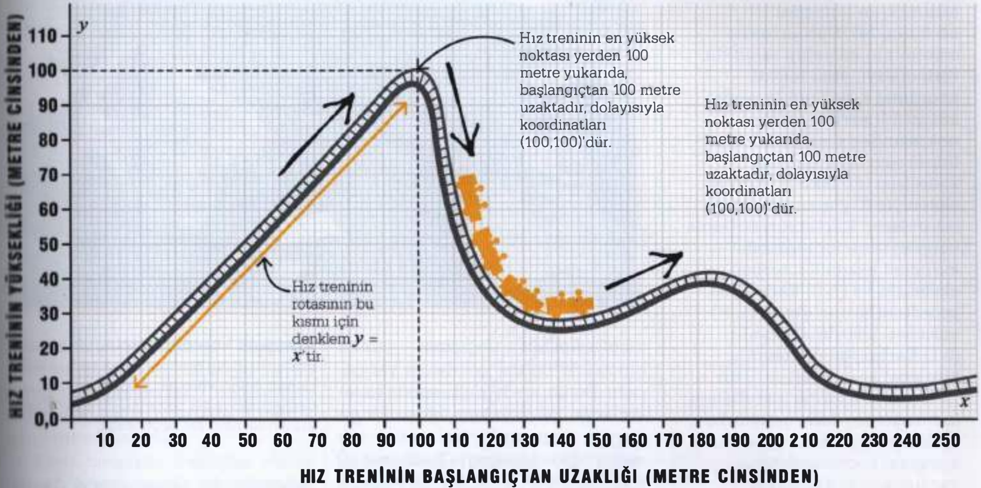
Tüm **denklemler** birer **çizgi şekliyle grafikte gösterilebilir.**

↓

Koordinatlar, **eğrilerin ve şekillerin denklemlere dönüştürülmesine** ve **denklemlerin grafikte gösterilmesine olanak tanır.**

> Benim açımdan, her şey matematiğe dönüşür.
> **René Descartes**

Bir hız treninin gibi geometrik bir şekil, grafikte işaretlenip x ve y eksenlerine göre tarif edilebilir. Eğrinin düz kısmının denklemi $y = x$'tir.

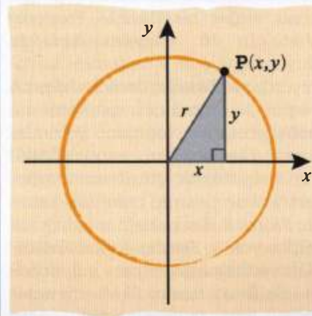


dinatlarını içeren bir çizgi üzerindeki daha dik bir güzergâhı izler. $y = 2x$'e paralel bir doğru, y eksenini baş noktadan farklı bir noktada, mesela (0,2)'de, keser. Bu doğru için formül $y = 2x + 2$'dir ve (0,2), (1,4) ve (2,6) noktalarını içerir.

Kartezyen koordinatlar ilişkilerin genelleştirilmesini mümkün kılan cebrin büyük etkisinin açığa çıkarılmasına yardımcı olur. Yukarıda tarif edilen doğruların tamamının genel denklemi aynıdır: $y = mx + c$; buradaki m katsayısı doğrunun eğimidir ve y'nin x'e kıyasla ne kadar büyük (veya küçük) olduğunu belirtir. c sabitiyse, x 0'a eşit olduğunda doğrunun y eksenini nerede kestiğini gösterir.

Çember denklemi

Analitik geometride merkezi baş noktada bulunan tüm çemberler, çember denklemi olarak bilinen $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ biçiminde tanımlanabilir. Bunun sebebi, bir çemberin bir merkez noktasına eşit mesafede bulunan (bu mesafe çemberin yarıçapıdır) noktaların tamamı olarak düşünülebilmesidir. Bu merkez nokta bir x, y grafiğinde (0,0) noktasıysa çember denklemi Pisagor teoreminden bulunur. Çemberin yarıçapı, kısa kenarları x ve y olan bir dik üçgenin hipotenüsü olarak düşünülebileceğinden, $r^2 = x^2 + y^2$'dir ve bu da $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ şeklinde yeniden yazılabilir. Böylelikle, aynı r değerini veren farklı x ve y değerleriyle çembere ait noktalar eksenlerin üzerinde işaretlenebilir. Örneğin r, 2'yse o zaman çember x eksenini (2,0) ve (-2,0) noktalarında ve y eksenini (0,2) ve (0,-2) noktalarında keser. Çemberin diğer tüm noktaları, bir dik üçgenin, çember çizerek dönen bir köşesi olarak görülebilir. Köşe, çemberin çevresinde döndükçe üçgenin kısa kenarlarının uzunlukları değişir ancak



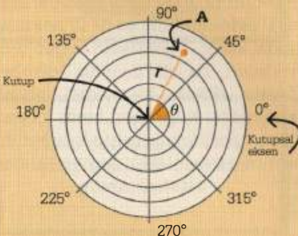
Çemberin çevresinin üzerinde ve koordinatları (x, y) olan herhangi bir P noktası, kenarları x ve y olan bir dik üçgenin hipotenüsünü oluşturan bir doğruyla (çemberin yarıçapı) çemberin merkezine (0,0) bağlanabilir. Çemberin denklemi $r^2 = x^2 + y^2$'dir.

Kutupsal koordinatlar

Matematikte bir düzlemdeki iki sayı aracılığıyla bir noktayı tanımlayan kutupsal koordinatlar, Descartes'ın sisteminin en yakın rakibidir. Birinci sayı, yani radyal koordinat r, baş nokta yerine kutup adı verilen merkez noktasından olan uzaklıktır. İkinci sayı olan açısal koordinat (θ), tekli bir kutup ekseniyle 0° yapan açı olarak tanımlanır. Kartezyen sistemle karşılaştırmak gerekirse kutupsal eksen Kartezyen x eksenidir ve (1, 0) Kartezyen koordinatlarının yerini (1,0°) kutupsal koordinatları alır. (0,1) Kartezyen noktasının kutupsal karşılığı (1,90°)'dir.

Düzlem üzerine işaretlenen karmaşık sayılarla çalışılırken, özellikle de çarpma işlemi için, kutupsal koordinatlardan yardım alınır. Karmaşık sayılar kutupsal koordinatlar olarak hesaba alındığı zaman birbirleriyle çarpılmaları daha basit olur. Bu işlemde radyal koordinatlar çarpılır, açısal koordinatlar toplanır.

A'nın koordinatları r, θ



Kutupsal koordinat sistemi genelde, bir merkez noktasının etrafında veya bu noktaya göre hareket eden cisimlerin hareketini hesaplamak için kullanılır.



Kutupsal koordinatların, bir hava aracının varış noktasını açı ve uzaklık bakımından verecek şekilde değiştirilmiş bir biçimi GPS'in yerine kullanılabilen bir seçenektir.

hipotenüsünki değişmez çünkü hipotenüs daima çemberin yarıçapıdır. Bu tanım doğrultusunda hareket eden bir noktanın oluşturduğu çizgiye geometrik yer (locus) adı verilir. Bu kavramı, Descartes'ın doğumundan yaklaşık 1750 yıl önce Yunan geometrici Pergeli Apollonius geliştirmiştir.

Fikir alışverişi

Descartes, Antik Yunanların biçimlendirdiği teoremlerden yararlanmanın yanı sıra diğer Fransız matematikçilerle fikir alışverişinde de bulundu. Sık sık yazıştığı Pierre de Fermat bu matematikçilerdendi. Descartes ve Fermat'nın ikisi de cebirsel notasyonu, diğer bir deyişle François Viète'nin 16. yüzyılın sonunda duyurduğu ***x*** ve ***y*** sistemini kullanıyordu. Fermat kendi başına başka bir koordinat sistemini de geliştirmesine rağmen yayımlamadı. Descartes'ın, kendi fikirlerini geliştirmek için Fermat'nınkileri kullanmasına bakılırsa onun bu fikirlerinden haberdar olduğuna şüphe yoktu. Fermat ayrıca Hollandalı mathematikçi Frans van Schooten'e Descartes'ın fikirlerini anlaması için yardımcı oldu. Van Schooten *La Géométrie*'yi Latinceye çevirdi ve matematiksel bir teknik olarak koordinatların kullanımına yaygınlık kazandırdı.

Yeni boyutlar

Van Schooten de Fermat da Kartezyen koordinatların boyut sayısını üçe çıkarmayı önermişti. Günümüzde matematikçiler ve fizikçiler koordinatlar vasıtasıyla bu eşiğin çok daha üstüne çıkıp diledikleri boyut sayısındaki uzayları gözlerinin önüne getirebiliyorlar. Böylesi bir uzayı görselleştirmek her ne kadar imkânsız olsa da matematikçiler bu araçları kullanarak dört, beş veya diledikleri sayıdaki uzaysal boyutta hareket eden çizgileri açıklayabiliyorlar.

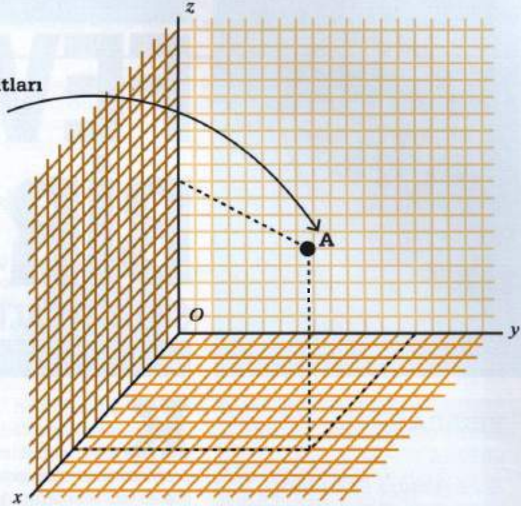
İki nicelik arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla da koordinatlar kullanılabilir. Bu fikri 1370'lerde ilk olarak hayat geçiren kişi, dikdörtgenel koordinatlardan ve de kendi bulduğu sonuçların meydana getirdiği geometrik şekillerden yardım alıp,

Leiden Üniversitesinde görevli öğretim üyesi Frans van Schooten sayesinde Kartezyen kavramlar matematikte hiç hafife alınmayacak bir başarı elde etti.

Dirk Struik
Hollandalı matematikçi

mesela hız ile zamanın ilişkisini veya ısı yoğunluğu ile ısıya dayalı genleşme arasındaki bağlantıları anlamaya çalışan Nicole Oresme adlı Fransız keşiştir.

Kimi nicelikler vektörler olarak bilinen koordinatlarla temsil edilebilir ve safi matematiksel bir "vektör uzayında" var olabilir. Vektörler büyüklük (bir doğrunun uzunluğu) ve yön olarak grafikte gösterilebilen iki değerli niceliklerdir. Hız, bu değerleri tam anlamıyla taşıdığı için vektörken (hız niceliği ve hareket yönü), diğer yanda Oresme'nin ısı ve genleşmesi gibi başka vektörler, farklı değer kümelerinin toplanıp çıkarılmasını kolaylaştırmak veya başka bir şekilde işleme almak için bu şekilde görselleştirilir.



Üç boyutlu Kartezyen koordinatlar mesela genişlik, derinlik ve yüksekliği olan bir cismin grafiğini çıkarmak için kullanılabilir. Üç eksen (x, y, z) birbirilerine dik açıklarla konumlandırılmıştır. Kesiştikleri yer baş noktadır (O).

19. yüzyıldaki matematikçiler Kartezyen koordinatlar için yeni kullanım amaçları da keşfettiler ve karmaşık sayıları ya da dördeyleri iki, üç veya daha fazla boyuttaki vektörler olarak temsil etmek amacıyla kullandılar.

Anahtar koordinatlar

Kartezyen koordinat sistemi elbette ki tek koordinat sistemi değildir. Noktaların coğrafi koordinatlarla yerküre üzerinde işaretlenişi önceden belirlenen büyük çemberlerle (Ekvator ve Greenwich Meridyeni) aralarındaki açılara göre yapılır. Benzer bir sistem olan gök koordinatlarıyla da, merkezi Yer olan ve uzayda sonsuzluğa uzanan hayali bir kürenin içerisinde yıldızların konumu tarif edilir. Yer'in merkezine olan uzaklık ve açılarla tanımlanan kutupsal koordinatlar belli hesaplama çeşitleri için de kullanışlıdır.

Her şeye rağmen Kartezyen koordinatlar basit araştırma verilerinden atomların hareketlerine kadar hemen her şeyin grafikte gösterilmesini sağladığından halen yaygın olarak kullanılmakta. Onlar olmadan (nicelikleri sonsuz küçük miktarlara bölen) analitik kalkülüs gibi buluşların yanı sıra uzayzaman ve Öklitçi olmayan geometrideki ilerlemeler gerçekleşemezdi. Kartezyen koordinatlar matematiğe katkısı bir yana, gerek mühendislik ve iktisat gerekse robotik ve bilgisayar animasyonu olsun bilim ve sanatın pek çok alanında muazzam bir etki bırakmıştır. ■

Matematik bize insanlığın mirası olarak kalan bilimsel araçların en etkilisidir.

René Descartes



FEVKALADE BİR İCAT

SİKLOİTİN ALTINDA KALAN ALAN

KISACA

KİŞİLER
Bonaventura Cavalieri (1598–1647), **Gilles Personne de Roberval** (1602–75)

ALAN
Uygulamalı geometri

ÖNCE
MÖ y. 240 Arşimet, *Mekanik Teoremlerin Yöntemi*'nde kürelerin hacmini ve yüzey alanını inceler.

1503 Fransız matematikçi Charles de Bovelles, *Introductio in geometriam*'da (*Geometriye Giriş*) sikloitle ilgili ilk tanımı yapar.

SONRA
1656 Hollandalı matematikçi Christiaan Huygens icat ettiği sarkaçlı saat için bir sikloitin eğrisini esas alır.

1693 De Roberval'ın bir sikloitin alanı için çözümü, çözümün keşfinden 60, ölümünden 18 yıl sonra yayımlanır.

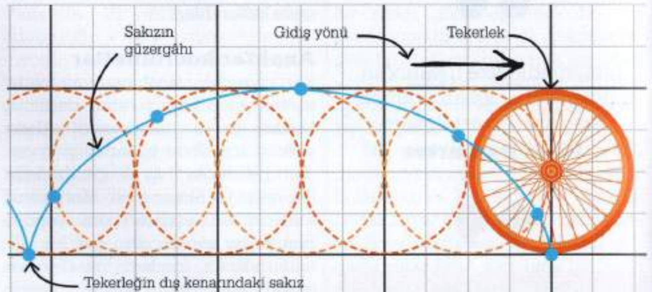
Kadim Yunan uygarlığı eğrilerin sınırladığı şekillerin alan ve hacimleriyle ilişkili problemler üzerine çok kafa patlattı. Şekillerin alanlarını karşılaştırmak için başlangıçtaki şekillerle aynı alanlara sahip birer kare oluşturuyor, sonra da karelerin büyüklüklerini karşılaşıtırıyorlardı. Düz kenarlı şekiller için bu kolaydı ama eğrisel şekiller sorun yaratıyordu.

Bu problemler 1629'a kadar çözümsüz kaldı. İtalyan matematikçi ve Cizvit rahip Bonaventura Cavalieri bu tarihte bulduğu bir yöntemle, eğri şekillerin alan ve hacimlerini onları paralel parçalar halinde dilimleyerek hesapladı (Cavalieri ilkesi, bkz. sağ üstte) ancak yöntemi yayımlamak için altı yıl oyalandı. 1634'te Gilles Personne de Roberval bu yönteme başvurarak bir sikloitin (yuvarlanan bir tekerleğin dışı kenarının çizdiği yay) altında kalan alanın, sikloiti oluşturan çemberin alanının üç katı olduğunu hesapladı.

Daireyi karelemek

Antik Yunan matematikçi Arşimet dâhiyane bir tüketme yöntemini kullanarak bir parabol ile doğrunun

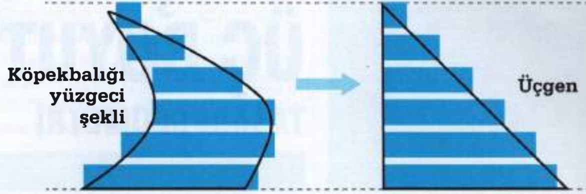
Bu tekerlek, yuvarlanırken bir sakızı ezmiştir. Grafikte, tekerlek döndükçe sakızın izlediği yol gösterilmekte. Bu yolun meydana getirdiği sikloit şeklinin alanı, de Roberval'ın keşfettiği gibi, tekerleğinkinin üç katıdır.



Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Mersenne asal sayıları 124 ▪ Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Pascal üçgeni 156–61 ▪ Huygens'in tautochrone eğrisi 167 ▪ Kalkülüs 168–75

> Daha önce fark etmediğim, güzel bir sonuç.
>
> **René Descartes**
> **de Roberval'ın bir sikloitin altında kalan alanı bulma yöntemi hakkında**

Bu köpekbalığı yüzgeci şekli (solda) ve üçgen (sağda) aynı yüksekliğe ve yükseklikleri boyunca denk noktalarda aynı genişliğe sahip olduklarından, Cavalieri'nin ilkesine göre, benzer alanlara sahip paralel parçalar halinde dilimlenebilirler.



arasında kalan alanı bulmuştu. Yöntemde, alanı bilinen bir üçgen, parabolün içine oturacak şekilde çiziliyor, ardından kalan boşlukların tamamına gitgide küçülen üçgenler çiziliyordu. Arşimet üçgenlerin alanlarını toplayarak, bulmak istediği alanın bir yakın değerini elde etti. Oysaki onun zamanının "cetvel-pergel" yöntemlerinde belli kısıtlamalar vardı. Bir daireninkiyle eşit alana sahip bir karenin çizildiği kareleme yöntemiyle üç boyutlu bir kürenin yüzey alanını hesaplama denemesi başarısız oldu. Kürenin yüzey alanının, aynı yarıçaplı bir daireninkinin dört katı olduğunu bilmesine karşın, yüzey alanı veren kareyi bulamadı.

Probleme yeni yaklaşımlar

Sikloite ilişkin ilk tanımı 1503 yılında Charles de Bovelles yayımladı. Sikloitin adınıysa çok yönlü İtalyan bilgin Galileo koydu. Galileo, ayrıca, sikloitin alanını hesaplamak amacıyla bir sikloit ve dairenin modellerini kesip çıkardı, parçalarını tarttı ve sonuçları karşılaştırdı.

Fransız Marin Mersenne, aşağı yukarı 1628 yılında, de Roberval, René Descartes ve Pierre de Fermat'nın da aralarında bulunduğu matematikçi arkadaşlarına, bir sikloit yayının altında kalan alanı ve eğrinin üzerindeki bir noktanın teğetini bulmak üzere meydan okudu. Roberval, Descartes'a başardığını söyleyince Descartes, "sonucun çok küçük olduğu" gerekçesiyle onu ciddiye almadı. Ardından Descartes, 1638'de bir sikloitin teğetini keşfedince Roberval ve Fermat'ya bunun aynısını yapmaları için meydan okudu. Başarıya sadece Fermat ulaştı.

1658'de İngiliz mimar Christopher Wren bir sikloitin yay uzunluğunun, onu üreten dairenin çapının dört katı olduğunu hesapladı. Aynı yıl Blaise Pascal bir sikloitin dikey herhangi bir diliminin alanını hesapladı. Sonra bu dikey dilimleri yatay bir eksenin etrafında döndürdüğünü gözünde canlandırarak bu dönüşün kapladığı disk şeklindeki bölgelerin yüzey alanını ve hacmini hesap etti. Pascal'ın sikloitlerin özelliklerini açığa çıkarmak amacıyla şekillerin sonsuz küçüklükteki dilimlerini kullanması, kalkülüsü yeni yeni geliştirmekte olan Isaac Newton'ın "akıları" tanıtmasının önünü açacaktı. ■

Gilles Personne de Roberval

1602'de Kuzey Fransa'da, annesi, Roberval civarındaki bir tarlada hasat kaldırırken dünyaya gelen Gilles Personne de Roberval bölge papazından hem Antik Yunan hem de Latin edebiyatı, Latin felsefesi ve Latin tarihi derslerinin yanında bir de matematik eğitimi aldı. 1628'de Paris'e taşınıp Mersenne'in aydınlardan oluşan çevresine dahil oldu.

1632'de, de Roberval, Collège Gervais'de matematik öğretim üyesi oldu ve iki yıl sonra bir müsabakayı kazanıp Collège Royale'de son derece saygın bir makama geldi. Sade bir yaşam sürdüyse de geniş ailesi için çiftlik aldı ve gelir elde etmek amacıyla çiftliğinden bölüm bölüm arsa kiraladı. Ömrünün sonuna kadar matematikle uğraştı. 1669'da, Roberval dengesi olarak bilinen bir terazi icat etti. 1675'de hayata gözlerini yumdu.

Önemli eseri

1693 *Traité des Indivisibles (Bölünmezler Üzerine)*



İKİ BOYUTLA OLUŞTURULAN ÜÇ BOYUT

TASARI GEOMETRİ

KISACA

KİŞİ
Girard Desargues
(1591–1661)

ALAN
Uygulamalı geometri

ÖNCE
MÖ y. 300 klit'in *Öğeler*'inde, sonraları Öklitçi geometriyi meydana getirecek kavramlar yazıya dökülür.

MÖ y. 200 Apollonius, *Koni Kesitleri*'nde koni kesitlerinin özelliklerini anlatır.

1435 İtalyan mimar Leon Battista Alberti perspektifin ilkelerini *De Pictura*'da (*Resim Üzerine*) sistemli bir şekilde toplar.

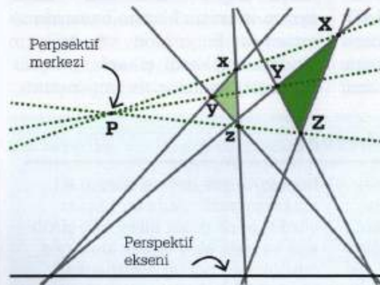
SONRA
1685 Fransız matematikçi ve ressam de la Hire, *Sectiones Conicæ*'de hiperbol, parabol ve elipsin tanımını yapar.

1822 Fransız matematikçi ve mühendis Jean-Victor Poncelet tasarı geometri üzerine bir incelemeyi kaleme alır.

İki boyutlu tüm şekil ve cisimlerin aynı düzlemi paylaştığı geleneksel Öklitçi geometriden farklı olarak, tasarı geometri bir cismin görünen şeklinin, o cisme bakılan perspektifçe nasıl değişime uğradığıyla ilgilidir. 17. yüzyılda yaşamış Fransız matematikçi Girard Desargues bu geometri türünün kurucularındandı.

Perspektif kavramını iki yüzyıl öncesindeki Rönesans sanatçıları ve mimarları irdelemişlerdi. Fillipo Brunelleschi, Antik Yunanların ve Roma-

Doğrusal perspektif ve geometri



Bu iki üçgene, perspektif merkezi (P) denen bir bakış noktasından bakılmaktadır. Üçgenlerin denk köşe noktalarını bağlayan (X'i x'e; Y'yi y'e, Z'yi z'ye) doğrular daima P'de buluşur. XYZ gerçek bir üçgen cisim olsaydı P'den bakıldığında xyz üçgeni gibi görünürdü. Desargues'ın teoremine göre, her üçgenin denk kenarlarından uzatılan doğrular, daima, perspektif ekseni olarak bilinen bir doğrunun üzerinde buluşur.



Perspektif nedeniyle, bu düz çatılı binanın kenarlarındaki paralel çizgiler uzatıldığında önünde sonunda buluşacakmış gibi görünür. Bu buluşma noktasına kaçış noktası adı verilir.

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Koni kesitleri 68–69 ▪ Bir sikloitin altında kalan alan 152–53 ▪ Pascal üçgeni 156–61 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–29

> İyi mimari bizzat hayatın izdüşümü olmalıdır.
>
> **Walter Gropius**
> **Alman mimar**

ların vakıf olduğu doğrusal perspektif ilkelerini yeniden keşfetmiş ve bu ilkeleri kendi mimari planlarında, heykellerinde ve resimlerinde incelemişti. Bir başka mimar Leon Battista Alberti, üç boyutlu bir perspektif duygusu yaratmak için "kaçış noktalarını" kullandı ve sanatta perspektifin kullanımı üzerine yazılar yazdı.

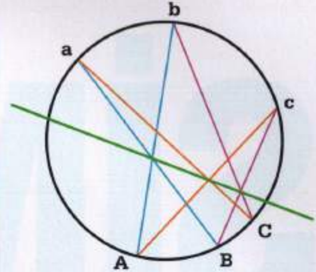
Haritalardan matematiğe

Yeni topraklara yelken açan Batılı kâşifler, küresel dünyayı iki boyutta betimleyen hassas haritalara ihtiyaç duydular. 1569'da Flaman kartograf Gerardus Mercator, günümüzde "silindirik harita izdüşümü" olarak bilinen yöntemi tasarladı. Bu, yerkürenin yüzeyinin onu saran bir silindirin üzerine aktarılması olarak zihinde canlandırılabilir. Silindir, tepesinden tabanına kadar kesilip açıldığında iki boyutlu bir harita haline gelir.

1630'lu yıllarda Desargues, bir görüntü bir yüzeye izdüşürüldüğünde (perspektif eşleme) hangi özelliklerin değişmeden kaldığını (invaryant olduğunu) araştırmaya koyuldu. Görüntünün büyüklükleri ve açıları değişebilse de doğrudaşlık korunur; yani XYZ şeklinde ifade edilen üç nokta, X, Z ve aralarındaki Y bir doğrunun üzerindeyse, bu noktaların görüntüleri olan xyz de x, z ve aralarındaki y'nin bulunduğu bir doğrunun üzerindedir. Herhangi bir üçgenin görüntüsü yine başka bir üçgendir. Her üçgenin birbirine karşılık gelen kenarları bir çizginin (perspektif ekseni) üzerinde üç noktada buluşacak şekilde uzatılabilir. Her köşe ile ona karşılık gelen köşeyi bağlayıp uzamaya devam eden çizgiler bir noktada (perspektif merkezinde) buluşur.

Desargues, izdüşürülen tüm koni kesitlerinin böylelikle eşdeğer olduğunun farkına vardı. Doğrudaşlık gibi tek bir değişmez (invaryant) özelliğin her bir koni kesiti üzerinde test edilmek yerine sadece tek bir durum için kanıtlanması yeterlidir. Örneğin Pascal'ın "gizemli altı köşeli yıldız" teoremine göre, bir koni kesiti üzerindeki altı noktayı çiftler halinde birleştiren çizgilerin kesişim noktalarının hepsi bir doğrunun üzerindedir. Bu, bir çemberin üzerindeki altı noktanın birleştirilmesiyle gösterilebilir; diğer koni kesitleri için de geçerli bir ispattır bu.

Bunun üstüne Desargues izdüşüm konisinin köşesi uzaklaştırıldıkça ne olacağını düşündü. Paralel ışınlar sonsuzluktaki bir noktadan



Bir çemberin rasgele altı nokta koyulup gösterilen şekilde birleştirildiğinde (Ab, aB; Ac, Ca; Cb, cB), aynı renkteki çizgilerin geçtiği noktaların üzerinden bir doğru çizilebilir. Bu, izdüşüm kullanıldığında elips için de geçerlidir.

(mesela güneşten) gelir. Sonsuzluktaki bu noktaların Öklit düzlemine eklenmesiyle sonsuzlukta buluşan paralel çizgiler de dahil her doğru çifti bir noktada buluşur.

1822'de Poncelet bu yöntemi geliştirerek tamamıyla geometrikleştirdi. Günümüzde tasarı geometri, mimarlar ve mühendislerce CAD teknolojisinde, ayrıca film ve oyunlar için bilgisayar animasyonunda kullanılmakta. ■

Girard Desargues

1591'de doğan Girard Desargues hayatı boyunca Lyon'da yaşadı. Ailesi, bir köşk ve içinde beş üzüm bağı bulunan küçük bir şato dahil çok sayıda mülk sahibi varlıklı avukatlardan oluşuyordu. Desargues birkaç kez Paris'e gitti ve Marin Mersenne aracılığıyla Descartes ve Pascal'la arkadaş oldu.

Desargues ilk olarak öğretmen, sonra mühendis ve mimar olarak çalıştı. Mükemmel bir geometri uzmanıydı ve fikirlerini matematikçi arkadaşlarıyla paylaştı. Kitapçıklarından bazılarının kapsamı sonradan genişletilerek makale halinde yayımlandı. Perspektif üzerine yazılar yazdı, buna ek olarak döner merdiven ve yeni bir pompa biçimi tasarlamak gibi uygulamalı projelerde matematiği uyguladı. Desargues 1661'de vefat etti. Çalışması 1864'te yeniden keşfedilip tekrar yayımlandı.

Önemli eserleri

1636 *Perspektif*
1639 *Bir Koninin Düzlemle Kesilmesinden Sonuç Elde Etme Hakkında Kaba Bir Taslak*

SİMETRİ BİR BAKIŞTA GÖRDÜĞÜMÜZ BİR ŞEYDİR

PASCAL ÜÇGENİ



KISACA

KİŞİ
Blaise Pascal (1623–62)

ALANLAR
Olasılık, sayı kuramı

ÖNCE
975 Hintli matematikçi Halayudha, Pascal üçgenindeki sayıların sağ kalan ilk tanımını yapar.

y. 1050 Çin'de, ileride Jia XianYang Hui üçgeni olarak bilinecek üçgeni anlatır.

y. 1120 Ömer Hayyam, Pascal üçgeninin daha eski bir versiyonunu yaratır.

SONRA
1713 Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi'* de (*Kestirim Sanatı*) Pascal üçgenini geliştirir.

1915 Wacław Sierpinski, sonraları Sierpinski olarak bilinecek üçgenlerin fraktal örüntüsünü açıklar.

> İki tür zekâ vardır: Matematiksel ve sezgisel. Bunların ilki kanısına yavaşça varır ama katıdır. İkinciyse daha çok esnekliğe sahiptir.
> **Blaise Pascal**

Pascal üçgeni, komşu iki sayının birbirine eklenmesi (oklarla gösterildiği gibi) ve toplamın bir sonraki satıra yazılmasıyla oluşturulur. Her satırın başında ve sonunda 1 sayısı vardır.



Matematiğin çoğu durumundaki püf noktası, sayı örüntülerini teşhis edebilmektir; sıra dışı Pascal üçgeni en dikkat çekici sayı örüntülerinden biridir. Pascal üçgeni giderek genişleyen satırlara çok basit bir düzene göre dizilen sayılarla kurulan bir eşkenar üçgendir. Her sayı bir üst satırda komşu olduğu iki sayının toplamıdır. Pascal üçgeninin sabit bir büyüklüğü yoktur; yüksekliği yalnızca birkaç satırdan, daha büyük herhangi bir sayısına kadar çıkarılabilir.

Sayıların dizilişine ilişkin böylesi basit bir kuralla yalnızca basit örüntüler ortaya çıkacaktır gibi görünebilse de Pascal üçgeni cebir, sayı kuramı, olasılık ve kombinatorik (sayma ve diziliş matematiği) gibi birçok yüksek matematik dalı için Pascal üçgeni son derece kullanışlıdır. Pascal üçgeninde çok sayıda önemli dizi bulunmuştur ve matematikçiler bunun sayılar arasındaki ilişkiler hakkında henüz idrak edemediğimiz birtakım hakikatleri yansıtabileceğini düşünmektedir.

Pascal üçgenine, 1653'te *Treatise on the Arithmetical Triangle* (*Aritmetik Üçgen Üzerine Araştırma*) eserinde bu üçgeni ayrıntılarıyla inceleyen Fransız filozof ve matematikçi Blaise Pascal'ın adı verilmiştir. İtalya'daysa konuyu 15. yüzyılda kaleme almış matematikçi Niccolò Tartaglia'nın adının verildiği Tartaglia üçgeni olarak bilinir. Aslına bakılırsa, söz konusu üçgenin kökeni MÖ 450'lerin kadim Hindistan'ına dayanır (bkz. kutuda s. 160).

Olasılık kuramı

Pascal'ın üçgene katkısı kayda değerdi çünkü düzen içeren net bir çerçeveyi ortaya koyarak üçgenin özelliklerinin araştırılmasına olanak tanıdı. Fransız matematikçi Pierre de Fermat'yla yazışmalarında olasılığın temelini atarken üçgenden yardım alması da özellikle dikkate şayandır. Luca Pacioli, Gerolamo Cardano ve Tartaglia gibi Pascal'dan önceki matematikçiler, zarla belli sayıları atma veya iskambilde elin belirli bir şekilde gelmesi olası-

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Binom teoremi 100–01 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–105 ▪ Fibonacci dizisi 106–11 ▪ Mersenne asal sayıları 124 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Fraktaller 306–11

lığının nasıl hesaplanacağı hakkında yazılar yazmışlardı. Konuya dair anlayışları en iyimser tabirle zayıftı ve sonuca ulaşan, Pascal'ın üçgenler araştırması oldu.

Ortadaki parayı bölüştürmek

1652 yılında, adı çıkmış bir Fransız kumarbaz Pascal'dan olasılığa eğilmesini istedi. Chevalier de Méré unvanlı Antoine Gombaud, bir şans oyununun birdenbire sona ermesi halinde, ortadaki toplam paranın nasıl adilane bölüneceğini öğrenmek istiyordu. Normalde oyun yalnızca bir oyuncu belli sayıda turu kazandığında sona eriyorduysa, örneğin, de Méré ortadaki paranın paylaştırılmasının, her oyuncunun kazandığı tur sayısını yansıtması gerekip gerekmediğini merak ediyordu. Pascal oynanan turları temsil eden sayıları adım adım bir araya getirdi. Sonuç, doğal olarak, gitgide genişleyen bir üçgendi. Pascal'ın gösterdiği gibi, üçgendeki sayılar verili bir sonucu üretmek üzere çeşitli durumların kaç şekilde birleştirilebileceğini yansıtır.



Bir olayın olasılığı, olayın gerçekleşme sayısının oranı olarak tanımlanır. Bir zarın altı yüzü vardır, dolayısıyla zarı attığınızda belirli bir yüzün üzerine düşmesi olasılığı 1/6'dır. Başka bir deyişle, mesele, olayın kaç şekilde gerçekleşebileceğini tespit etmek ve bunu toplam ihtimal sayısına bölmektir. Tek bir zar için bu oldukça kolay olmakla beraber birden fazla zar veya 52 iskambil kâğıdında hesaplamalar karmaşıklaşır. Pascal yine de belirli sayıda seçenek içerisinden birkaç nesne seçilmesi durumunda kaç olanaklı birleşim olduğunu bulmak için üçgenin kullanılabileceğini keşfetti.

Binom hesaplamaları

Pascal'ın da fark ettiği gibi, yanıt binomlarda saklıydı ($x + y$ gibi, iki terimden oluşan ifadeler). Pascal üçgeninin her satırı, belirli bir kuv-

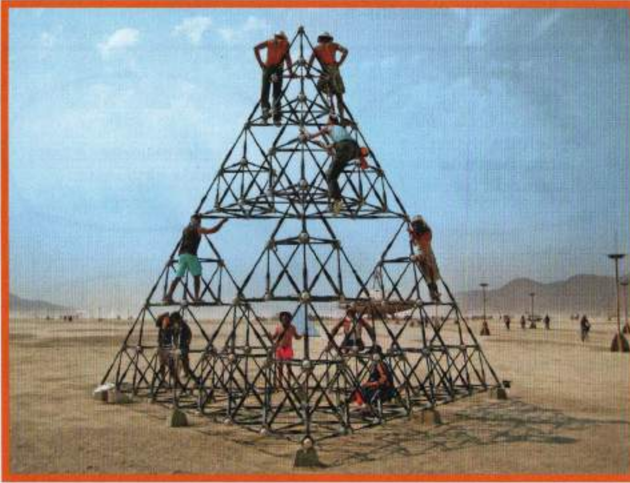
Blaise Pascal



1623'te Fransa'nın Clermont-Ferrand şehrinde doğan Blaise Pascal bir matematik dehasıydı. Ergenlik çağındayken babası onu Marin Mersenne'in Paris'teki matematik toplantısına götürdü. Yaşı 21 civarındayken Pascal mekanik bir toplama çıkarma makinesi geliştirdi; türünün o zamana dek pazarlanan ilk örneğiydi bu. Matematiğe olan katkılarının yanı sıra Pascal 17. yüzyılın birçok bilimsel gelişiminde önemli rol oynadı. Örnek olarak, sıvılara ve vakumun tabiatına yönelik araştırmalardaki rolüyle hava basıncı kavramının anlaşılmasına katkı sağladı: Bilimsel basınç birimi Pascal adını taşır. 1661'de Paris'te halkın kullanıma sunduğu birbirine bağlı beş kişilik arabalar dünyadaki ilk toplu taşıma hizmetiydi belki de. 1662'de daha 39 yaşındayken açıklanamayan nedenlerle hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

1653 *Traité du triangle arithmétique (Aritmetik Üçgen Üzerine Araştırma)*
1654 *Potestatum Numericarum Summa (Sayıların Kuvvetlerinin Toplamları)*



Amerikalı sanatçı Gwen Fisher'a ait bir oyuncak tırmanma merdiveni projesi olan Bat Country, tasarımındaki softbol sopa ve toplarıyla dikkat çeken bir Sierpinski düzgün dörtyüzlüsüdür. Bu düzgün dörtyüzlü, Sierpinski üçgenlerinden oluşan üç boyutlu bir yapıdır.

vet için binom katsayılarını verir. Sıfırıncı satır (üçgenin tepesi), 0'ıncı kuvveti alınan binom için kullanılır: $(x + y)^0 = 1$. Üssü 1 olan binom için, $(x + y)^1 = 1x + 1y$'dir, dolayısıyla katsayılar (1 ve 1) üçgenin ilk satırına denk gelir (sıfırıncı satır, satır sayılmaz $(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$'nin katsayıları 1, 2 ve 1'dir, keza Pascal üçgeninin ikinci satırındaki katsayılar da. Binom açılımı gitgide uzayan ifadeleri beraberinde getirdikçe, katsayılar üçgen üzerinde uygun satırlarla eşleşmeye devam eder. Örneğin $(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$ binomundaki katsayılar üçgenin üçüncü satırıyla eşleşir. Olanak sayısını, nesnelerin toplam sayısını yansıtan sıradaki tüm katsayıların toplamına bölerek olasılıklar hesaplanır: Örneğin üç çocuklu bir ailede (toplam nesne sayısı) bir kız ve iki erkek olması olasılığı 3/8'dir (üçgenin üçüncü satırındaki tüm katsayıların toplamı 8'dir ve üç çocuklu bir ailede bir kız olmasının üç yolu vardır).

Olasılıkların bulunması Pascal üçgeni sayesinde kolay hâle geldi. Pascal üçgeni sonsuza dek devam edebildiğinden bu her kuvvet için işe yarar. Binom katsayılarıyla Pascal üçgenindeki sayıların arasındaki ilişki, sayılar ve olasılık hakkındaki köklü bir hakikati gün yüzüne çıkarır.

Görsel örüntüler

Fermat'nın çalışmasıyla, Pascal'ın basit sayı örüntüsünün olasılık matematiği için sıçrama tahtası işlevi gördüğü anlaşıldı ama yine de Pascal'ın örüntüsünün faydalılığı bu kadarla sınırlı değildir. Her şeyden önce, binom ifadelerinin yüksek kuvvetlerinin çok zaman alan çarpma işlemi için kısa bir yol sunar.



Myanmar'ın Hsinbyume pagodası, gizemli Meru dağını simgeler. Pascal üçgeninin bir başka adı için merdivenlerinden esinlenilmiştir.

Antik üçgen

Matematikçiler Pascal üçgeninden 17. yüzyıldan çok daha önceleri de haberdardı. Bu üçgen İran'da, Ömer Hayyam'ın soyadıyla Hayyam üçgeni olarak bilinse de Hayyam bilimde bir Altın Çağın yaşandığı 7. ve 13. yüzyıllar arasında konuyu araştıran çok sayıda İslam matematikçisinden sadece biriydi. Buna ek olarak, y. 1050'de, Çin'deki Jia Xian, katsayıları gösteren benzer bir üçgen yarattı. 1200'lerde Yang Hui, onun bu üçgeniyle ilgilendi ve geniş kitlelere tanıtarak Çin'de Yang Hui üçgeni olarak bilinmesine vesile oldu. Zhu Shijie'nin 1303'te yazdığı *Precious Mirror of the Four Elements* (*Dört Elementin Kıymetli Aynası*) başlıklı kitapta söz konusu üçgen resmedilir.

Gelgelelim, Pascal üçgeninden bahseden en eski tarihli kayıtlar Hindistan'dan çıkmıştır. En eskisi MÖ 450 tarihli Hint metinlerinde, "Meru Dağının Merdivenleri" başlıklı bir şiir ölçüsü kılavuzu niteliğiyle karşımıza çıkar. Antik Hintli matematikçiler, üçgende nispeten düşey doğrultuda çizilen çapraz çizgilerin üzerindeki sayılarda Fibonacci sayılarının gizli olduğunu da fark ettiler (bkz. sağda).

Matematikçiler Pascal üçgeninde sık sık yeni sürprizlerle karşılaşıyor. Pascal üçgenindeki örüntülerin bazıları son derece basittir. Dış kenar baştan aşağı 1 sayısından oluşur, onun bitişiğindeki çapraz sıradaki diğer sayılar 1, 2, 3, 4, 5 vb. şeklinde ilerleyen basit bir sayı doğrusudur.

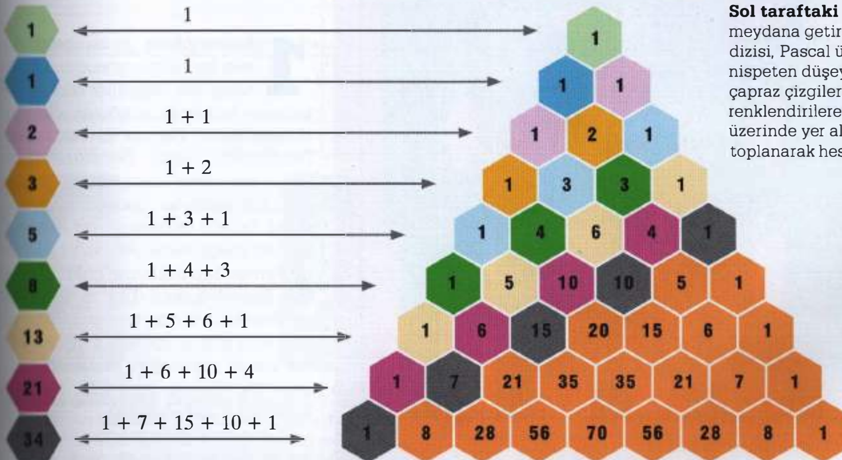
Pascal üçgeninin özellikle ilgi çekici bir özelliği, toplamada kullanılabilen "hokey sopası" örüntüsüdür. Dıştaki 1'lerden herhangi birinden başlamak üzere, aşağı ve nispeten düşey doğrultuda bir çapraz çizgi çizilip herhangi bir yerde durulduğunda ters yönde bir adım ilerleyerek çapraz çizgi üzerindeki sayıların toplamı bulunabilir. Örneğin sol kenardaki dördüncü 1'den başlayıp sağ aşağı yönde inerken 10 sayısında durulursa, üstünden geçilen sayıların toplamı (1 + 4 + 10) aşağı yönde çaprazlamasına bir adım giderek bulunabilir: 15.

Belirli bir sayıya bölünebilen tüm sayıları renklendirmek fraktal bir örüntü oluşturur. Tüm çift sayıları renklendirmekse Polonyalı matematikçi Wacław Sierpinski'nin saptadığı üçgenler örüntüsünü oluşturur. Bir eşkenar üçgen, her kenarının orta noktası birleştirilerek gitgide daha küçük üçgenlere bölündüğünde bu örüntü Pascal üçgeni olmadan oluşturulabilir. Bu bölme işlemi sonsuza dek sürdürülebilir. Sierpinski üçgeni üç boyuta dönüştürülmek suretiyle bir Sierpinski düzgün dörtyüzlüsü haline getirilerek günümüzde örgü desenlerinde ve origamide yaygın biçimde kullanılmaktadır.

> Üzerinde çalışmakta olduğum işle ilgili bir hükme varamam. Yapmam gereken, tıpkı ressamlar gibi geriye çekilip uzaktan bakmak, ama çok da uzaktan değil.
>
> **Blaise Pascal**

Sayı kuramı

Üçgende daha birçok karmaşık örüntü gizlidir. Pascal üçgeninde bulunan örüntülerden biri, nispeten düşey doğrultulu bir çapraz çizginin üzerindeki Fibonacci dizisidir (bkz. aşağıda). Verilen bir satırın üstünde kalan satırlardaki tüm sayıların toplamının, verilen satırdaki sayıların toplamından her zaman bir eksik olduğunun keşfi, sayı kuramıyla kurulan bir diğer bağlantıdır. Verilen bir satırın yukarısındaki tüm sayıların toplamı bir asal sayıysa, bu sayı bir Mersenne asal sayısıdır; mesela 3 ($2^2 - 1$), 7 ($2^3 - 1$) gibi, 2'nin herhangi bir kuvvetinin bir eksiği olan bir asal sayı. Bu asal sayıların ilk listesini hazırlayan, Pascal'ın çağdaşı Marin Mersenne'di. Günümüzde bilinen en büyük Mersenne asal sayısı $2^{82.589.933}$ −1'dir. Şayet Pascal üçgeni yeterince büyük bir ölçekte çizilseydi, bu sayı o üçgende bulunurdu. ■



Sol taraftaki sayıların meydana getirdiği Fibonacci dizisi, Pascal üçgenindeki nispeten düşey doğrultulu çapraz çizgilerin (burada renklendirilerek gösterilmekte) üzerinde yer alan sayılar toplanarak hesaplanabilir.

YASALAR ŞANSA GEM VURUR VE ONA YÖN VERİR

OLASILIK



KISACA

KİŞİLER
Blaise Pascal (1623–62),
Pierre de Fermat (1601–65)

ALAN
Olasılık

ÖNCE
1620 Galileo zar atıldığında belli toplamların gelme şansını hesapladığı *Sopra le Scoperte dei Dadi*'yi (*Zarın Sonuçları Üzerine*) yayımlar.

SONRA
1657 Christiaan Huygens, olasılık kuramı ve şans oyunlarına uygulanışı üzerine bir incelemeyi kaleme alır.

1718 Abraham de Moivre, *The Doctrine of Chances*'ı (*Şansın Doktrini*) yayımlar.

1812 Pierre-Simon Laplace, *Théorie analytique des probabilités*'de (*Olasılıkların Kuramı*) olasılık kuramını bilimsel problemlere uygular

16. yüzyıldan önce, gelecekteki bir olayın sonucunu herhangi bir doğruluk düzeyiyle tahmin etmenin imkânsız olduğu düşünülürdü. Ne var ki Rönesans İtalya'sında bilgin Gerolamo Cardano zar atma sonuçlarına ilişkin ayrıntılı analizler çıkardı. 17. yüzyılda, bu tür problemler iki Fransız matematikçi Blaise Pascal ve Pierre de Fermat'nın dikkatini çekti. Daha çok Pascal üçgeni (bkz. s. 156-161) ve Fermat'nın son teoremi (bkz. s. 320-323) gibi bulgularla tanınan bu iki adam, olasılığın matematiğini yeni bir düzeye taşıyarak olasılık kuramının temelini attı.

Şans oyunlarının sonuçları hakkında tahmin yürütmenin, olası-

Ayrıca bkz. Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Bayes teoremi 198–99 ▪ Buffon'un iğne deneyi 202–03 ▪ Modern istatistiğin doğuşu 268–71

> Olasılık kuramı, sağduyunun hesaplamaya indirgenmesinden başka bir şey değildir.
> **Pierre-Simon Laplace**

lığa yaklaşırken izlenebilecek kullanışlı bir yol olduğu anlaşılmıştır. Olasılık bir şeyin meydana gelmesinin olabilirliğinin ölçüsü olarak tanımlanır. Örneğin zar atıldığında altı gelmesi şansı üzerine, verili atış sayısı kadar zar atıp altı gelen atış sayısının toplam atış sayısına bölünmesiyle tahmin yürütülebilir. Göreli sıklık denen sonuç, altı atma olasılığını verir. Bu olasılık kesir, ondalık sayı veya yüzdeli sayıyla gösterilebilir. Halbuki gerçek deneylere dayalı, gözlemlenen bir bulgudur bu. Herhangi bir tekil olayın kuramsal olasılığı, arzu edilen sonuç sayısı, olanaklı sonuçların toplam sayısına bölünerek hesaplanır. Altı yüzlü bir zar bir defa atıldığında altı gelmesi olasılığı 1⁄6, başka herhangi bir sayı gelmesi olsalığıysa 5⁄6'dır.

İhtimallere dair tahmin yürütmek

17. yüzyıl Fransa'sının sevilen oyunlarından birinde, bahse giren iki oyuncu sırayla dört kez zar atıp en az bir kez altı atmaya çalışıyordu. Oyuncular ortaya eşit miktarda para koyuyor ve belirli sayıda turu ilk kim kazanırsa paranın tamamını onun alacağı konusunda peşinen anlaşıyordu. Kendisine Chevalier de Méré unvanını seçen yazar ve amatör matematikçi Antoine Gombaud, tek bir atışta altı



Burada gösterilen örnekte olasılığı ölçmek kolaydır. Söz konusu nesne (mavi şekerler) yoksa sıfırdır ve şekerlerin yarısı maviyse 0,5'tir (veya 1⁄2 ya da yüzde 50). Olaylar kesin olduğunda, olasılık = 1'dir (veya yüzde 100).



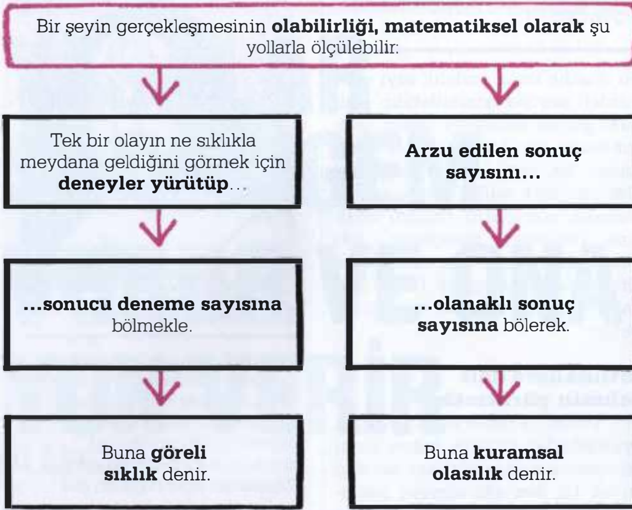
Pierre de Fermat

1601'de Fransa'nın Beaumont-de-Lomagne kasabasında dünyaya gelen Pierre de Fermat hukuk okumak için 1623'te Orléans'a taşındı; çok geçmeden, ilgi duyduğu matematiğe yöneldi. Zamanının diğer bilginleri gibi kadim dünyada üretilen problemlere çalıştı ve çözümlerini bulmak için cebirsel yöntemleri uyguladı. 1631'de Fermat, Toulouse'a taşınıp avukatlıkla meşgul oldu.

Fermat boş zamanlarında matematik araştırmalarını sürdürdü, Blaise Pascal'ın da dahil olduğu arkadaşlarına yazdığı mektuplarda fikirlerini iletti. 1653'te vebaya yakalanmasına rağmen hayatta kaldı ve en iyi yapıtlarının bir kısmını bu hadiseden sonra üretti. Olasılık üzerine fikirlerinin yanı sıra Fermat, türev hesabını geliştirdi ama hatırlanmasını sağlayan katkılarının en başında sayı kuramına ve Fermat'nın son teoremine katkıları gelir. Castres'de 1655'te hayata gözlerini yumdu.

Önemli eserleri

1629 *De tangentibus linearum curvarum (Eğrilerin Teğetleri)*
1637 *Methodus ad disquirendam maximam et minimam (Maksimum ve Minimum Noktaları Araştırma Yöntemleri)*



gelmesi ihtimalinin 1/6 olduğunu idrak etti ve bir çift zarla altı-altı atma ihtimalini hesaplamayı amaçladı.

De Méré, bir zarı iki kere atıp iki kez altı bulma şansının 1/36 olduğunu iddia etti; yani bir atışta altı bulma ihtimalinin 1/6'sıydı. Bu ihtimallerin aynı olması için, tek bir zarın her atılışı için, bir çift zarın altı kez atılması gerektiğini iddia etti. Dört zar atıldığında bir altı gelmesi şansı ile altı-altı gelmesi şansının aynı olması için, zar çifti $6 \times 4 = 24$ kez atılmalıdır. De Méré bahsi kaybedip durdu ve bir çift zar 24 kere atıldığında altı-altı gelmesinin, tek bir zarla dört atışta bir kez altı gelmesinden daha az olası olduğunu kabul etmek zorunda kaldı.

1654'te, de Méré, elindeki problemi ve oyun tamamlanmadan kesildiğinde ortadaki paranın oyunculara nasıl bölüştürülmesi gerektiğini arkadaşı Pascal'a danıştı. Bu, "puan problemi" olarak biliniyordu ve geçmişi eskilere dayanıyordu. 1494'te İtalyan matematikçi Luca Pacioli, ortadaki paranın, her oyuncunun kazandığı tur sayısıyla orantılı olarak bölüştürülmesi gerektiğini ileri sürdü.

16. yüzyılın ortalarında bir başka önemli matematikçi Niccolò Tartaglia, mesela, oyun hemen ilk turda kesildiği takdirde bu bölüşümün haksız olacağını belirtmişti. Onun önerdiği çözümde turda ortaya koyulan paranın bölüşümü, kazananın ne kadar önde olduğunun oyunun uzunluğuna oranına dayanıyordu ama bu sefer de çok turlu oyunlardaki sonuçlar kusurlu oluyordu. Tartaglia, bu problem için oyuncuların adilliğinden şüphe duymayacağı bir çözümün var olduğuna hiç emin olamadı.

Pascal-Fermat mektupları

17. yüzyılda matematikçilerin akademilerde (bilim derneklerinde) toplanması olağandı. Fransa'nın önde gelen bilim derneği, Paris'teki evinde haftalık toplantılar düzenleyen Cizvit rahip ve matematikçi Abbé Marin Mersenne'inkiydi. Pascal bu toplantılara katılmasına rağmen Fermat ile daha tanışmamıştı. Buna rağmen, de Méré'nin



Standart bir rulet tekerleğinde, tekerleğin tek döndürülüşünde, topun verilen herhangi bir sayıda durma şansı 1/37'dir. Bu sayı, döndürülme sayısı arttıkça 1'e yaklaşır

> Tercih, olasılık; olasılık da matematikçilerin işe koyulması gerektiği anlamına gelir.
> **Hannah Fry**
> **İngiliz matematikçi**

problemlerine kafa yorduktan sonra Pascal Fermat'ya mektup yazıp bu problemler ve ilintili meselelere dair düşüncelerini, Fermat'ya kişisel görüşlerini de sorarak aktarmayı tercih etti. Bu mektup sayesinde Pascal'la Fermat arasında başlayan yazışmada, matematiksel olasılık kuramı geliştiriliyordu.

Oyuncu kasaya karşı

Pascal'la Fermat arasında gelip giden mektupları, ortak arkadaşları Pierre de Carcavi postalıyordu. 1654'teki yazışmalarda bu iki adamın puan problemine dair düşüncelerinde farklı senaryolar incelemeye alınır. Sekiz denemede en az bir kez altı atmaya çalışan bir oyuncunun, o başarısız olduğu takdirde ortadaki parayı "kasanın" aldığı bir oyunu tartışırlar. Pascal'ın iddiası, altı atılmadan oyun kesildiğinde, paranın oyuncunun kazanma beklentisine göre bölüştürülmesi gerektiği yönündedir. Oyunun başında sekiz kez zar atıp başarısız olma olasılığı $(5/6)^8 \approx 0{,}233$, en az bir kez altı atma olasılığıysa (1 − 0,233) ya da 0,7677'dir. Oyunun favorisi açık arayla "kasa" değil zarı atandır.

Kuramı belirlemek

Pascal ve Fermat diğer mektuplarda oyunların yarıda kesildiği başka örnekler tartışılır. İki oyuncudan biri başarılı olana kadar sırayla zar atılan bir örnekte, Fermat'ya göre önemli olan, oyun durduğu anda kalan atış sayısıdır. 10 kez altı atılana dek süren bir oyunda 7-5 önde olan bir oyuncunun, 20 kez altı atılana dek süren bir oyunda 17-15 önde olan bir oyuncuyla kazanma şansının aynı olduğuna dikkat çeker.

Pascal'ın örneğinde, eşit kazanma şanslarına sahip iki oyuncunun oynadığı peşpeşe oyunlarda, üç oyunda galibiyete ulaşan ilk oyuncu ortadaki parayı kazanır. Oyuncular 32'şer pistole koyar, dolayısıyla ortadaki para 64 pistoledir. Üç oyunun sonunda birinci oyuncunun iki, öbür oyuncu bir galibiyeti vardır. Şimdi dördüncü oyunu oynamaları halinde birinci oyuncu kazanırsa 64 pistoleyi o alacaktır; diğeri kazanırsa ikişer oyun kazanmış olacak ve iki oyuncunun son oyunu kazanma olasılığı eşit olacaktır. Bu noktada dururlarsa ikisi de 32 pistolelerini geri almalıdır.

Pascal'ın adım adım ilerleyen yöntemleri ve Fermat'nın üzerine düşünüp taşınılmış yanıtları, olasılık hakkında akıl yürütmede beklentilerin kullanımına dair ilk örneklerdendir. Bu iki kişi arasındaki yazışmayla olasılık kuramının temel ilkeleri tespit edilmiş oldu ve şans oyunlarının ilk kuramcılar için bereketli bir alan olduğunu anlayanların sayısı artacaktı. Hollandalı fizikçi ve matematikçi Christiaan Huygens'se, "Şans oyunlarında akıl yürütme üzerine" sözleriyle çevrilen ve olasılık kuramı üzerine ilk kitap olma özelliğini taşıyan bir incelemeyi kaleme aldı.

Aynı eylemin (örneğin zar atmak) birçok kez gerçekleştirilmesiyle ortaya çıkan sonuçların incelendiği bir teorem olan büyük sayılar yasasının (BSY) ilk çeşitlerinden birine, İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli'nin *Ars Conjectandi* (*Kestirim Sanatı*, 1713) eserinde yer veriliyordu. 18. yüzyılın sonlarında ve 19. yüzyılın başlarında olasılık kuramını uygulamalı ve bilimsel problemlere uygulayan Pierre-Simon Laplace'se yöntemlerini 1812'de *Théorie Analytique des Probabilités'de* (*Analitik Olasılık Kuramı*) yazıya döktü. ■

Olasılık kuramı

Ortada olasılığa temel teşkil edecek bir kuram olmamasına rağmen ilk ve ortaçağ hukukçuları adli delil incelemelerinde olasılıktan yararlanıyordu. Rönesans döneminde keza gemilerle ilgili sigorta hesaplamalarında primler sezgiye dayalı risk tahminine dayanıyordu. İhtimaller oyunlara özgü bir özellik olmasına karşın Gerolamo Cardano bir ilki gerçekleştirerek olasılığı matematiğe uyguladı. Pascal ve Fermat sonradan yerleşikleşen kurama konu hakkındaki mektuplarıyla büyük katkı verdiler ama onların ölümlerinin ardından dahi şans oyunları bu tür araştırmaların odağı olarak kaldı.

1700'lü yılların sonlarında Pierre-Simon Laplace olasılık kuramının kapsamını bilimi içerecek ölçüde genişletti ve doğa olayları dahil pek çok olayın olasılığını tahmin etmeye yönelik kendi matematik araçlarını uygulamaya koydu. Hatta kuramın istatistiğe uygulanabileceğini de fark etti. Olasılık kuramı psikoloji, iktisat, mühendislik ve spor gibi daha pek çok alanda da kullanılmakta.



UZAKLIKLARIN TOPLAM YÜKSEKLİĞE EŞİTTİR

VIVIANI'NİN ÜÇGEN TEOREMİ

KISACA

KİŞİ
Vincenzo Viviani
(1622–1703)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ y. 300 Öklit, *Öğeler* kitabında üçgenin tanımını yapar ve üçgenlerle ilgili çok sayıda teoremi ispatlar.

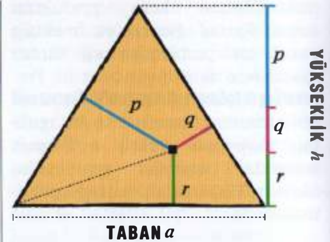
MS y. 50 İskenderiyeli Heron bir üçgenin alanının kenar uzunluklarından bulunduğu bir formülü açıklar.

SONRA
1822 Alman geometrici Karl Wilhelm Feuerbach bir üçgenin her kenarının orta noktasından geçen bir dokuz nokta çemberine dair bir ispatı yayımlar.

1826 İsviçreli geometrici Jakob Steiner üçgen merkezini, üç köşesinden toplam uzaklığı minimum olan nokta olarak tarif eder.

İtalyan matematikçi Vincenzo Viviani, Floransa'da Galileo'nun gözetiminde çalıştı. Galileo'nun 1642'deki vefatının ardından Viviani, ustasının çalışmalarını derleyip topladı ve ilk derlemeyi 1655-1656 yıllarında yayıma hazırladı.

Viviani'nin araştırması, gerçek değerine saniyede 25 m yakınlıkla ölçtüğü sesin hızı üzerine bir çalışmayı içeriyordu. Gerçi Viviani'nin en bilinen çalışması üçgen teoremidir. Onun bu teoremine göre, bir eşkenar üçgendeki herhangi bir nokta ile o üçgenin kenarları arasındaki toplam uzaklık, üçgenin yüksekliğine eşitti.



Yukarıdaki gibi bir eşkenar üçgenin yüksekliği, üçgenin içindeki herhangi bir noktadan, üçgenin üç kenarıyla dik açı oluşturacak şekilde çizilen çizgilerin toplam uzunluğuna daima eşittir.

Teoremi ispatlamak

Tabanı (kenar) a ve yüksekliği h (bkz. sağ üstte) olan bir eşkenar üçgenle başlanır ve üçgenin içerisinde bir nokta belirlenir. Bu noktadan her üç kenara, kenarla 90° açıyla buluşan dik doğrular (***p***, ***q*** ve ***r***) çizilir. Noktadan her köşesine birer çizgi çekilen üçgen, böylelikle üç küçük üçgene bölünür. Bir üçgenin alanı $^1/_2$ × taban × yükseklik olduğundan, dikmelerin uzunlukları ***p***, ***q*** ve ***r***'yse, üçgenlerin alanları toplamda $^1/_2$ $(p + q + r)a$ olur. Bu aynı zamanda büyük üçgenin alanıdır, yani $(^1/_2)ha$'dır; buradan hareketle, $h = p + q + r$'dir. ***h*** uzunluğundaki bir sopayı kırıp üçe bölecek olursanız, üçgende sopanın parçalarının ***p***, ***q*** ve ***r*** dikmelerini oluşturacağı bir nokta her zaman olacaktır. ■

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Tasarı geometri 154–55 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–29



SARKACIN SALINIMI

HUYGENS'İN TAUTOCHRONE EĞRİSİ

KISACA

KİŞİ
Christiaan Huygens
(1629–95)

ALAN
Geometri

ÖNCE
1503 Sikloitin tanımını ilk olarak Fransız matematikçi Charles de Bovelles yapar.

1602 Galileo bir sarkacın bir salınımı tamamlaması için geçen sürenin, salınımın genişliğine bağlı olmadığını keşfeder.

SONRA
1690 İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli, brachistochrone problemini (en hızlı düşüşü sağlayan eğriyi bulma) çözmek amacıyla Huygens'in tautochrone problemine getirdiği tamamlanmamış çözümünden yararlanır.

1700'lerin İngiliz saat yapımcısı John Harrison ve başkaları, sarkaç yerine yayları kullanarak boylam problemine çözüm getirirler.

1656'da Hollandalı fizikçi ve matematikçi Christiaan Huygens, salınan sabit bir ağırlık içeren bir saat anlamına gelen sarkaçlı saati yarattı. Huygens'in arzusu, gemilerin boylamının bulunmasıyla ilgili denizcilik problemine çözüm getirmekti. Zamana dair kesinlik içeren hesaplamalar olmadan bunu yapmak imkânsızdı; bu nedenle, sarkaç salınımında büyük farklılıklara, dolayısıyla da zamansal tutarsızlıklara yol açan dalgaların salınımlı hareketiyle baş edecek hatasız bir saate ihtiyaç vardı.

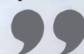
Doğru eğriyi aramak

Sarkacın izleyeceği güzergâh (tautochrone eğrisi adıyla bilinir) için öyle bir eğrilik bulunmalıydı ki, sarkacın en alçak noktasına dönmesi için geçecek süre, en yüksek noktasına bakılmaksızın sabit olmalıydı. Huygens tepe kısmının eğimi dikeye, taban kısmının eğimi düşeye yakın bir eğri olan sikloiti tanımladı. Bir sarkacın eğri güzergâhının, sarkaç bir sikloit çizecek şekilde ayarlanması gerekiyordu. Huygens'in aklına gelen fikir, sikloit şekilli "parçalar" eklemek suretiyle sarkacı kısıtlamaktı. Kuramsal olarak, artık her hareketin süresi başlangıç noktası ne olursa olsun aynı olacaktı. Oysa sürtünme Huygens'in çözüm bulmaya çalıştığı hatanın daha da büyüğüne yol açtı. İtalyan Joseph Louis Lagrange sayesinde ancak 1750'li yıllarda bir çözüme ulaşılabildi. Bu çözüme göre, eğrinin yüksekliğinin, sarkacın izlediği yayın uzunluğunun karesiyle orantılı olması gerekir. ■



Bir sikloiti izleyerek süzülmekte olan tüm nesnelerin herhangi bir noktadan yere kesinlikle aynı süre içerisinde alçalması, benim çok etkilendiğim fevkalade bir geometri hakikati

Herman Melville
Moby Dick **(1851)**



Ayrıca bkz. Bir sikloitin altında kalan alan 152–53 ▪ Pascal üçgeni 156–61 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85

KALKÜLÜSLE GELECEĞİ TAHMİN EDEBİLİRİM

KALKÜLÜS



KISACA

KİŞİLER
Isaac Newton (1642–1727), **Gottfried Leibniz** (1646–1716)

ALAN
Kalkülüs

ÖNCE
MÖ 287-212 Arşimet tüketme yöntemini kullanarak yaptığı alan ve hacim hesaplamalarıyla sonsuz küçükler kavramını tanıtır.

y. 1630 Pierre de Fermat eğrilerin teğetlerini bulup maksimum ve minimum noktalarının konumunu saptamaya yarayan yeni bir teknik kullanır.

SONRA
1740 Leonhard Euler kalkülüs, karmaşık cebir ve trigonometriyi sentezlemek için kalkülüsle ilgili fikirleri uygular.

1823 Fransız matematikçi Augustin-Louis Cauchy, kalkülüsün temel teoremini formüle eder.

Şeylerin değişiminin işlendiği matematik dalı olan kalkülüsün geliştirilmesi matematik tarihindeki en önemli atılımlardandı. Hareketli bir aracın konumunun zaman içinde nasıl değiştiği, bir ışık kaynağı uzaklaştıkça parlaklığının nasıl azaldığı veya bir insanın, hareketli bir cismi takip eden gözlerinin duruşunun nasıl değiştiği, kalkülüs aracılığıyla gösterilebilir. Değişim halindeki olguların maksimum veya minimum değere hangi noktada ulaştığını ve bu iki nokta arasında ne hızla ilerlediğini meydana çıkarabilir.

Değişim oranlarının dışında kalkülüsteki başka bir önemli nokta da, alanları hesaplama gereksiniminden kaynaklanan toplam işlemidir (bir şeyleri birbirine ekleme işlemi). Sonuç olarak alan ve hacimlerin incelendiği konu integral alma adıyla yaygınlaştı, değişim oranlarının hesaplanmasınaysa diferansiyel adı verildi.

Kalkülüsü kullanarak olguların davranışları daha iyi anlaşılabilir, bunun sonucunda da olguların gelecekteki durumları hakkında tahmin yürütülebilir, hatta etki edilebilir. Nasıl cebir ve aritmetik sayısal ya da genelleştirilmiş niceliklerle çalışmaya yarayan araçlarsa, benzer şekilde kalkülüsün de kendi kuralları, notasyonları ve uygulama alanları vardır ve 17. ve 19. yüzyıllar arasında geliştirilmesiyle birlikte mühendislik ve fizik gibi alanlarda çabucak ilerleme kaydedilmiştir.

> Dünyada maksimum veya minimumuyla ifade edilmeyen hiçbir şey meydana gelmez.
> **Leonhard Euler**

Arşimet'e **göre daire, sonsuz sayıda kenara** sahipti.

→ **Dairenin alanının** yaklaşık bir değerini, onu **sonsuz küçük kenarlı çokgenlerin** içine yerleştirerek buldu.

→ **Sonsuz parçaya** bölme işlemi integral alma (alan ve hacmin ele alındığı inceleme konusu) işlemlerinde esastır.

→ **Modern kalkülüsün temelinde Antik Yunan düşünü yer alır.**

Antik köken

Kadim Babil ve Mısırlılar ölçümle özellikle ilgileniyorlardı. Ürün yetiştirmek ve sulama amacıyla tarlaların boyutlarını hesaplayabilmek, ayrıca tahıl depolamak için yapıların hacmini bulabilmek onlar için önemliydi. Alan ve hacme ilişkin ilk kavramları geliştirdilerse de bunlar daha ziyade çok özel örnekler halinde oluyordu; buna bir örnek, Rhind papirüsünde yer alan 9 khet (Antik Mısır uzunluk birimi) çapında yuvarlak bir tarlanın alanıyla ilgili problemdir. Rhind papirüsünde saptanan kurallar 3000 yıldan uzun bir zaman sonra en nihayetinde integral hesabı adıyla ilan edilecek alanın yolunu açtı.

Sonsuzluk kavramı kalkülüste esastır. Antik Yunan'da filozof Elealı Zenon, MÖ 5. yüzyılda tasarladığı ve Zenon'un hareket paradoksları adı verilen bir dizi felsefe probleminde, verili herhangi bir uzaklığın sonsuz

Ayrıca bkz. Rhind papirüsü 32–33 ▪ Zenon'un hareket paradoksları 46–47 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Ondalık sayılar 132–37 ▪ Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Bir sikloitin altında kalan alan 152–53 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Euler denklemi 197



Uygarlıklar kalkındıkça hassas ölçümler vazgeçilmez oldu. Antik Mısır'a ait bu mezar resminde, ölçümcüler iple bir buğday tarlasının ölçüsünü almakta.

sayıda orta nokta içerdiği için, hareketin imkânsız olduğunu iddia ediyordu.

MÖ yaklaşık 370'te Yunan matematikçi Knidoslu Eudoksos'un önerdiği alan hesaplama yönteminde, alanı bilinen özdeş çokgenler alanı hesaplanacak şeklin içine doldurulduktan sonra sonsuza dek küçültülüyordu. Çokgenlerin toplam alanının en nihayetinde şeklin gerçek alanına yakınsayacağı, yöntemin ardındaki düşünceydi. "Tüketme yöntemi" denen bu yöntemi MÖ yaklaşık 225'te Arşimet masaya yatırdı. Bir daireyi kenar sayısı giderek artan çokgenlerle çevreleyerek o dairenin alanının bir yaklaşık değerini buldu; kenarların sayısı arttıkça, alanları bilinen çokgenlerin daireye benzerliği de gitgide artar. Bu fikri sonuna kadar zorlayan Arşimet, sonsuz küçük kenarlara sahip bir çokgeni gözünde canlandırdı. Sonsuz küçüklerin kabulü kalkülüsün gelişiminde çok önemli bir andı: Zenon'un hareket paradoksları gibi daha önce çözülemeyen bilmeceler artık çözülebiliyordu.

> Çünkü son hızla anlatılmak istenen, hareket kesildiğinde cismin son konumuna ulaşmasından önceki ya da sonraki hızı değil, tam da son konumuna ulaştığı anda hareket ettirildiği hızdır.
>
> **Isaac Newton**

Taze fikirler

Ortaçağ Çin ve Hindistan'ındaki matematikçiler sonsuz toplamların ele alınışında daha da çok yol aldılar. İslam dünyasında da cebrin geliştirilmesinin taşıdığı anlam, bir durumun sonsuza kadar tüm sayılar için geçerli olduğunun ispatlanmasında tüm çeşitleme olanakları için hesaplamaları ayrıntılarıyla milyonlarca kez kâğıda dökmek yerine genelleştirilmiş simgelerin kullanılabilecek olmasıydı.

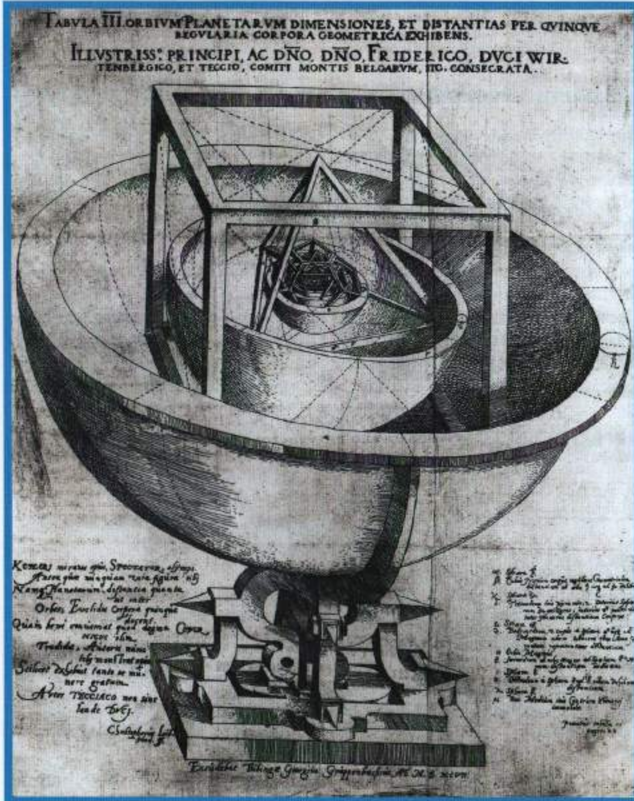
Avrupa'da matematik uzun süren bir duraklama döneminden geçmişti, ama 14. yüzyılda Rönesansın kökleşmesiyle birlikte matematiğe yeniden ilgi duyulması, hem hareketin hem de uzaklık ve hızın tabi olduğu yasalar hakkında taze fikirlerin üretilmesini beraberinde getirdi. Fransız matematikçi ve filozof Nicole Oresme, ivmelenen bir cismin hızını zamana göre inceledi ve bu ilişkiyi açıklayan grafiğin altında kalan alanın, cismin katettiği mesafeyle eşdeğer olduğunu fark etti. İngiltere'de Isaac Newton ve Isaac Barrow, Almanya'da Gottfried Leibniz ve İskoç matematikçi James Gregory 17. yüzyıl sonlarında bu kavramı formül haline getireceklerdi. Oxford Üniversitesinin bünyesindeki Merton Kolejindeki "Oxford Hesaplamacıları" lakaplı bir grup 14. yüzyıl bilgininin

çalışması, Oresme'ye araştırmasında ilham vermişti. Sonraları Oresme'nin ispatlayacağı ortalama hız teoremini geliştiren de bu gruptu. Teoremdeki tespite göre, eğer bir cisim düzgün ivmeli olarak hareket ediyor, ikinci bir cisim ilk cismin ortalama hızına eşit bir düzgün hızla hareket ediyor ve her iki cisim de hareketlerini aynı sürede yapıyorsa, iki cisim de aynı mesafeyi kat eder. Merton'daki bilginler hesaplama ve mantıktan yararlanarak fizik ve felsefe problemlerini çözmek için mesai harcıyor ve ısı, renk, ışık ve hız gibi olguların nicel analizine merak duyuyorlardı. Arap astronom El-Battanî'nin (MS 858-929) trigonometrisine ilaveten Aristoteles'in mantık ve fiziğinden etkilenmişlerdi.

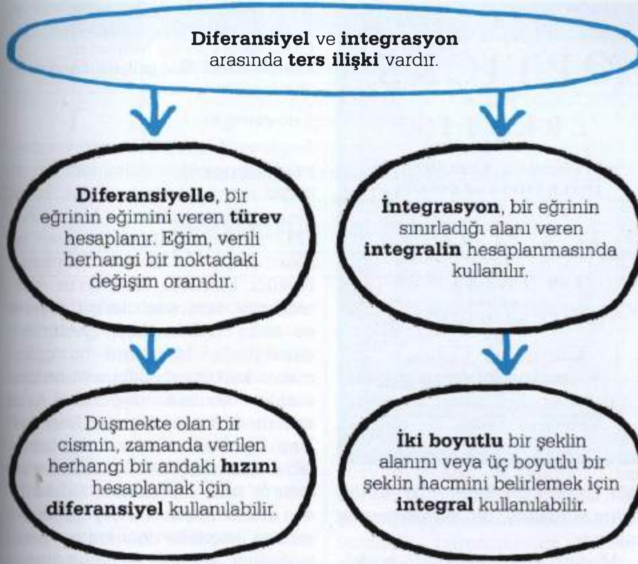
Yeni atılımlar

Kalkülüsün geliştirilmesi yönünde atılan birbiri ardına adımlar 16. yüzyılın sonlarına doğru hız kazandı. Yaklaşık 1600'de, Fransız matematikçi François Viète cebirde simgelerin kullanımını destekledi (daha önce sözcüklerle tarif ediliyordu). Flaman matematikçi Simon Stevin'se matematikteki limitler kavramına hayat verdi. Limitler kavramı sayesinde, Arşimet'in çokgenlerinin alanının bir dairenin alanına yakınsamasına benzer şekilde, niceliklerin toplamı bir limit değere yakınsayabiliyordu.
Hemen hemen aynı sıralarda Alman matematikçi ve astronom Johannes Kepler gezegenlerin hareketi üzerine araştırma yürütüyordu. Daire değil eliptik kabul ettiği bir gezegen yörüngesinin sınırladığı alanın hesaplanması da araştırma konularından biriydi. Antik Yunanların yöntemini kullanarak, elipsi sonsuz küçük genişlikteki şeritlere bölmek suretiyle alanı buldu.

Daha derli toplu bir integral hesabının gelişini müjdeleyen Kepler'in bu yöntemini, 1635 yılında Bonaventura Cavalieri, Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota'da (Sürekli Nesnelerin Bölünmezlikleri Üzerinden Yeni Bir Teknikle İleri Geometri) daha da geliştirdi. Cavalieri şekillerin boyutlarını belirlemeye yarayan daha özenli bir yöntem olarak bir "bölünmezler yöntemi" tasarladı. İngiliz teolog ve matematikçi Isaac Barrow ve İtalyan fizikçi Evangelista Torricelli'nin çalışmaları, sonrasında eğrilere dönük analizleriyle yeni geometrik cebir alanının ortaya çıkması için önayak olan Pierre de Fermat ve René Descartes'ın çalışmaları 17. yüzyılda kaydedilen diğer ilerlemeler oldu. Fermat bir eğrinin en büyük ve en küçük değerlerini ifade eden maksimum ve minimum noktaların konumunu da tespit etti.



Güneş sisteminin Kepler'e ait olan bu Platonik katı modelinin çizimi, 1596'da yayımlanan bir kitapta resmedildi. Kepler bir yörünge üzerinde katedilen mesafeyi ölçmek için sonsuz küçük şeritlerden yararlandı. İntegral için önayak olan, bu yöntemdi.

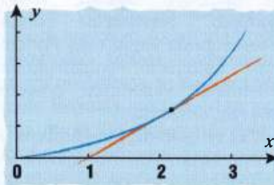


Akı modeli

İngiliz matematikçi Isaac Newton 1665 ve 1666 yıllarında, zamanla değişen değişkenlerin hesaplandığı ve kalkülüs tarihi için milat niteliğindeki "akılar yöntemini" geliştirdi. Kepler ve Galileo gibi, Newton da hareketli cisimleri incelemekle ilgileniyor ve gökcisimlerinin hareketinin tabi olduğu yasaları Yer üzerindeki hareketle bütünleştirmeye özellikle heves ediyordu.

Newton akı modelinde, bir eğri üzerinde ilerleyen bir noktayı iki dik bileşene (x ve y) bölünmüş olarak göz önüne aldı ve ardından bu bileşenlerin hızları üzerine düşündü. Türev hesabı (veya diferansiyel) adıyla bilinirlik kazanan matematik alanının temeli bu çalışmayla atıldı. Kendisiyle ilintili olan integral hesabı alanıyla birlikte türev hesabı, kalkülüsün temel teoremini (bkz. sağdaki kutu) beraberinde getirdi. Türev hesabının merkezindeki anlayışa göre, bir değişkenin bir noktadaki değişim hızı, o noktadaki bir teğetin eğimine eşittir.

Bir teğet (bir eğriye tek bir noktada temas eden bir doğru) çizilerek tasvir edilebilir. Bu çizginin eğimi veya dikliği, eğrinin o noktadaki değişim hızıdır. Newton maksimum ve minimum noktalarında eğrinin eğiminin sıfır olduğunu



Diferansiyel, zamanda verili bir noktadaki değişim hızını bulmak için kullanılabilir. Mavi çizgi genel değişim hızını, turuncu teğetse verilen bir noktadaki değişim hızını gösterir.

Kalkülüsün temel teoremi

Kalkülüs alanının temelinde, her ikisi de sonsuz küçükler kavramına dayanan diferansiyel ve integrasyon arasındaki ilişkiyi açıkça belirten kalkülüsün temel teoremi yatar. İlk olarak James Gregory'nin 1668 tarihli *Geometriae Pars Universalis'inde* (*Geometrinin Evrensel Bölümü*) açıkladığı teoremi daha sonra Isaac Barrow 1670'de genelleştirdi, Augustin-Louis Cauchy de 1823'te formülleştirdi.

Teorem iki bölümden oluşur. İlk bölümde, integrasyon ile diferansiyelin birbirinin tersi olduğu belirtilir: Her sürekli fonksiyon (tüm değerler için tanımlanabilen bir fonksiyon) için, bir "terstürev" (yani "integral") mevcuttur ve bu terstürevin türevi (değişim hızının bir ölçüsü) fonksiyonun kendisidir. Teoremin ikinci bölümünde, değerler $F(x)$ terstürevine yerleştirilirse, çıkan sonucun $f(x)$ fonksiyonunun belirli integralinin) $f(x)$ fonksiyon eğrisinin altında kalan alanların hesaplanmasını mümkün kılar.



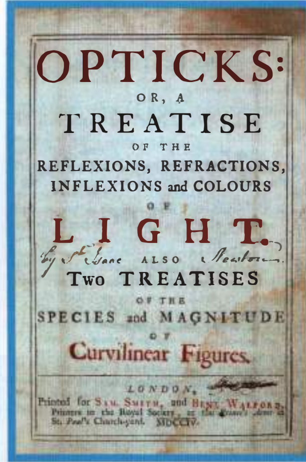
James Gregory (1638–75) kalkülüsün temel teoremini ilk formülleştiren kişiydi.

fark etti çünkü bir şey en yüksek veya en alçak noktasındayken o an itibariyle değişmemektedir. Daha sonra Newton, kuramını daha da geliştirme niyetiyle problemin tersi üzerine kafa yordu: Bir değişkenin değişim hızı biliniyorsa bizzat değişkenin şeklini hesaplamak mümkün müdür? Bu "terstürev alma" işlemi için, eğrinin altında kalan alanların bulunması gerekiyordu.

Newton'la Leibniz karşı karşıya

Newton kendi kalkülüsünü geliştirdiği sıralarda Alman matematikçi Gottfried Leibniz kendi kalkülüsünün üzerinde çalışmaktaydı. Leibniz'inki esasen bir eğrinin üzerindeki bir noktayı tanımlayan iki koordinattaki sonsuz küçük değişimleri dikkate alıyordu. Newton'dan çok daha farklı bir notasyon kullanan Leibniz, ileride türev hesabı olarak anılacak konu üzerine 1684 tarihli bir makale yayımladı. İki yıl sonra, bu kez integrasyonu konu ettiği ama gene Newton'ınkinden farklı bir notasyon kullandığı bir makaleyi daha yayımladı. Günümüzde evrensel çapta kullanılıp tanınan ∫ "integral" simgesini ilk

> Mümkün her an için anlık hızımızı bildiğim kabul edilirse, bu bilgiyi ne kadar mesafe katettiğimizi saptamada kullanabilir miyim? Kalkülüs der ki, kullanabilirim.
>
> **Jennifer Ouellette**
> **Amerikalı bilim yazarı**


OPTICKS:
OR, A
TREATISE
OF THE
REFLEXIONS, REFRACTIONS, INFLEXIONS and COLOURS
OF
LIGHT.
ALSO
Two TREATISES
OF THE
SPECIES and MAGNITUDE
OF
Curvilinear Figures.

LONDON,
Printed for SAM. SMITH, and BENJ. WALFORD, Printers to the Royal Society, at the Prince's Arms in St. Paul's Church-yard. MDCCIV.

Isaac Newton'ın ışığın yansıma ve kırılmaları konusunu işlediği 1704 tarihli eseri *Opticks*, Newton'ın kalkülüs alanındaki çalışmalarına dair ilk ayrıntıları içerir.

defa Leibniz 29 Ekim 1675 tarihli yayımlanmamış bir elyazmasında kullandı.

Modern kalkülüsü kimin keşfettiği konusu bir hayli tartışıldı: Kâşif, Newton muydu yoksa Leibniz mi? Tartışmalar hem iki rakip arasında hem de matematik camiasının büyük bölümünde uzun süre dinmeyecek bir kine yol açtı. Newton'ın 1665 ve 1666 yıllarında tasarlamasına rağmen yayımlamadığı akılar kuramı ancak 1704'te *Opticks*'e ek olarak koyulup yayımlandı. Leibniz aşağı yukarı 1673'te kalkülüsün kendisine ait versiyonunun üstünden geçmeye başladı, 1684'te yayımladı. Newton'ın bundan hemen sonraki yapıtı olan *Principia*'nın, Leibniz'in çalışmasından etkilenilerek yazıldığını gösteren izlere rastlanıyordu.

1712'ye gelindiğinde Leibniz ve Newton birbirlerini intihalle alenen suçluyorlardı. İçinde bulunduğumuz modern dönemde, Leibniz ve Newton'ın konuya ilişkin fikirlerini birbirinden habersiz geliştirdiklerine dair görüş birliği vardır. 1690'da "integral" terimini türeten Jacob ve Johann Bernoulli kardeşler de İsviçre'den kalkülüse kayda değer katkılarda bulundular. İskoç matematikçi Colin Maclaurin, 1742'de yayımladığı *Treatise on Fluxions* (*Akılar Üzerine İnceleme*) başlıklı eserinde Newton'ın yöntemlerini tanıtıyor, ileriye taşıyor ve daha hassas hale getirmeye çabalıyordu. Maclaurin bu çalışmada kalkülüsü cebirsel terimli sonsuz serilere uygular. Aynı zaman zarfında Johann Bernoulli'nin oğullarının yakın dostu İsviçreli matematikçi Leonhard Euler de onların konu hakkındaki fikirlerinden etkilenmişti. Her şeyden önce, sonsuz küçükler kavramını üstel fonksiyon (e^x) adlı kavrama uyguladı. Sonuçta, en temel matematiksel niceliklerin beşini (e, i, π, 0 ve 1) çok basit bir yolla birbirine bağlayan $e^{i\pi} + 1 = 0$ şeklindeki Euler denklemine ulaşıldı.

18. yüzyılda zaman ilerledikçe, kalkülüsün fiziki dünyayı açıklamaya ve anlamaya yönelik bir araç

> Aynı değişkene, sabit bir değere sürekli olarak yaklaşacağı şekilde art arda değerler atandıkça fark arzu edilen küçüklüğe ulaşana dek işleme devam edilebildiği zaman, bu sabit değere limit adı verilir.
>
> **Augustin-Louis Cauchy**

Modern kalkülüsün notasyonu	
$\dot{f}$	**Diferansiyel** için **Newton** tarafından icat edildi.
$\int$	**İntegrasyon** için **Leibniz** tarafından icat edildi.
dy/dx	**Diferansiyel** için **Leibniz** tarafından icat edildi.
f'	**Diferansiyel** için **Lagrange** tarafından icat edildi.

olarak gitgide daha kullanışlı hâle geldiği anlaşıldı. 1750'li yıllarda Fransız matematikçi Joseph-Louis Lagrange'la işbirliği içerisinde çalışan Euler kalkülüsü kullanarak, hem akışkan (gaz ve sıvı) hem katı mekaniğinin anlaşılmasna yardımcı olan Euler-Lagrange denklemi adlı denklemi elde etti. 19. yüzyıl başlarında Fransız fizikçi ve matematikçi Pierre-Simon Laplace, elektromanyetik kuramı kalkülüsten yardım alarak geliştirdi.

Kuramları formülleştirmek

Augustin-Louis Cauchy'nin kalkülüsün temel teoremini resmen duyurduğu 1823 yılında kalkülüste çeşitli gelişmeler resmiyet kazandı. Özü itibarıyla bu teorem, diferansiyel işleminin (eğriyle gösterilen bir değişkenin değişim hızlarının bulunması), integrasyon işleminin (bir eğrinin altında kalan alanın hesaplanması) tersi olduğunun tespitidir. Cauchy teoremi resmiyete kavuşturması, evrensel bir notasyonla tutarlılık içerisinde sonsuz küçükleri ele alan kalkülüsün, bileşik bir bütün olarak görülmesini sağladı.

19. yüzyılın ilerleyen dönemlerinde de kalkülüs konusunun gelişimi sürdü. 1854'te Alman matematikçi Bernhard Riemann integrali alınabilen ve alınamayan fonksiyonlara ilişkin bir dizi ölçütü formülleştirdi; ölçütlerini, fonksiyonların alt ve üst limitlerinin tanımlanmasına dayandırdı.

Yaygın uygulamaları

Fizikte ve mühendislikte kaydedilen çoğu ilerlemede kalkülüse bel bağlanmıştır. Albert Einstein 20. yüzyılın başlarında kalkülüsü özel ve genel görelilik kuramlarında kullanmış, kuantum mekaniğinde (atomaltı parçacıkların hareketiyle ilgilenir) kalkülüse geniş bir uygulama sahası ayrılmıştır. Avusturyalı fizikçi Erwin Schrödinger'in 1925'te yayımladığı Schrödinger dalga denklemi adlı diferansiyel denklemde, bir parçacık, durumu yalnızca olasılıktan yararlanılarak saptanabilen bir dalga olarak modellenir. O zamana dek kesinliğin egemenlik sürdüğü bilim dünyasının ezberini bozan, bu olmuştur.

Günümüzde kalkülüsün uygulandığı pek çok önemli alan vardır: Örneğin arama motorlarında, inşaat projelerinde, tıptaki ilerlemelerde, iktisadi modellerde ve hava tahminlerinde kalkülüs kullanılır. Her yana nüfuz etmiş bu matematik dalının olmadığı bir dünyayı hayal etmek, bilgisayarlardan şüphesiz yoksun bir dünyayı hayal etmek anlamına geldiğinden, güçtür. Son 400 yılın en önemli matematik keşfinin kalkülüs olduğu iddiasına, çoğu kişi itiraz etmeyecektir. ■



Gottfried Leibniz

1646'da Almanya'nın Leipzig şehrinde dünyaya gelen Gottfried Leibniz, akademik çevreden bir ailede yetişti. Babası ahlak felsefesi profesörü, annesiyse bir hukuk profesörünün kızıydı. Üniversite eğitimini tamamladıktan sonra Leibniz, 1667 yılında Mainz Seçmen Prensinin hukuki ve siyasi danışmanı oldu ve bu makamı sayesinde seyahat edip Avrupalı diğer bilginlerle tanışma fırsatı elde etti. İşvereninin 1673'teki vefatının ardından, Hannover'de Brunswick Dükünün emrinde kütüphaneciliğe başladı.

Leibniz matematikçi olduğu gibi ünlü bir filozoftu da. Hiç evlenmedi ve 1716'daki ölümünün ardından son yolculuğuna sessiz sedasız uğurlandı. Newton'la girdiği kalkülüs sürtüşmesinin gölgesinde kalan başarıları ölümünden yıllar sonra fark edildi.

Önemli eserleri

1666 *Birleşim Sanatı Üzerine*
1684 *Maksimum ve Minimum Noktalar için Yeni Yöntem*
1703 *İkili Aritmetiğin Açıklaması*



SAYILAR BİLİMİNİN MÜKEMMELLİĞİ

İKİLİ SAYILAR

KISACA

KİŞİ
Gottfried Leibniz (1646–1716)

ALANLAR
Sayı kuramı, mantık

ÖNCE
MÖ y. 2000 Antik Mısırlılar çarpma ve bölme işlemlerini yapmak için ikiyle çarpma ve ikiye bölmeden ibaret bir ikili sistemi kullanırlar.

y. 1600 İngiliz matematikçi ve astrolog Thomas Harriot ikili sayı sisteminin de dahil olduğu sayı sistemleriyle deney yapar

SONRA
1854 George Boole ikili aritmetikten yaralanarak Boole cebrini geliştirir.

1937 Claude Shannon Boole cebrinin elektronik devreler ve ikili kod kullanarak uygulanabileceğini gösterir.

1990 Bir bilgisayar ekranında piksel kodlamada 16 bit'lik bir ikili kod kullanılarak ekranda 65.000'in üzerinde renk görüntülenmesi sağlanır.

Günlük hayatta 0'dan 9'a kadar olan bilindik on rakamdan meydana gelen 10-tabanlı sayma sistemine alışkınızdır. Saymaya 10'dan başladığımızda, "onlar" basamağına bir adet 1, "birler" basamağına bir adet 0 koyarız ve yüzler, binler ve daha büyük sayılar için de basamak ekleyerek aynı şekilde devam ederiz. İkili sayı sistemi, 2-tabanlı bir sayma sistemidir ve sadece iki simge içerir: 0 ve 1. 10'un katları olarak artmak yerine her basamak 2'nin bir kuvvetini temsil eder. Bu sebeple, 1011 ikili sayısı 1011 değil 11'dir (sağdan sola: bir adet 1, bir adet 2, sıfır adet 4 ve bir adet 8).

Ondalık sayılar	İkili sayı 16'lar	8'ler	4'ler	2'ler	1'ler	İkili sistem görünümü 16'lar	8'ler	4'ler	2'ler	1'ler
1	0	0	0	0	1	□	□	□	□	■
2	0	0	0	1	0	□	□	□	■	□
3	0	0	0	1	1	□	□	□	■	■
4	0	0	1	0	0	□	□	■	□	□
5	0	0	1	0	1	□	□	■	□	■
6	0	0	1	1	0	□	□	■	■	□
7	0	0	1	1	1	□	□	■	■	■
8	0	1	0	0	0	□	■	□	□	□
9	0	1	0	0	1	□	■	□	□	■
10	0	1	0	1	0	□	■	□	■	□

İkili sayılar, 2-tabanlı bir sistem kullanılarak 1'ler ve 0'lar biçiminde yazılır. Bu tabloda, 10-tabanlı sistemdeki 1'den 10'a kadar olan sayıların hem ikili sayı hem de ikili sistem görünümü olarak (bir bilgisayarın işleyeceği şekilde) yazılışları görülmekte; 1, "açık"; 0, "kapalı" anlamına gelir.

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ Rhind papirüsü 32–33 ▪ Ondalık sayılar 132–37 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Mekanik bilgisayar 222–25 ▪ Boole cebri 242–47 ▪ Turing makinesi 284–89 ▪ Kriptografi 314–17

> İkili sayılarla, yani 0 ve 1'le, hesap yapmak bilimde hesap yapmanın en temel yoludur ve sayıların uygulanışı için dahi yararlı olan yeni keşifler sunar.
>
> **Gottfried Leibniz**

Bacon'ın şifresi

Kriptografi, başka bir deyişle şifreleme bilimi, İngiliz filozof ve kraliyet sarayı sakini Francis Bacon'ın (1561-1626) büyük bir merakıydı. Geliştirip adlandırdığı "iki harfli" şifresinde, a ve b harfleriyle alfabenin tamamı üretiliyordu: a = aaaaa, b = aaaab, c = aaaba, d = aaabb vb. a yerine 0, b yerine 1 koyarsanız bu bir ikili kod dizisine dönüşür. Bu, kırması kolay bir şifre olsa da Bacon, a ve b'nin harf olmasının şart olmadığının farkına vardı; bu harfler "zil, trompet, lamba, fener ve benzer nitelikteki diğer her araç gibi" herhangi farklı iki cisim olabilirdi. Bacon'ın "herhangi bir şeyi herhangi bir şeyle simgeleyerek" kullanabileceği, ustalıkla uyarlanabilen bir şifreydi bu. Bir öbek cisim, sayı, hatta müzik notasının arasına gizli bir ileti saklanabilirdi. Samuel Morse'un, iletişimde 19. yüzyılda devrim yaratan, nokta ve çizgilerden oluşan telgraf kodu da modern bir bilgisayardaki açık/kapalı kodlaması da Bacon'ın şifresiyle yakınlıklar barındırır.

İkili seçimler siyah beyazdır; her basamakta sadece 1 veya 0 olabilir. Her sayının anahtar benzeri bir dizi açma/kapama eylemiyle temsil edilebilmesi ve benzeri örneklerle, bu basit "açık veya kapalı" kavramının programlamada çok önemli bir yer tuttuğu anlaşıldı.

İkili sistemin gücü açığa çıkar

1617 yılında İskoç matematikçi John Napier, satranç tahtasını temel alan bir ikili hesaplama aracı icat ettiğini duyurdu. Her karenin bir değeri vardı ve o değer, kareye yerleştirilmiş bir sayıcı olup olmamasına bağlı olarak "açık" ya da "kapalı" oluyordu. Hesaplama aracı çarpma ve bölme yapabiliyor, hatta karekök bile bulabiliyordu ama sadece ilginç bir eşya olarak görüldü.

1617 yılında İskoç matematikçi John Napier, satranç tahtasını temel alan bir ikili hesaplama aracı icat ettiğini duyurdu. Her karenin bir değeri vardı ve o değer, kareye yerleştirilmiş bir sayıcı olup olmamasına bağlı olarak "açık" ya da "kapalı" oluyordu. Hesaplama aracı çarpma ve bölme yapabiliyor, hatta karekök bile bulabiliyordu ama sadece ilginç bir eşya olarak görüldü.

Gene o sıralarda Thomas Harriot ikili sistem de dahil olmak üzere sayı sistemleriyle deney yapmaktaydı. 10-tabanlı sayıları ikili sayılara, ikili sayıları 10-tabanlı sayılara dönüştürebiliyor ve ikili sayıları kullanarak hesap yapabiliyordu. Buna rağmen Harriot'ın fikirleri 1621'deki vefatından sonra uzun bir süre yayımlanmayı bekledi. İkili sayıların potansiyelini son olarak Alman matematikçi ve filozof Gottfried Leibniz fark etti. 1679'da Leibniz, açılıp kapanan geçitlerden düşen bilyeler olarak tarif ettiği hesap makinesinin işleyişi için ikili sayı sisteminin ilkelerini belirledi.

İkili sayı sistemiyle ilgili görüşlerini özetlediği 1703 tarihli *Explanation of Binary Arithmetic'te* (*İkili Aritmetiğin Açıklaması*) Leibniz, sayıların 0 ve 1'lerle nasıl temsil edilebileceğini ve en karmaşık işlemlerin bile sadeleştirilip basit bir ikili biçimine dönüştürülebildiğini gösterdi. Çin'deki misyonerlerle yazışmış, bu sayede tanıştığı Antik Çin kehanet kitabı *Yi Ching*'den etkilenmişti. Kitapta gerçeklik yin ile yang denen iki zıt kutba bölünüyordu. Kutuplardan biri kesikli bir çizgiyle, diğeri kesiksiz bir çizgiyle simgeleniyordu. Çizgiler altı çizgiden oluşma heksagram (altılı çizgi) şeklinde gösteriliyor ve birleşimleriyle toplamda 64 farklı şekli meydana getiriyordu. Leibniz bu ikili kehanet yaklaşımı ile kendi ikili sayı çalışmaları arasında bağlantılar bulunduğunu gördü.

Leibniz her şeyden önce dindar biriydi. Tanrı'nın varlığıyla ilgili soruların yanıtlarını mantıktan yardım alarak bulmayı arzuluyor ve ikili sistemin, evrenin yaratılışı hakkındaki görüşüyle örtüştüğüne inanıyordu: 0 hiçliği, 1 Tanrı'yı simgeliyordu. ■



Antik Çinli filozof Konfüçyüs'ün (MÖ 551-479) ürettiği *Yi Ching*'deki öğreti ve düşüncelerin etkileri, Leibniz'in yanı sıra 17. ve 18. yüzyılın diğer bilim insanlarının çalışmalarında da iz bıraktı.

AYDINL

1680–1800

ANMA

1683
Jacob Bernoulli, kredilerde **bileşik faizi** mercek altına aldığı araştırmaları sırasında **irrasyonel *e* sayısının bir yaklaşık değerini** keşfeder.

1687
Isaac Newton, *Principia Mathematica*'sında **hareketin üç yasasını** özetler.

1713
Jacob Bernoulli, ölümünden sonra yayımlanan *Ars Conjectandi* (*Kestirim Sanatı*) yapıtında büyük sayılar yasasını anlatır.

1727
Matematikteki en önemli değerlerden biri olan *e* sabitinin notasyonunu Leonhard Euler belirler.

1733
Buffon'un **iğne deneyinde olasılık ve Pi arasındaki bağ** gözler önüne serilir.

1736
Euler'in eski **Königsberg Köprüleri problemini** çözme çabası **çizge kuramının** ve **matematiksel topolojide** önemli gelişmelerin yolunu açar.

1738
Abraham de Moivre **normal dağılımı** ayrıntılarıyla açıkladığı makalesini yayımlar.

17. yüzyılın sonlarına gelindiğinde Avrupa, dünyanın kültür ve bilim merkezi olmuştu. Bilim Devrimi çoktan yoluna girmiş, fen bilimleriyle sınırlı kalmayıp kültürün ve toplumun tüm yönlerine yeni ve akli bir yaklaşımı esindirmişti. Aydınlanma Çağı olarak anılan dönem önemli bir sosyopolitik değişim süreciydi ve 18. yüzyılda bilgi ve eğitimin yayılmasını katbekat hızlanırdırdı. Matematik için de pek çok ilerlemenin kaydedildiği bir dönem oldu.

İsviçreli devler

Ürettikleri kavramlara fizik ve mühendislikte yavaş yavaş uygulama alanları bulunan Newton ve Leibniz'in çalışmalarını Jacob ve Johann Bernoulli alıp eklemeler yaptılar ve "değişkenler hesabı" araştırmalarıyla kalkülüs kuramını, 17. yüzyılda keşfedilmiş diğer birçok matematik kavramıyla birlikte geliştirdiler. Ağabey Jacob, sayı kuramı çalışmalarıyla tanınmakla beraber büyük sayılar yasasını dünyaya tanıtarak olasılık kuramının geliştirilmesine de yardımı olmuştur.

Üstün matematik yeteneklerine sahip çocuklar yetiştiren Bernoulli'ler, 18. yüzyıl başlarındaki önder matematikçiler olarak, İsviçre'deki memleketleri Basel'i bir matematik araştırmaları merkezi haline getirdiler. Aydınlanma Çağının bir sonraki ve belki de en büyük matematikçisi Leonhard Euler de orada doğdu ve eğitimini orada aldı. Euler, Johann'ın oğulları Daniel ve Nicholas Bernoulli'nin çağdaşı ve arkadaşıydı. Jacob'un ve Johann'ın yerini almaya layık olduğunu daha küçük yaşta kanıtladı Euler. Jacob Bernoulli'nin bir yaklaşık değerini hesaplamış olduğu irrasyonel ***e*** sayısı için bir notasyon önerisinde bulunduğunda henüz 20 yaşındaydı.

Euler çok sayıda kitap ve inceleme yayımladı, matematiğin her alanını araştırarak ayrı kavramlar gibi görünen cebir, geometri ve sayı kuramı arasında birçok kez, ileride matematiğin başka inceleme alanlarına dayanak teşkil edecek bağlantıları buldu. Örneğin Königsberg'de şehrin yedi köprüsünün her birinden sadece bir kez geçmek kaydıyla şehirde rota planlamak gibi basit görünen bir probleme yaklaşımı, topolojinin çok daha derin kavramlarını su yüzüne çıkararak yeni araştırma alanları açtı. Başta kalkü-

1742

Christian Goldbach **2'den büyük** her **çift tamsayının iki asal sayının toplamı** olduğu yönündeki meşhur kesitirimini ortaya atar.

1747

Euler, **adını taşıyan sabiti** kullanarak matematikte **göze en tanıdık gelen denklemlerden** biri olan "Euler denklemini" formülünü üretir.

1763

Geçmişe ait bilgilere dayanarak gelecekteki olaylar hakkında tahmin yürüten Bayes teoremi tesis edilir.

1766

Joseph-Louis **Lagrange, Prusya Bilimler Akademisindeki** matematik yöneticiliğini **Euler'den devralır.**

1771

Lagrange **polinom kökleri** için **cebirsel bir çözümün** formülünü bulur.

1798

Thomas Malthus, bir tahmin yürütüp **üstel nüfus büyümesinin bir felakete** yol açacağını söyler.

1799

Carl Friedrich Gauss 21 yaşında **cebrin temel teoremini** üretir.

lüs, çizge kuramı ve sayı kuramı olmak üzere Euler'in matematiğin tüm alanlarına yaptığı katkı muazzam boyuttaydı ve matematiksel notasyonun standartlaştırılmasında da etkili oldu. Özellikle e ve π gibi temel matematik sabitlerinin aralarındaki bağlantıyı vurgulayan ve "Euler denklemi" olarak bilinen dâhiyane denklemle anılır.

Diğer matematikçiler

18. yüzyıldaki diğer matematikçilerin başarıları çoğu zaman Bernoulli'lerin ve Euler'in başarılarının gölgesinde kaldı. Euler'in Alman çağdaşı Christian Goldbach bu diğer matematikçilerdendi. Kariyeri boyunca Leibniz ve Bernoulli'ler dahil hatırı sayılır başka matematikçilerle dostluk kurmuş ve onların kuramları hakkında düzenli aralıklarla yazışmıştı. Euler'e yazdığı bir mektupta, en iyi bilinen çalışması olan kestirimini ortaya atıyordu. 2'den büyük her çift tamsayının, iki asal sayının toplamı olarak ifade edilebileceğini ileri sürdüğü bu kestirim halen ispatlanamamıştır.

Diğer matematikçiler de olgunlaşmakta olan olasılık kuramının gelişimine katkılarıyla destek verdiler. Örneğin Georges-Louis Leclerc ve Comte de Buffon kalkülüs ilkelerini olasılığa uyguladılar ve pi ile olasılık arasındaki bağı örnekler vererek açıkladılar. Bir diğer Fransız Abraham de Moivre normal dağılım kavramını açıkladı. İngiliz Thomas Bayes, olayların olasılığına geçmişe ait bilgilerin ışığı altında bakıldığı bir teoremi sundu.

18. yüzyılın son bölümünde matematiksel incelemelerin Avrupa'daki merkezi, özellikle Joseph-Louis Lagrange'ın önemli bir isim olarak öne çıktığı Fransa'ydı. Lagrange, Euler'le beraber çalıştığından dolayı adından söz ettirmişti ama sonraları polinomlara ve sayı kuramına önemli katkılarda bulundu.

Yeni hudutlar

Yüzyılın sonu yaklaşırken Fransa'da monarşiyi alaşağı etmiş ve Amerika Birleşik Devletleri'nin kuruluşuna vesile olmuş siyasi devrimler Avrupa'yı sallıyordu. Genç Alman Carl Friedrich Gauss'un yayımladığı cebrin temel teoremi, harikulade kariyerinin ve matematik tarihinde yeni bir dönemin başlangıç noktası oldu. ■



HER ETKİYE KARŞILIK EŞİT VE ZIT BİR TEPKİ VARDIR

NEWTON'IN HAREKET YASALARI

KISACA

KİŞİ
Isaac Newton (1642–1727)

ALAN
Uygulamalı matematik

ÖNCE
MÖ y. 330 Aristoteles hareketin sürdürülebilmesi için kuvvetin gerekli olduğu inancını savunur.

y. 1630 Galileo Galilei hareket hakkında deneyler yürütür ve sürtünmenin geciktirici bir kuvvet olduğunu bulur.

1674 Robert Hooke *An attempt to prove the motion of the Earth*'ü (*Dünyanın Hareketini İspatlama Girişimi*) kaleme alır ve Newton'ın ilk yasası haline gelecek varsayımı ileri sürer.

SONRA
1905 Albert Einstein, Newton'ın kütleçekim kuvveti görüşüne meydan okuyan görelilik kuramını sunar.

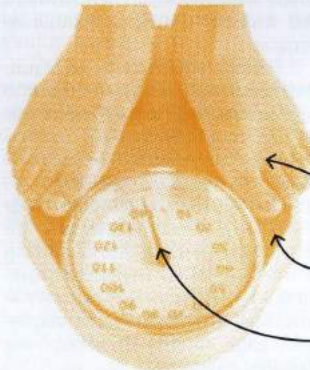
1977 Voyager 1 fırlatılır. Uzayda sürtünmeye veya sürüklenmeye maruz kalmayan uzay aracı, Newton'ın ilk yasasına uygun şekilde ilerlemeye devam edip 2012'de güneş sisteminden çıkar.

Matematikten yararlanarak gezegenlerin ve cisimlerin dünyadaki hareketlerini açıklayan Isaac Newton, evrene bakışımızı kökünden değiştirdi. Bulgularını 1687'de, genelde kısaca *Principia* adıyla anılan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*'da (*Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri*) üç cilt halinde yayımladı.

Gezegenlerin hareket edişi

1667'ye gelindiğinde Newton, üç hareket yasasının ilk hallerini çoktan geliştirmiş olmakla birlikte, bir cismin dairesel bir güzergâh üzerinde hareket edebilmesi için gereken kuvvetten haberdardı. Eliptik yörüngelerin kütleçekim yasalarıyla nasıl bir ilişkisi olduğunu çıkarsamak amacıyla, kuvvetlere dair elindeki bilgileri ve Alman astronom Johannes Kepler'in gezegensel hareket yasalarını kullandı. 1686'da İngiliz astronom Edmond Halley, yeni fiziğini ve gezegensel hareketlere bu yeni fiziğin uygulanışını kâğıda dökmesi için Newton'ı ikna etti.

Principia yapıtında Newton, matematikten yararlanarak kütleçekimin sonuçlarının deneysel göz-



Newton'ın ikinci ve üçüncü yasası, tartıların işleyişinin açıklanmasına yardımcı olur. Kendi ağırlığımızı öçtüğümüzde, ağırlığımız (bir cismin kütlesinin kütleçekimle çarpımı) bir kuvvettir ve günümüzde Newton'la ölçülmektedir. Newton ölçü birimi, kilogram gibi kütle ölçülerine dönüştürülebilir.

Tartıdaki kişinin kütlesi, kütleçekimle aşağı itilir.

Tartı, kütleçekimin aşağı yönde uyguladığı basınç kuvvetinin aynısıyla kişiyi yukarı iter.

Çoğu tartıda ağırlık kilogramla gösterilir. Bir kilogram 9,81 newton'a eşittir.

Ayrıca bkz. Tasım mantığı 50–51 ▪ Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Emmy Noether ve soyut cebir 280–81

Newton'ın üç hareket yasası

Birinci yasa: Her cisim, ona uygulanan kuvvetlerce durumunu **değiştirmeye zorlanmadığı** sürece, hareketsizlik veya düz bir çizgi üzerindeki düzgün hareketlilik **durumunu sürdürür**.

İkinci yasa: Hareketteki **değişim**, uygulanan harekete geçirme kuvvetiyle **orantılıdır** ve o **uygulanan kuvvetin** uygulandığı düz çizgi doğrultusunda gerçekleşir.

Üçüncü yasa: Her **etkiye** karşılık **eşit** ve **zıt** bir **tepki** vardır.

lemlerle tutarlı olduğunu gösterdi. Kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin hareketini analiz etti ve gelgitlerin, fırlatılan cisimlerin ve sarkaçların hareketinin yanı sıra gezegen ve kuyrukluyıldızların yörüngelerini açıklamak için kütleçekimin var olduğunu farzetti.

Hareket yasaları

Newton, *Principia*'nın başında hareketin üç yasasını belirtir. Yasaların ilkine göre, hareket yaratmak için kuvvet gereklidir ve bu kuvvetin kaynağı, iki cisim arasındaki kütleçekimden veya uygulanan bir kuvvet (mesela bilardo sopasıyla topa vurulması) olabilir. Cisimler hareketliyken olup bitenler ikinci yasada açıklanır. Newton bir cismin momentumundaki (kütle × hız) değişimin, o cisme uygulanan kuvvete eşit olduğunu söylüyordu. Hızın zamana göre gösterildiği bir grafik çizilirse herhangi bir noktadaki eğim, ivmedir (hızdaki herhangi bir değişim). Newton'ın üçüncü yasasına göre, iki cisim temas halindeyse cisimlerin arasındaki tepki kuvvetleri, eşit ancak zıt yönlerdeki kuvvetlerle birbirini iterek ortadan kaldırır. Masa üzerindeki bir cisim masayı aşağı doğru iter, masa da onu eşit bir kuvvetle iter. Bu doğru olmasa cisim hareket ederdi. Einstein'in görelilik kuramına kadar, mekanik fiziği tamamıyla Newton'ın üç hareket yasasına dayalıydı. ■

Isaac Newton



1642'de Noel'inde, İngiltere'nin Lincolnshire kentinde dünyaya gelen Isaac Newton'ı çocukluğunun ilk dönemlerinde büyükannesi yetiştirdi. Newton, Cambridge Üniversitesine bağlı Trinity Kolejinde okudu ve bu okulda bilim ve felsefeye büyük bir ilgi duydu. 1665 ve 1666 yıllarındaki Büyük Veba Salgınında üniversitenin mecburen kapalı olduğu sırada, akılar (zamanda verilen bir noktadaki değişim hızları) üzerine fikirlerini formüllerle ifade etti.

Newton kütleçekim, hareket ve ışık bilimi alanlarında önemli keşiflere imza attı ve meşhur İngiliz bilim insanı Robert Hooke'la bu alanlarda rekabet etti. Devlette çeşitli makamlarda görev aldı; bu görevlerden biri darphane müdürlüğüydü ve oradaki görev döneminde İngiliz para biriminin gümüşten altın standardına dönüştürüldüğü süreci yönetti. İngiltere Kraliyet Bilimler Akademisine başkan da oldu. 1727'de hayatını kaybetti.

Önemli eseri

1687 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri)*



DENEYSEL SONUÇLAR VE BEKLENEN SONUÇLAR AYNI ŞEYLERDİR

BÜYÜK SAYILAR YASASI

KISACA

KİŞİ
Jacob Bernoulli (1655–1705)

ALAN
Olasılık

ÖNCE
y. 1564 Gerolamo Cardano, olasılık üzerine ilk çalışma olan *Liber de ludo aleae*'yi (*Şans Oyunları Kitabı*) yazar.

1654 Pierre de Fermat ve Blaise Pascal olasılık kuramını geliştirirler.

SONRA
1733 Abraham de Moivre, ileride merkezi limit teoremine dönüşecek tezini ileri sürer. Teoreme göre, örneklem büyüklüğü arttıkça sonuçlar normal dağılımla, diğer adıyla çan eğrisiyle, daha yakın bir uyum sergiler.

1763 Thomas Bayes bir sonucun meydana gelme şansını, o sonuçla ilişkili başlangıç koşullarını hesaba katarak tahmin etmenin bir yolunu geliştirir.

Büyük sayılar yasası, olasılık kuramının ve istatistiğin temel direklerinden biridir. Gelecekteki olayların sonuçlarının uzun vadede makul bir hassasiyetle tahmin edilebileceğini garanti eder. Örneğin finans şirketleri tazminat ödeme şanslarının ne olduğunu bilir, sigorta ve emeklilik ürünlerinin fiyatlarını belirlerken buna güvenir. Kumarhanelerse kumar oynayan müşterilerinden mutlaka kâr elde edeceğinden (en nihayetinde) bu sayede emin olur.

Yasaya göre, meydana gelen bir olayı daha çok gözlemledikçe, o sonucun ölçülen olasılığı (veya şansı), gözlemlerden önce hesaplanan kuramsal şansa gitgide yaklaşır. Başka bir ifadeyle, büyük bir deneme sayısıyla elde edilen ortalama sonuç, olasılık kuramıyla hesaplanan beklenen değere yakın olur ve deneme sayısının artırılması bu ortalamanın söz konusu değere daha da yaklaşmasını sağlar.

Rasgele bir olayın beklenen **şansı**, olasılık kuramından yararlanarak **hesaplanabilir.**

Testlerde, gözlemlenen sonuçlar ile **beklenen** değer arasında hemencecik **yakın bir uyum olmaz**.

Deneme sayısı **arttıkça** ortalama gözlemlenen değer, **beklenen** değere gitgide **yaklaşır**.

Büyük bir deneme sayısına ulaşıldıktan sonra, **ortalama gözlemlenen değer** ile **beklenen değer hemen hemen özdeş olur**.

Ayrıca bkz. Olasılık 162–65 ▪ Normal dağılım 192–93 ▪ Bayes teoremi 198–99 ▪ Poisson dağılımı 220 ▪ Modern istatistiğin doğuşu 268–71

> Kestirim sanatını, en iyi bulguya dayanarak karar alabilmek veya eylemde bulunabilmek amacıyla, şeylerin olasılığını değerlendirme sanatı olarak tanımlarız.
>
> **Jacob Bernoulli**

1835 yılında yasanın adını koyan kişi Fransız Siméon Poisson olmasına rağmen, yasayı çıkaran kişi İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli'dir. Onun "altın terorem" olarak adlandırdığı çığır açan buluşunu, yeğeni 1713 tarihli *Ars Conjectandi* (*Kestirim Sanatı*) kitabında yayımladı.

Her ne kadar veri toplama ile sonuçlarla ilgili tahmin yürütme arasındaki ilişkiyi ilk fark eden kişi olmasa da, Bernoulli olanaklı iki sonucu (galibiyet veya mağlubiyet) olan bir oyunu ele alarak bu ilişkiye dair ilk ispatı geliştirdi. Oyunun kazanmanın kuramsal şansı W'dur ve Bernoulli, oyun sayısı arttıkça, oyunların galibiyetle sonuçlanan kısmının (f) W'ya yakınsayacağını farzetti. Bunun ispatını, oyun tekrarlandıkça f'nin W'dan belirlenen bir miktar kadar yüksek veya düşük olma olasılığının 0'a (yani imkânsıza) yaklaştığını göstererek yaptı.

Yanlış olasılık

Yazı tura oyunu büyük sayılar yasasına bir örnektir. Yasaya göre, yazı veya tura gelmesi şansının eşit olduğu varsayıldığında çok sayıda atışın ardından atışların yarısında (veya yarısının çok yakınında) yazı, yarısında tura gelir. Bununla birlikte ilk aşamalarda yazı ve turaların daha dengesiz olması muhtemeldir. Örneğin ilk 10 atışta yedi tura ve üç yazı gelebilir. Bu durumda sıradaki atışta büyük olasılıkla yazı gelecek gibi görünebilir. Oysa bu, "kumarcı yanılgısıdır"; bu yanılgıya düşen kişi her oyunun (atışın) sonucunun diğerleriyle bağlantılı olduğunu zanneder. Bir kumarcı, yazı ve tura sayılarının dengeleneceğini düşünerek 11'inci atışta yazı geleceğini varsayabilir ancak yazı veya tura gelme olasılığı her atışta aynıdır ve bir atışın sonucu diğer atışların hepsinden bağımsızdır. Bütün olasılık kuramının başlangıç noktası budur. 1000 atıştan sonra ilk 10 atışta görülen dengesizlik göz ardı edilebilir. ■



Büyük sayılar yasasına göre, hakem yazı tura attığında, takım kaptanının önceki maçlarda çıkan sonuçlara göre yazı veya turayı tercih etmesi kazanma şansını artırmaz.



Jacob Bernoulli

1655'te İsviçre'nin Basel şehrinde doğan Jacob Bernoulli teoloji okudu ama matematiğe ilgi duymaya başladı. 1687'de Basel Üniversitesinde matematik profesörü oldu ve ömrü boyunca bu koltuğundan kalkmadı.

Olasılık çalışmalarına ek olarak Bernoulli, sonsuz küçük artımlarla bileşik faiz getiren sermayenin artışını hesaplayarak e matematik sabitini keşfetmesiyle hatırlanır. Kalkülüsün geliştirilmesinde de rolü vardır; yeni bir matematik alanını icat etmiş olma iddiasıyla Isaac Newton'la rekabet içerisinde olan Gottfried Leibniz'in tarafını tutmuştur. Bernoulli, kardeşi Johann'la kalkülüs üzerine çalıştı. Gelgelelim Johann, ağabeyinin başarılarını kıskanınca Jacob'un hayata veda ettiği 1705'ten birkaç yıl önce araları bozuldu.

Önemli eserleri

1713 *Ars Conjectandi (Kestirim Sanatı)*
1744 *Opera (Derleme)*

BAŞINA BUYRUK VARLIKLAR OLAN O SAYILARDAN BİRİ

EULER SAYISI



KISACA

KİŞİ
Leonhard Euler (1707–83)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1618 Günümüzde ***e*** olarak bilinen sayıdan hesaplanan logaritmalar, John Napier'ın logaritmalar hakkında yazdığı bir kitabın ekinde listelenir.

1683 Jacob Bernoulli bileşik faiz çalışmasında ***e***'yi kullanır.

1733 Abraham de Moivre normal dağılımı keşfeder: Çoğu verinin değerlerinin merkezi bir noktada kümelenip sayılarının uç kısımlara gidildikçe azalması.

SONRA
1815 Joseph Fourier'nin ***e***'nin irrasyonel olduğu yönündeki ispatı yayımlanır.

1873 Fransız matematikçi Charles Hermite ***e***'nin aşkın olduğunu ispatlar.

Bir matematik **sabiti**; anlamlı, **net olarak tanımlanmış** bir sayıdır. Büyüklüğü **asla değişmez**.

↓

e (2,718...) **özel niteliklere** sahiptir.

↓

İrrasyoneldir: Bir basit kesirde **iki tamsayının** oranı şeklinde ifade edilemez.

Aşkındır: Herhangi bir kuvveti alındığında gene **irrasyoneldir**.

e olarak bilinen matematik sabiti, yani Euler sayısı (sonsuz sayıda ondalık basamağa sahip 2,718...), asıl olarak, karmaşık hesaplamaları basitleştirmek için logaritmaların icat edildiği 17. yüzyılın başlarında ortaya çıktı. İskoç matematikçi John Napier 2,718...-tabanlı logaritmalar derledi; bu tablolar bilhassa üstel büyüme içeren hesaplamalarda işe yarıyordu. Bunlara daha sonra "doğal logaritmalar" adı verildi çünkü doğadaki birçok süreci matematiksel olarak açıklayabiliyorlardı ama cebirsel notasyon halen emekleme çağındaydı ve Napier, logaritmaları sadece, hareketli noktaların katettiği mesafelerin oranıyla alakalı hesaplamalara yardımcı olmaları açısından dikkate aldı.

17. yüzyılın sonlarında, İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli her ne kadar 2,718... sayısını bileşik faiz hesaplamalarında kullandıysa da ***e*** sayısını ilk dile getiren, Bernoulli'nin kardeşinin öğrencilerinden

Leonhard Euler



1707'de İsviçre'nin Basel şehrinde dünyaya gelen Euler'in çocukluğu Riehen yakınlarında geçti. Matematik eğitimi görmüş Protestan bir rahip ve Bernoulli ailesinin bir dostu olan babasından ilk eğitimini aldı, matematiğe tutku duymaya başladı. Üniversiteye rahip olma niyetiyle girmesine rağmen Johann Bernoulli'nin desteğiyle matematiğe geçti. Euler daha sonra İsviçre ve Rusya'da çalıştı ve kalkülüs, geometri, trigonometri ve diğer alanlardaki büyük katkılarıyla tüm zamanların en üretken matematikçisi oldu. 1738'de uğradığı görme kaybının giderek kötüleşmesi ve 1771'de kör olması onu engelleyemedi. Ömrünün son anına dek çalıştı ve 1783'te St. Petersburg'da hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

1748 *Introductio in analysin infinitorium (Sonsuzlar Analizine Giriş)*
1862 *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta (Son zamanlarda yapılan Top atışı deneyleri üzerine düşünceler)*

Ayrıca bkz. Konumsal sayılar 22–27 ▪ İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Ondalık sayılar 132–37 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Euler denklemi 197

Leonhard Euler'di. Euler'in 1727'de *e*'yi 18 ondalık basamağıyla hesapladığı eseri, *e* sayısı üzerine ilk çalışması olan *Meditatio*'ydu (*Düşünce*). Ne var ki *Düşünce*, 1862 yılına kadar yayımlanmadı. Euler 1748 tarihli *Introductio*'sunda (*Giriş*) *e*'yi daha da yakından incelemeye aldı.

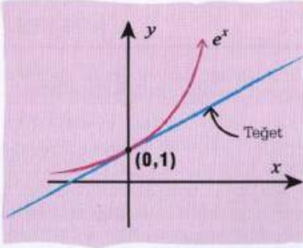
Bileşik faiz

e'nin sahneye ilk çıktığı örneklerden biri bileşik faiz hesaplamalarıdır. Bileşik faizde, örneğin, bir tasarruf hesabının faizi yatırımcıya ödenmek yerine tasarruf miktarının artması için hesaba eklenir. Faiz yıllık olarak hesaplanırsa, yıllık %3 faiz oranından 100 TL'lik bir sermaye, bir yıl sonra 100 × 1,03 × 1,03 TL olur. İki yıl sonra, 100 × 1,03 × 1,03 = 106,09 TL, 10 yıl sonraysa 100 TL × $1{,}03^{10}$ = 134,39 TL olur. Bunun formülü, *A* son meblağ, *P* başlangıç sermayesi (anapara), *r* faiz oranı (ondalık sayı biçiminde), *t* de yıl sayısı olmak üzere $A = P(1 + r)^t$ şeklinde yazılır.

Faiz oranı bir yıldan daha kısa bir dönem için hesaplanırsa hesaplama değişir. Örneğin faiz aylık olarak hesaplanırsa, aylık oran yıllık oranın 1⁄12'si dir. 3 ÷ 12 = 0,25 olduğundan, bir yıl sonra sermaye 100 TL × $1{,}0025^{12}$ = 103,04 TL olur. Faiz günlük olarak hesaplanırsa, oran 3 ÷ 365 = 0,008... olur ve bir yol sonra miktar 100 TL × 1,00008...365 = 103,05 TL olur. Bunun formülü, n her yılda faizin hesaplanma sayısı olmak üzere $A = P(1 + r/n)^{nt}$'dir. Faizin hesaplandığı zaman aralıkları küçüldükçe bir yılın sonundaki faiz getirisi miktarı $A = Pe^{rt}$'ye yaklaşır. Bernoulli, n sonsuza yaklaşırken ($n \to \infty$), *e*'yi $(1 + 1/n)^n$'nin limiti olarak belirlediğinde hesaplamalarında bu sonuca yaklaştı. n arttıkça $(1 + 1/n)^n$ formülü *e* için daha yakın

Bileşik faiz yöntemi toplam miktarın daha büyük olmasını sağlar. Aşağıdaki örneklerde, 10 TL anapara yatırımı için, yıllık faiz yüzde 100 olursa nasıl faiz işlediği, daha kısa aralıklarla bileşik faiz ödendiği durumlarla karşılaştırılarak gösterilmekte.

	1 yıl, %100 faiz oranı	6 ay, %50 faiz oranı	3 ay, %25 faiz oranı
Ocak	**10 TL anapara yatırımı**	**10 TL anapara yatırımı**	**10 TL anapara yatırımı**
Şubat	↓	↓	↓
Mart			
Nisan			10 TL × 0,25 = 2,5 TL 10 TL + 2,5 TL = **12,5 TL**
Mayıs			↓
Haziran			
Temmuz		10 TL × 0,5 = 5 TL 10 TL + 5 TL = **15 TL**	12,5 TL × 0,25 = 3,125 TL 12,5 TL + 3,125 TL = **15,625 TL**
Ağustos		↓	↓
Eylül			
Ekim			15,625 TL × 0,25 = 3,906 TL 15,625 TL + 3,906 TL = **19,531 TL**
Kasım			↓
Aralık			
Ocak	10 TL × 1 = 10 TL 10 TL + 10 TL = **20 TL**	15 TL × 0,5 = 7,5 TL 15 TL + 7,5 TL = **22,5 TL**	19,531 TL × 0,25 = 4,883 TL 19,531 TL + 4,883 TL = **24,41 TL**



Üstel fonksiyon, bileşik faizi hesaplamak için kullanılabilir. Fonksiyon, $y = e^x$ eğrisini verir; bu eğri y eksenini (0,1) noktasında keser ve üstel olarak gitgide dikleşir. Grafikte eğrinin teğeti de gösterilmekte.

sonuçlar verir. Örneğin $n = 1$, e için 2 sonucunu verir; $n = 10$, e için 2,5937... sonucunu verir ve $n = 100$, e için 2,7048... sonucunu verir.

Euler, e için 18 ondalık basamaklı doğruluğundaki bir değeri hesapladığında, 20 terime kadar çıktığı $e = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720$ dizisini kullanmıştı muhtemelen. Her tamsayının faktöriyelini kullanarak da bu paydalara ulaştı. Bir tamsayının faktöriyeli, o ve ondan küçük tüm tamsayıların çarpımıdır: 2 (2 × 1), 3 (3 × 2 × 1), 4 (4 × 3 × 2 × 1), 5 (5 × 4 × 3 × 2 × 1) vb. şeklinde, çarpıma her seferinde bir terim daha eklenir. Bu, faktöriyel notasyonuyla $e = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4!$ olarak gösterilebilir.

Euler, e'yi 18 ondalık basamağıyla hesaplamakla birlikte, ondalık kısmın sonsuz uzunlukta olduğunu da belirtti, yani e'nin irrasyonel olduğunu. Fransız matematikçi Charles Hermite de 1873'te e'nin cebirsel olmadığını, başka bir deyişle, sıradan bir polinom denklemde kullanılabilecek devirsiz bir ondalık sayı olmadığını ispatladı. e sayısı bu sebeple, bir denklemin çözülmesiyle hesaplanamayan bir gerçel sayı anlamındaki, "aşkın" bir sayıdır.

Büyüme eğrisi

Bileşik faiz, üstel büyümeye bir örnektir. Bu büyüme çeşidinin grafiği çizilebilir ve bir eğri şeklinde görünür. 17. yüzyılda İngiliz papaz Thomas Malthus savaş, kıtlık veya gıda sıkıntısı gibi nüfus artışını sekteye uğratan etkenler ortada yoksa nüfusun da üstel olarak artacağını ileri sürdü. Demek istediği şey, nüfusun aynı hızla artmaya devam etmesi ve sonuç olarak sürekli büyüyen bir toplam nüfustu.

> Kısalık sağlaması adına, bu 2,718281828... sayısını daima e harfiyle göstereceğiz
> **Leonhard Euler**

P_0 başlangıçtaki nüfus sayısı, r artış hızı ve t zaman olmak üzere, $P = P_0e^{rt}$ formülüyle sabit nüfus artışı hesaplanabilir.

Grafikte gösterildiğinde, e daha başka özel nitelikler de sergiler. $y = e^x$'in (üstel fonksiyon, bkz. solda) grafiği, (0,1) koordinatlarındaki teğetinin (eğriye temas eden ama kesmeyen doğru) eğimi (dikliği) de tam 1 olan bir eğridir. Bunun sebebi, e^x'in türevinin (değişim hızının), aslında e^x olması ve teğeti bulmak için de türevin kullanılmasıdır. Teğet, bir eğri üzerindeki belirli bir noktadaki değişim hızını hesaplamak için kullanılır. Türev e^x oldu-



St. Louis, Missouri, ABD'deki Ana Giriş Kemeri, Fin-Amerikalı mimar Eero Saarinen'in 1947'de tasarladığı, yassılaştırılmış bir zincir eğrisi şeklindeki bir kemerdir.

Zincir eğrisi

Kimi zaman, yalnız uçlarından tutularak sarkıtılan bir zincirin şekli olarak tanımlanan zincir eğrisi, formülü $y = 1/2 \times (e^x + e^{-x})$ olan bir eğridir. Doğada ve teknolojide zincir eğrilerle sıklıkla karşılaşılır. Örneğin rüzgâr basıncı altındaki bir kare yelken, zincir eğrisi şeklini alır. Baş aşağı edilmiş zincir eğrisi şeklindeki kemerler mukavemetlerinden dolayı mimaride ve inşaat sektöründe sık sık kullanılır.

Uzun bir süre, zincir eğrisi ve parabolün aynı şekle sahip olduğuna inanıldı. Zincir eğrisi (catenary) adını 1690'da Latincedeki catena'dan ("zincir") türetip koyan Hollandalı matematikçi Christiaan Huygens, zincir eğrisinin, parabolden farklı olarak polinom denklemle elde edilemediğini gösterdi. Üçü de matematikçi olan Huygens, Gottfried Leibniz ve Johann Bernoulli'nin üçü de zincir eğrisi için bir formül hesaplayarak aynı sonuca ulaştı. Sonuçları 1691'de bir arada yayımlandı. 1744'te Euler beli daraltılmış bir silindir şeklindeki ve bir zincir eğrisinin bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşturulan zincir yüzeyinin tanımını yaptı.

ğundan teğet doğrusunun eğimi daima *y*'nin değeriyle aynı olur.

Düzensiz dizilişler

Bir öğeler kümesinin çeşitli şekillerdeki dizilişlerine permütasyonlar denir. Örneğin 1, 2, 3 kümesi 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 veya 3, 2, 1 şeklinde dizilebilir. İlk diziliş dahil toplam altı diziliş şekli vardır çünkü bir kümedeki permütasyonların sayısı en yüksek tamsayının faktöriyeline eşittir ve bu örnekte bu sayı, 3!'dir (3 × 2 × 1'in kısaltması). Euler sayısı, düzensiz olarak ifade edilen permütasyon türü için de önemlidir. Düzensiz bir dizilişte, öğelerin hiçbiri ilk konumunda kalamaz. Dört öğe için, permütasyon olanaklarının sayısı 24'tür ancak 1, 2, 3, 4'ün düzensiz dizilişlerini bulmak için öncelikle 1'le başlayan diğer tüm dizilişler elenmelidir. 2'yle başlayan üç düzensiz diziliş vardır: 2, 1, 4, 3; 2, 3, 4, 1 ve 2, 4, 1, 3. 3'le başlayan düzensiz dizilişlerin sayısı da 4'le başlayan düzensiz dizilişlerin sayısı da üçtür; dolayısıyla toplamda dokuz düzensiz diziliş vardır. Beş öğe olduğunda toplam permütasyon sayısı 120, altı öğe olduğunda 720'dir; düzensiz dizilişlerin tamamını bulmak giderek zorlaşır.

> (Büyük Friedrich) her daim savaştadır; yazın Avusturyalılarla, kışın matematikçilerle.
>
> **Jean le Rond d'Alembert**
> **Fransız matematikçi**

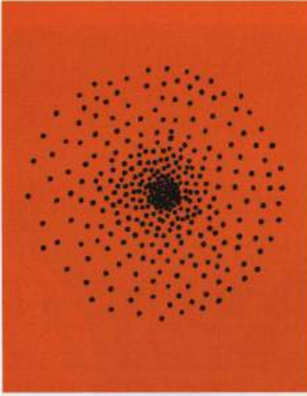


Organik maddelerin tarihini radyokarbon testiyle saptamak için, araştırmacılar bir örneği (burada kadim zamanlardan kalma bir insan kemiğini) test eder ve ışınetkin parçalanma hızından yaşını hesaplamak için Euler sayısını kullanılarlar.

Euler sayısı her kümedeki düzensiz dizilişlerin sayısını hesaplama olanağını sağlar. Bu sayı, permütasyon sayısının *e*'ye bölündüğü ve çıkan sonucun yuvarlandığı en yakın tamsayıya eşittir. Örneğin altı permütasyonu bulunan 1, 2, 3 kümesi için, 6 ÷ *e* = 2,207... ya da en yakın tamsayı olan 2'dir. Euler 10 sayının düzensiz dizilişlerini, borçlarını ödemek için bir çekiliş düzenlemeyi uman Prusyalı Büyük Friedrich için analiz etti. 10 sayı için, Euler, bir düzensiz diziliş elde etme olasılığının altı ondalık basamak doğruluğuyla $1/e$ olduğunu buldu.

Diğer kullanımları

Euler sayısı daha birçok hesaplamayla alakalıdır; mesela bir sayı parçalandığında (ayrıştırıldığında) parçalama sonucunda elde edilen sayılardan en büyük çarpımı verecek sayıların bulunması bu hesaplamalardandır. 10 sayısının parçalanışı, çarpımları 21 olan 3 ve 7'yi veya 24 sonucunu veren 4 ve 6'yı ya da 25'i veren 5 ve 5'i içerir. 10'un iki sayıya parçalanışı için en büyük çarpım 25'tir. Üç sayıya parçalanışta, 3, 3, 4'ün çarpımı 36'dır ancak kesirli sayılara geçildiğinde, üç sayı için en büyük çarpım şu olur: $3\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{3} = 1000/27 =$ 37,037.... Dört sayıya ayrışım için, $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 39{,}0625$ ancak beş sayıya parçalanışta, 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32. Özetle, $(10/2)^2 = 25$, $(10/3)^3 = 37{,}037...$, $(10/4)^4 = 39{,}0625$, ve $(10/5)^5 = 32$. Beşli parçalanışta elde edilen bu daha küçük sonuç, 10 için en uygun ayrışım sayısının 3 ile 4 arasında olduğunu gösterir. Euler sayısı hem en büyük çarpımın ($e^{(10/e)} = 39{,}598...$) hem de kaç sayıya parçalama yapılacağının ($10/e = 3{,}678...$) bulunmasına yardımcı olabilir. ■



RASSAL DEĞİŞKENLİK ÖRÜNTÜ OLUŞTURUR

NORMAL DAĞILIM

KISACA

KİŞİLER
Abraham de Moivre (1667–1754), **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855)

ALANLAR
İstatistik, olasılık

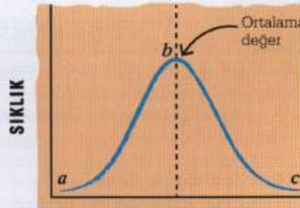
ÖNCE
1710 İngiliz tıp insanı John Arbuthnot bir nüfustaki erkek ve kadın sayısı ile ilişkili olarak istatistiksel bir ilahi takdir ispatı yayımlar

SONRA
1920 İngiliz istatistikçi Karl Pearson geri kalan tüm olasılık dağılımlarının hepsinin "anormal" olduğu izlenimini verdiğinden Gauss eğrisi için kullandığı "normal eğri" tabirinden duyduğu pişmanlığı dile getirir.

1922 ABD'de, New York Menkul Kıymetler Borsası, yatırım risklerinin modellemesinde normal dağılımın kullanılacağını duyurur.

Fransız matematikçi Abraham de Moivre, Jacob Bernoulli'nin keşfettiği binom dağılımını kullanarak olayların ortalama değerin (aşağıdaki grafikte ***b***) etrafında kümelendiğini gösterdi ve 18. yüzyılda istastistiği bir adım ileri taşıdı.

Binom dağılımını (sonuçları iki olanaktan birine göre açıklamak için kullanılır) ilk olarak Bernoulli, 1743'te yayımlanan *Ars Conjectandi* (*Kestirim Sanatı*) eserinde meydana çıkardı. Yazı tura atışında iki muhtemel sonuç vardır: "başarma" ve "başaramama". İki eşit olasılıklı sonuç içeren bu test türüne Bernoulli denemesi denir. Her denemedeki başarma olasılığı eşit ve ***p*** olmak üzere, sabit bir ***n*** sayısı kadar Bernoulli denemesi yürütülüp toplam başarma sayısı sayıldığında ortaya binom olasılıkları çıkar. Sonuçtaki dağılım ***b***(***n***, ***p***) diye yazılır. ***b***(***n***, ***p***) binom dağılımı 0'dan ***n***'ye kadar değerleri alabilir ve ***np*** ortalaması bu değerlerin merkezinde olur.



Çan eğrisi, normal dağılımın görsel açıklamasıdır. Eğrinin en yüksek noktası (***b***), etrafında değerlerin kümelendiği ortalamayı temsil eder. Ortalamadan uzaklaştıkça değerlerin sıklıkları azalır; bu sebeple, sıklıklarının en düşük olduğu yerler ***a*** ve ***c*** noktalarıdır.

Ortalamayı bulmak

1721'de İskoç baronet Alexander Cuming bir şans oyunundaki beklenen kazanma sayısıyla ilgili bir problemi de Moivre'a verdi. De Moivre binom dağılımının ortalama sapmasını (bir sayılar kümesinde, genel ortalama ile her bir değer arasındaki ortalama fark) bulmak gerektiği sonucuna vardı. Bulduğu sonuçları *Miscellanea Analytica*'da yazıya döktü.

De Moivre, binom sonuçlarının kendi ortalamalarının civarında kümelendiğini fark etmişti (binom sonuçları grafikte, daha çok veri elde edildikçe çan şekline [normal dağılım]) yaklaşan, düzgün olmayan bir eğri meydana getirir). 1733 yılında de Moivre, normal dağılım kullanarak ve bu suretle binom dağılımı için

Ayrıca bkz. Olasılık 162–65 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Cebrin temel teoremi 204–09 ▪ Laplace'ın şeytanı 218–19 ▪ Poisson dağılımı 220 ▪ Modern istatistiğin doğuşu 268–71

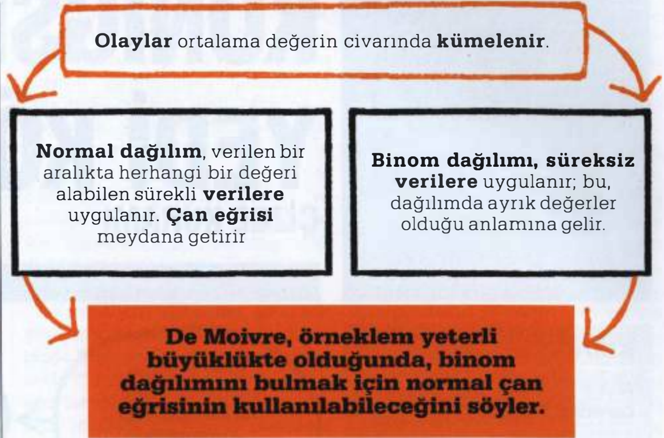
bir çan eğrisi grafiği meydana getirerek binom olasılıklarına yaklaşmış ve başarıya ulaşmasını sağlayan bu yöntemi bulması içine sinmişti. De Moivre bulgularını kısa bir makalede kaleme aldı, ardından o makaleyi *Şansın Doktrini* eserinin 1738 tarihli basımına dahil etti.

Normal dağılımı kullanmak

18. yüzyılın ortalarında çan eğrisi hiç beklenmedik şekilde her veri türü için model teşkil etmeye başladı. 1809'da normal dağılımı ilk defa Carl Friedrich Gauss başlı başına elverişli bir istatistik aracı olarak kullandı. Fransız matematikçi Pierre-Simon Laplace, normal dağılımı, ölçüm hataları gibi rasgele hatalar için eğri modelleme amacıyla, normal bir eğrinin ilk uygulamalarından birinde kullandı.

19. yüzyılda birçok istatistikçi, değişkenlik konusunu araştırmak için yürüttükleri deneylerin sonuçlara baktı. İngiliz istatistikçi Francis Galton, quincunx (veya Galton kutusu) adı verilen bir mekanizmayla rassal değişkenliği incelemeye aldı. Kutu, üçgen düzeninde dizilmiş çiviler içeriyor ve yukarıdan bırakılan bilyeler çivilerin arasından düşüp en aşağıda bir dizi dikey tüpün içerisinde toplanıyordu. Galton her tüpte kaç bilye olduğunu saydı ve ortaya çıkan dağılımı "normal" diye tanımladı. Karl Pearson'ınkiyle beraber bu çalışma, "Gauss" eğrisi olarak bilinen kavrama açıklık getirirdi ve "normal" teriminin kullanımını yaygınlaştırdı.

Normal dağılım, istatistiksel verilerin modellenmesinde günümüzde yaygın olarak kullanılmakta; nüfus araştırmalarından yatırım analizine kadar uzanan çeşitli uygulamaları mevcuttur. ■



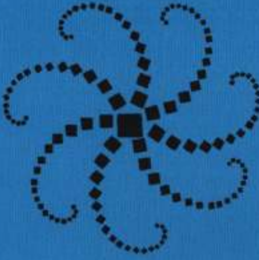
Abraham de Moivre



1667'de dünyaya gelen Abraham de Moivre, Katolik Fransa'da bir Protestan olarak yetişti ve 1685 yılında XIV. Louis, Huguenotları sürgüne yollayana kadar orada yaşadı. De Moivre dini inancı yüzünden kısa bir süre hapis yattı, serbest bırakıldıktan sonra İngiltere'ye göç etti. Londra'da özel matematik dersleri verdi. Üniversitede öğretim görevlisi olmayı ummuştu ama bu kez de İngiltere'de bir Fransız olarak ayrımcılıkla karşılaştı. Buna rağmen, de Moivre, aralarında Isaac Newton'ın da bulunduğu dönemin birçok bilim insanını etkileyip arkadaş edindi ve 1697'de İngiltere Kraliyet Bilimler Akademisi üyeliğine seçildi. Dağılıma odaklandığı araştırmalarının yanı sıra de Moivre'ın en bilinen araştırmaları karmaşık sayılar üzerinedir. 1754'te Londra'da vefat etmiştir.

Önemli eserleri

1711 *De Mensura Sortis (Şansın Ölçümü Üzerine)*
1721–30 *Miscellanea Analytica (Analiz Derlemesi*
1738 *Şansın Doktrini (1. basım)*
1756 *Şansın Doktrini (3. basım)*



KÖNİGSBERG'İN YEDİ KÖPRÜSÜ

ÇİZGE KURAMI

KISACA

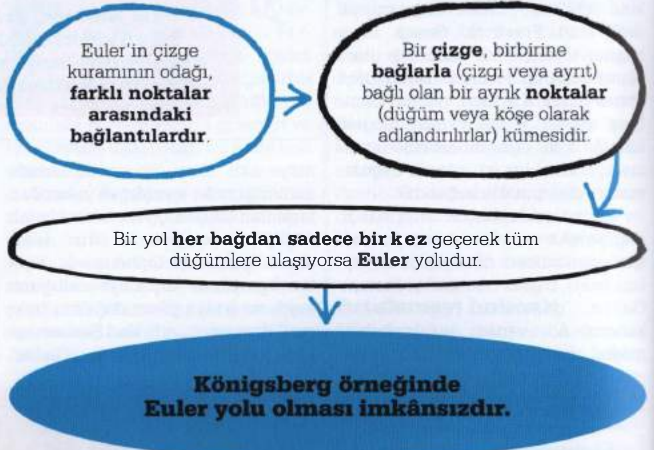
KİŞİ
Leonhard Euler (1707–83)

ALANLAR
Sayı kuramı, topoloji

ÖNCE
1727 Euler üstel büyüme ve azalmanın tanımlanmasında kullanılan *e* sabitini geliştirir.

SONRA
1858 August Möbius, Euler'in çizge kuramı formülünün kapsamını genişleterek tek bir yüzey oluşturmak üzere birleştirilen yüzeyleri de dahil eder.

1895 Henri Poincaré *Analysis situs* başlıklı makalesini yayımlar. Çizge kuramını genelleştirdiği makalesi sayesinde, topoloji (sürekli şekil değişikliğinden (deformasyon) zarar görmeyen geometrik şekillerin özelliklerinin incelenmesi) olarak bilinen matematik alanı.



Leonhard Euler'in bir matematik bulmacasını çözme girişimi, çizge kuramı ve topolojinin miladı oldu. Königsberg'deki (günümüzde Rusya'daki Kaliningrad) yedi köprüyü, her birini en fazla bir kez geçmek şartıyla katetmenin mümkün olup olmadığı soruluyordu bulmacada. Köprülerin altından akan ırmak bir adacığı çevreleyerek akıyor, ardından çatal oluşturuyordu. Problemin, konumun geometrisiyle alakalı olduğunu fark eden Euler böyle bir rota çizmenin imkânsız olduğunu göstermek üzere yeni bir geometri türü geliştirdi. Mesele noktaların arasındaki uzaklıklar değildi: Tek önemli olan, noktaların arasındaki bağlantılardı.

Euler, Königsberg Köprüleri problemini, her kara alanını birer noktayla, farklı noktaları (düğüm veya köşe) birleştiren köprüleri de birer bağla (çizgi veya ayrıt) göstere-

Ayrıca bkz. Koordinatlar 144–51 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Karmaşık düzlem 214–15 ▪ Möbius şeridi 248–49 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Kelebek etkisi 294–99 ▪ Dört renk teoremi 312–13

> Euler okuyun, Euler okuyun. Her şeydeki ustamız odur.
> **Pierre-Simon Laplace**

tek modelledi. Böylece, karayla köprüler arasındaki ilişkileri simgeleyen bir "çizge" elde etmiş oldu.

İlk çizge kuramı

Euler her köprüden sadece bir kere geçilebildiği ve girilen her kara alanından çıkılması gerektiği öncülünden yola çıktı; buna göre, bir köprüden iki kez geçmemek için iki köprü lazımdı. Dolayısıyla bir ihtimal, başlangıç ve bitiş (farklı konumlarsa) hariç, her karasal alanın bağlanacağı köprü sayısı çift olmalıydı. Oysa Königsberg'i temsil eden çizgede (bkz. sağda), A beş köprünün uç noktası, B, C ve D'nin her biriyse üç köprünün uç noktasıdır. Başarılı bir rotada, kara alanlarında (düğüm veya köşelerde) çift sayıda köprü (bağ) olması gerekir ki girilip çıkılabilsin. Yalnızca başlangıç ve bitiş noktalarında tek sayıda köprü olabilir. İkiden fazla düğümün tek sayıda bağı olursa her köprüyü sadece bir kez kullanarak rota oluşturmak imkânsız olur. Euler bunu göstererek çizge kuramındaki ilk teoremi sundu.

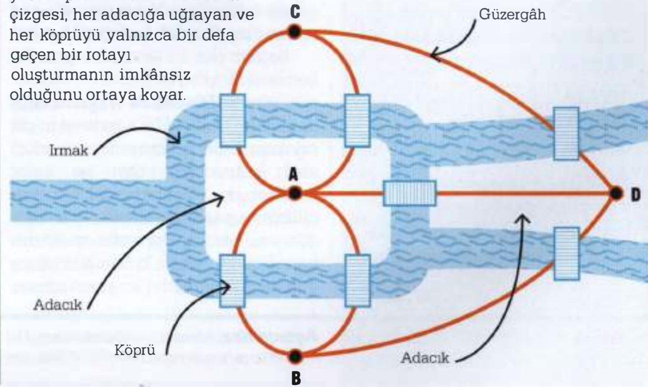
"Çizge" (graf/grafik; *graph*) sözcüğü çoğu zaman, noktaların x ve y eksenleri kullanılarak gösterildiği bir Kartezyen koordinat sistemini tanımlamak için kullanılır. Çizge, daha genel anlamıyla, bağlarla (veya birleştirilen bir ayrık düğümler (veya köşeler) kümesinden oluşur. Bir düğümde buluşan bağ sayısına o düğümün derecesi denir. Königsberg çizgesinde, A'nın derecesi 5; B, C, ve D'nin her birinin derecesiyse 3'tür. Her bir bağdan sadece ve sadece bir kez geçen bir yola Euler yolu (veya başlangıç ve bitiş farklı düğümlerdeyse yarı Euler yolu) denir.

Königsberg Köprüleri problemi şöyle sorulabilir: "Königsberg çizgesinde Euler veya yarı Euler yolu var mıdır?" Euler'in yanıtına göre, böylesi bir çizgede derece sayısı tek olan en fazla iki düğüm olmalıdır, oysaki Königsberg çizgesinde derece sayısı tek olan dört adet düğüm vardır.

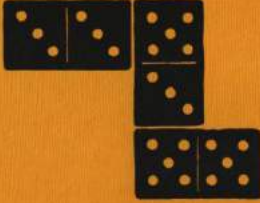
Ağ kuramı

Bir çizgedeki bağlar, sayısal değerler atanıp "ağırlıklı" (anlamlılık derecesi verili) yapılabilir (mesela bir harita üzerinde farklı uzunluktaki yolları simgelemek için). Ağırlıklı çizgelere ağ da denir. Bilgisayar bilimi, parçacık fiziği, iktisat, kriptografi, sosyoloji, biyoloji ve iklimbilim gibi birçok bilim dalında, nesnelerin arasındaki ilişkilerin modellemesinde ağlar kullanılır; çoğu durumda amaçlanan, iki nokta arasındaki en kısa mesafenin bulunması gibi, belirli bir niteliği en uygun duruma getirmektir

Ağların uygulamalarından biri, "gezgin satıcı problemi" adı verilen problemin ele alınışıdır. Bu problemde, bir satıcının evinden çıkıp sırayla birkaç şehre gidip geri gelebileceği en kısa rotanın bulunması gerekir. İddiaya göre, problem ilk başta bir mısır gevreği kutusunun arkasında sorulan bir bulmaca olarak hazırlanmıştı. Bilgisayar alanındaki atılımlara karşın her zaman en iyi çözümün bulunacağını garanti eden bir yöntem yoktur çünkü şehir sayısı arttıkça çözüme harcanan süre üstel büyüme sergiler. ■



Königsberg şehrinde, had şehrin iki yakasını iki adacığa bağlayan yedi köprü mevcuttu. Euler'in çizgesi, her adacığa uğrayan ve her köprüyü yalnızca bir defa geçen bir rotayı oluşturmanın imkânsız olduğunu ortaya koyar.



HER ÇİFT TAMSAYI, İKİ ASAL SAYININ TOPLAMIDIR

GOLDBACH KESTİRİMİ

KISACA

KİŞİ
Christian Goldbach
(1690–1764)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MS y. 200 İskenderiyeli Diyofantus sayılar hakkındaki temel konuları açıkladığı *Arithmetica* adlı eserini yazar.

1202 Fibonacci, Fibonacci dizisi olarak tanınan sayıları tanımlar.

1643 Pierre de Fermat sayı kuramının öncüsü olur.

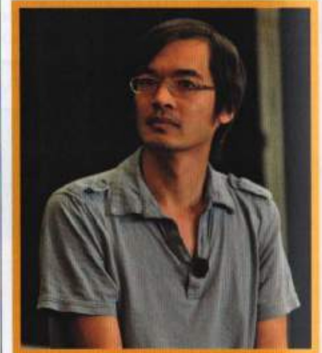
SONRA
1742 Leonhard Euler, Goldbach kestirimini geliştirir.

1937 Sovyet matematikçi Ivan Vinogradov, Goldbach kestiriminin bir türü olan üçlü Goldbach problemini ispatlar.

Rus matematikçi Christian Goldbach, dönemin önde gelen matematikçisi Leonhard Euler'e 1742 yılında mektup yazdı. Dikkate değer bir gözlemde bulunmuş olduğuna inanıyordu: Her çift tamsayı iki asal sayıya ayrıştırılabiliyordu: örneğin 6 (3 + 3) veya 8 (3 + 5). Euler, Goldbach'ın haklı olduğundan emindi ama bunu ispatlayamadı. Goldbach 5'ten büyük tüm tek tamsayıların üç asal sayının toplamı olduğunu da ileri sürdü. 2'den büyük tüm tamsayılarınsa asal sayıların birbirine eklenmesiyle elde edilebileceği sonucuna vardı. Bu ek önermeler, "sağlam" olan ilk kestirimin "zayıf" versiyonları olarak tarif edilir çünkü sağlam kestirim doğru olsa ister istemez zayıf olanlar da doğru olacaktı.

Sağlam olan ilk kestirime uymayan herhangi bir çift sayı manuel ve elektronik yöntemlerle henüz bulunabilmiş değil. 2013'te, 4×10^{18}'e kadar olan çift sayıların hepsi bilgisayarla test edildi ama bulunamadı. Sayı ne kadar büyükse, onu oluşturabilecek asal sayı çiftlerinin sayısı da o kadar çok olduğundan, kestirim kuvvetle muhtemel geçerli ve bir istisna bulanabilecekmiş gibi de görünmüyor. Her şeye rağmen, matematikçiler su götürmez ispatları şart koşarlar.

Yüzyıllar içerisinde söz konusu kestirimin farklı "zayıf" versiyonları ispatlandıysa da bu sağlam kestirimi henüz ispatlayabilen çıkmış değil; öyle görünüyor ki bu kestirimin karşısında en parlak zekâlılar dahi yenik düşmeye mahkûm. ■



2006 Fields Madalyası ve 2015 Breakthough Ödülü'nün sahibi, UCLA'dan Terence Tao, 2012'de zayıf Goldbach kestiriminin doğru bir ispatını yayımladı.

Ayrıca bkz. Mersenne asal sayıları 124 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Riemann varsayımı 250–51 ▪ Asal sayı teoremi 260–61



EN GÜZEL DENKLEM

EULER DENKLEMİ

KISACA

KİŞİ
Leonhard Euler (1707–83)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1714 Newton'ın *Principia*'sının baskı öncesi düzeltmelerini yapan Roger Cotes, erken davranarak, Euler'inkini andıran ancak ondan farklı olarak karmaşık sayıları ve bir karmaşık algoritmayı (tabanı karmaşık sayı olduğunda kullanılan bir logaritma türü) kullanarak bir formül çıkarır.

SONRA
1749 Abraham de Moivre, Euler'in formülünü kullanarak karmaşık sayılarla trigonometri arasında bağlantı kuran kendi teoremini ispatlar.

1934 Sovyet matematikçi Alexander Gelfond e^{π}'nin aşkın ve hangi kuvveti alınırsa alınsın irrasyonel olduğunu ortaya koyar.

Leonhard Euler'in 1747'de $e^{i\pi} + 1 = 0$ formülüyle ifade ettiği Euler denklemi, matematikteki en önemli beş sayıyı içerir: toplama ve çıkarmada etkisiz olan 0 (sıfır); çarpma ve bölmede etkisiz olan 1; e (2,718...: üstel büyüme ve azalmanın merkezindeki sayısı); i ($\sqrt{-1}$: en temel asal sayı) ve π (3,142...: matematik ve fizikte birçok denklemde karşılaşılan, çemberin çevresinin çapına oranı). Bu sayılardan ikisini (e ve i) matematiğe kazandıran, bizzat Euler'di. Bir sayıyının kuvvetini alma (örneğin 5^4, yani $5 \times 5 \times 5 \times 5$), çarpma ve toplama gibi üç basit işlemle bu çok önemli beş sayıyı birleştirebilmesi Euler'in dehasının göstergesiydi.

> Basittir ve buna rağmen derinliği akıl almaz boyuttadır, en önemli beş matematik sabitini içerir.
> **David Percy**
> **İngiliz matematikçi**

Karmaşık kuvvetler

Euler ve diğer matematikçiler, kendilerine, bir sayının karmaşık bir kuvvetini almanın bir anlam ifade edip etmeyeceğini soruyorlardı. Karmaşık sayılarda, bir gerçel sayı ile bir sanal sayı bir araya gelir: mesela a ve b birer gerçel sayı olmak üzere, $a + bi$. Euler, e sabitini, i sanal sayısının π ile çarpımına karşılık gelen kuvvetine yükseltince –1 sonucunu buldu. Denklemin iki tarafına da 1 eklendiğinde Euler denklemi elde edilir: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Denklemi basitliğinden dolayı matematikçiler hem derin hem de alışılmadık biçimde kısa ve özlü ispatlar için yakıştırdıkları "kusursuz" olarak nitelediler. ■

Ayrıca bkz. Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Euler sayısı 186–91



KUSURSUZ KURAM OLMAZ

BAYES TEOREMİ

KISACA

KİŞİ
Thomas Bayes (1702–61)

ALAN
Olasılık

ÖNCE
1713 Jacob Bernoulli'nin ölümünden sonra yayımlanan *Kestirim Sanatı*'nda yazarın yeni matematiksel olasılık kuramı ayrıntılarıyla açıklanır.

1718 Abraham de Moivre *Şansın Doktrini* kitabında, istatistikte olayların birbirinden bağımsız oluşunu açıklar.

SONRA
1774 *Memoir on the Probability of the Causes of Events* (*Olayların Sebeplerinin Olasılığı Hakkında İnceleme*) eserinde Pierre-Simon Laplace, ters olasılık ilkesini tanıtır.

1992 Bayes teoreminin uygulama ve gelişimini destekleme amacı doğrultusunda Uluslararası Bayes Analizi Derneği (The International Society for Bayesian Analysis, ISBA) kurulur.

Bayes teoremi **olayların olasılıklarını geçmişe ait bilgileri temel alarak hesaplamak** için kullanılır.

Olayla ilişkili **koşullar**, olayın **olasılığıyla** ilgili **daha doğru bir değerlendirme** yapmamıza yardımcı olabilir.

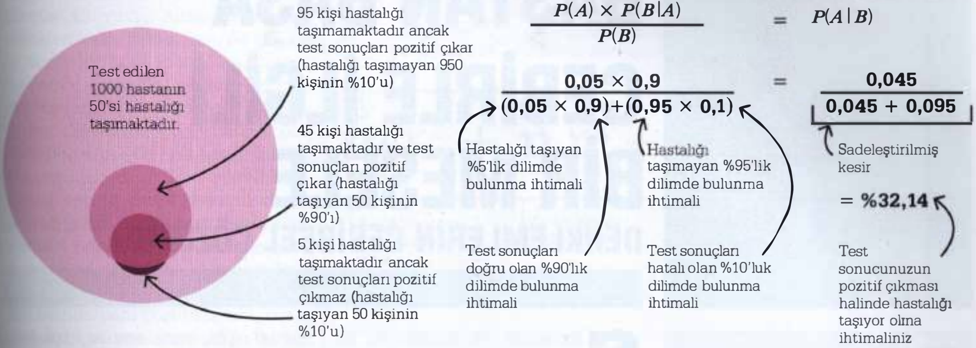
Teorem gelecekteki olayların olabilirliğine dair daha hassas tahminler yürütmek için kullanılabilir.

1763, yılında Galli papaz ve matematikçi Richard Price, "Şansın Doktrinindeki bir Problemi Çözme Denemesi" başlıklı bir makale yayımladı. Makaleyi yazan Papaz Thomas Bayes iki yıl önce hayatını kaybetmiş, makaleyi Price'a miras bırakmıştı. Olasılık modellemede çığır açan makalenin tezi, kayıp hava araçlarının konumunun saptanması ve hastalık testleri gibi muhtelif alanlarda halen kullanılır

Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi* (1713) başlıklı kitabında özdeş dağılımlı ve gelişigüzel üretilmiş değişkenlerin, sayıları arttıkça, gözlemlenen ortalamalarının kuramsal ortalamalarına yaklaştığını gösterdi. Örneğin yeterince çok defa yazı tura atıldığında tura gelme sayısı toplam atış sayısının yarısına (0,5 olasılığa) yaklaşır

1718 yılında Abraham de Moivre olasılığın altında yatan matematikle cebelleşiyordu. Örneklem yeterli büyüklükte olduğu takdirde sürekli rassal değişkenlerin (örneğin insanların boyları) dağılımının, ileride Alman matematikçi Carl Gauss'un "normal dağılım" adını vereceği çan

Ayrıca bkz. Olasılık 162–65 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Normal dağılım 192–93 ▪ Laplace'ın şeytanı 218–19 ▪ Poisson dağılımı 220 ▪ Modern istatistiğin doğuşu 268–71 ▪ Turing makinesi 284–89 ▪ Kriptografi 314–17



Bir hastalık nüfusun yüzde 5'ini etkiler ve doğruluk oranı yüzde 90 olan bir testle teşhis edilirse (*B* olayı), test sonucunun pozitif çıkması halinde hastalığı taşıma olasılığınızın (*P*), yani *P*(*A*|*B*) değerinin, yüzde 90 olduğunu düşünebilirsiniz. Oysa testin yüzde 10'luk hata payının yol açtığı yanlış sonuçlar Bayes teoreminde hesaba katılır.

şekilli bir eğride dengeye oturduğunu gösterdi.

Olasılıkları hesaplamak

Oysa gerçekteki çoğu olay yazı tura atışından daha çetrefillidir. Olasılığın kullanışlı bir şey olabilmesi için, matematikçilerin bir soruya yanıt bulması gerekiyordu: Bir olayın sonucunu ona yol açmış olasılıklar hakkında sonuç çıkarabilecekleri şekilde nasıl kullanabilirlerdi? Yazı tura atışındaki yüzde 50 şans gibi doğrudan olasılıkları kullanmak yerine gözlemlenen olayların nedenlerini temel alan bu akıl yürütmeye ters olasılık adı verildi. Nedenlerin olasılığı hakkındaki problemler ters olasılık problemleri olarak adlandırılır ve örneğin yamuk bir madeni parayla 20 atışta 13 kez tura geldiğini gözlemledikten sonra o madeni para atıldığında tura gelme olasılığının 0,4'le 0,6 arasında olup olmadığını belirlemeye çalışmak bu tür bir problemin konusu olabilir.

Bayes ters olasılıkların hesaplanışını göstermek için iki bağımsız olayı ele aldı: "*A* olayı" ve "*B* olayı". İki olayın da meydana gelme olasılığı ((*P*(*A*) ve *P*(*B*)) vardır ve iki olay için de *P*, 0 ile 1 arasında bir sayıdır. *A* olayı meydana gelirse bu, *B* olayının meydana gelme olasılığını değiştirir; bunun tersi de doğrudur. Bayes bunu ifade edebilmek için "koşullu olasılıkları" tanıttı. Bunlar, *B* veriliyken *A*'nın olasılığı anlamına gelen *P*(*A*|*B*) ve *B* veriliyken *A*'nın olasılığı anlamına gelen *P*(*B*|*A*) olarak verilir. Bayes, dört olasılığın birbirleriyle nasıl bağlantılı olduğu sorusunun yanıtını şu denklemle bulmayı başardı: $P(A|B) = P(A) \times P(B|A)/P(B)$. ■

Thomas Bayes

Anglikan kilisesine bağlı olmayan Protestan ve İngiliz din adamı Thomas Bayes 1702'de dünyaya geldi ve Londra'da yetişti. Edinburgh Üniversitesinde mantık ve teoloji okudu, din adamı olmak üzere babasının izinden gitti ve hayatının büyük bölümünü Kent vilayetindeki Tunbridge Wells'de bir Presbiteryen şapelini yöneterek geçirdi.

Bayes'in matematikçilik hayatına ilişkin ayrıntılar kısıtlı olsa da, *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst* (*Akılar Doktrinine Giriş ve Analizcinin Yazarının İtirazlarına Karşı Matematikçilerin Savunması*) eserini 1736'da isimsiz olarak yayımladığı bilinir. Filozof Piskopos George Berkeley'nin eleştirdiği Newtoncı kalkülüs temelini savunuyordu bu eserde. Bayes 1742 yılında İngiltere Kraliyet Bilimler Akademisine üye yapıldı, hayata 1761'de veda etti.

Önemli eseri

1736 *Akılar Doktrinine Giriş ve Analizcinin Yazarının İtirazlarına Karşı Matematikçilerin Savunması*



BAŞTAN BAŞA CEBİRLE İLGİLİ BİR MESELE

DENKLEMLERİN CEBİRSEL ÇÖZÜMÜ

KISACA

KİŞİ
Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

ALAN
Cebir

ÖNCE
628 Brahmagupta birçok ikinci derece denklemi çözmeye yarayan bir formül yayımlar.

1545 Gerolamo Cardano üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin çözümünü bulmaya yönelik formüller oluşturur.

1749 Leonhard Euler, derecesi n olan polinom denklemlerin karmaşık kök sayısının tamı tamına n olduğunu ispatlar ($n = 2, 3, 4, 5,$ or 6'dır).

SONRA
1799 Carl Gauss cebrin temel teoreminin ilk ispatını yayımlar.

1824 Niels Henrik Abel, Norveç'te, Paolo Ruffini'nin beşinci derece denklemlerin genel bir formülü bulunmadığına dair 1799 yılında sunduğu ispatı tamamlar.

Sayılardan ve bilinmeyen bir nicelikten (x ve x'in x^2 ve x^3 gibi kuvvetleri) oluşan polinom denklemler gerçek dünyadaki problemlerin çözümü açısından etkili bir araçtır. $x^2 + x + 41 = 0$, polinom denkleme bir örnektir. Bu tür denklemler tekrarlanan sayısal hesaplamalarla üç aşağı beş yukarı çözülebilse de 18. yüzyıla kadar kesin çözümlerine (cebirsel yoldan) ulaşılamadı. Kesin çözüm arayışı sonuç olarak, negatif ve karmaşık sayılar gibi yeni sayılar, modern cebirsel notasyon ve grup kuramı gibi matematikte pek çok yeniliği beraberinde getirdi.

Çözümleri aramak

Babilliler ve Antik Yunanlar, günümüzde genelde ikinci derece denklemlerle ifade edilen problemlerin çözümünde geometrik yöntemleri kullanıyorlardı. Ortaçağda kökleşen yaklaşımlar nispeten daha soyut algoritmik yaklaşımlarken matema-

Denklemler sayısal yoldan çözülebilir, ama yalnızca **bazı denklemleri cebirsel yoldan çözmek mümkündür**.

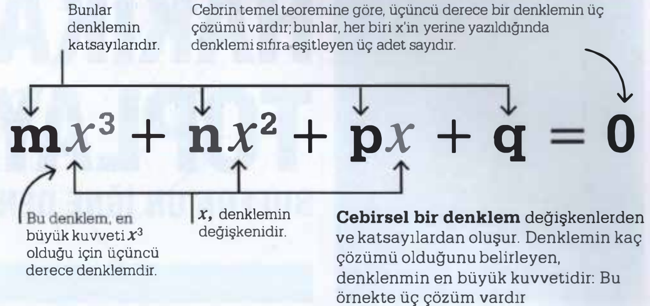
Sonlu sayıda işlem (+, −, ×, ÷ ve √ gibi) **yapabiliyorsanız**...

...ve bu **işlemler** yalnızca **tamsayı veya kesirli sayı içeriyorsa...**

...denklem cebirsel yoldan çözülebilir.

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Cebir 92–99 ▪ Binom teoremi 100–01 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–05 ▪ Huygens'in tautochrone eğrisi 167 ▪ Cebrin temel teoremi 204–09 ▪ Grup kuramı 230–33

tikçiler 16. yüzyıl itibariyle polinom denklemlerin katsayıları ile kökleri arasındaki belli başlı ilişkilerden haberdar olmakla birlikte üçüncü derece (en büyük üssü 3 olan) ve dördüncü derece (en büyük üssü 4 olan) denklemlerin çözümü için formüller tasarlamışlardı. 17. yüzyıldaysa şimdi cebrin temel teoremi olarak anılan genel bir polinom denklemler kuramı şekillendi. Bu kurama göre, derecesi n olan (x'in en büyük kuvvetinin x^n olduğu) bir denklemin köklerinin, yani çözümlerinin, sayısı tam n'dir ve bunlar gerçel ya da karmaşık sayılar olabilirler.



Kökler ve permütasyonlar

Fransız-İtalyan matematikçi Joseph-Louis Lagrange, *Reflections on the algebraic resolution of equations* (*Denklemlerin Cebirsel Çözümü Üzerine Düşünceler*) (1771) yapıtında, polinom denklemlerin çözümüyle ilgili genel bir yaklaşımı tanıttı. Kuramsal bir çalışma yürüttü; polinom denklemlerin yapısını irdeleyip çözüm formülüne giden yolu bulmasını sağlayacak koşulları açığa çıkardı. Lagrange katsayıları bakımından ilişkili ve derecesi küçük bir polinom denklem kullanma tekniğini şu çarpıcı yenilikle birleştirdi: Köklerin olanaklı permütasyonlarını (farklı dizilişlerini) dikkate aldı. Bu permütasyonlardan ortaya çıkan simetrilerin iç yüzünü kavrayan Lagrange hem üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin formüllerle çözülebilmesinin hem de beşinci derece denklemlerin farklı bir yaklaşım gerektirmesinin sebebini (farklı simetri ve kök permütasyonları) gösterdi. İtalyan matematikçi Paolo Ruffini beşinci derece denklemler için genel bir formül bulunmadığını ispatlamaya koyulduğunda Lagrange'ın çalışmasının üzerinden 20 yıl geçmemişti. Lagrange'ın permütasyonlara (ve simetrilere) eğildiği araştırma Fransız matematikçi Évariste Galois'nın daha da soyut ve genel olan grup kuramının temelini oluşturdu. Galois, derecesi 5 veya daha yüksek olan denklemlerinin çözümünü cebirsel yoldan bulmanın imkânsız olmasının nedenini, yani bu denklemleri çözmeye yarayan genel bir formülün neden var olmadığını, bu kuramla ispatladı. ■

Joseph-Louis Lagrange



1736'da Torino'da doğduğunda Giuseppe Lodovico Lagrangia adı verilen Lagrange, ailesinin Fransız köklerini benimseyip adını Fransızcadaki karşılığıyla Lagrange olarak belirledi. Kendi kendini yetiştirmiş genç bir matematikçi olarak tautochrone problemine zaman ayırdı ve bu tür problemleri çözen fonksiyonu bulmak üzere yeni bir biçimsel yöntem geliştirdi. 19 yaşında mektup yazdığı Leonhard Euler, sahip olduğu yeteneği fark etti. Lagrange, Euler'in değişkenler hesabı adını verdiği yöntemini, tellerin titreşimi gibi muhtelif fiziki olgulara uyguladı. 1766'da Euler'in tavsiyesi doğrultusunda Berlin Akademisinin Matematik Yöneticiliğine getirildi ve 1787'de Paris'teki Académie des Sciences'e geçti. Akademisyen ve ülkeye yabancı olmasına rağmen Lagrange, Fransız Devrimi ve Terör Dönemini sağ salim atlattı. 1813'te Paris'te hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

1771 *Denklemlerin Cebirsel Çözümü Üzerine Düşünceler*
1788 *Analitik Mekanik*
1797 *Analitik fonksiyonlar kuramı*



HAKİKATLERİ TOPLAYALIM

BUFFON'UN İĞNE DENEYİ

KISACA

KİŞİLER
Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707–88)

ALAN
Olasılık

ÖNCE
1666 İtalyan matematikçi Geralomo Cardano'nun yazdığı *Liber de ludo aleae* (*Şans Oyunları Kitabı*) yayımlanır.

1718 Abraham de Moivre olasılık hakkındaki ilk kitap olma özelliğini taşıyan *Şansın Doktrini*'ni yayımlar.

SONRA
1942–46 ABD'nin yönetiminde nükleer silah geliştirme faaliyetleri yürüten Manhattan Projesi, Monte Carlo yöntemlerini (rassal değişkenler üreterek risk modellemesi yapan programlama işlemleri) kapsamlı bir şekilde kullanır.

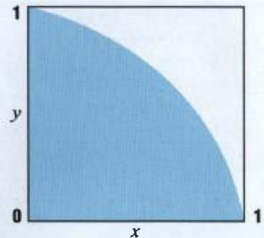
1900'lerin sonları Mikroskobik sistemlerdeki parçacık etkileşimlerini araştırmak için kuantum Monte Carlo yöntemleri uygulanır.

1733'te, matematikçi ve doğabilimci George Leclerc, namıdiğer Comte de Buffon, büyük ilgi uyandıran bir soruyu gündeme getirdi (ve de yanıtladı): Eşit aralıklarla dizilmiş paralel çizgilerin üzerine bırakılan bir iğnenin, yere düştüğünde çizgilerden birinin üstünde durma ihtimali nedir? Günümüzde Buffon'un iğne deneyi olarak bilinen bu problem ilk olasılık hesaplamalarından biriydi.

Kusursuz bir örnekli açıklama

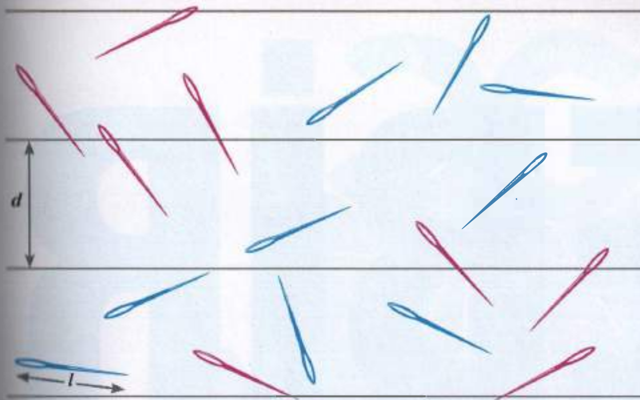
Buffon'un, iğne deneyini yürütmekteki asıl amacı, π'nin (pi; çemberin çevresinin, çapına oranı) yakın bir değerini bulmaktı. Deneyde, l uzunluğundaki bir iğneyi, d iğnenin uzunluğundan büyük olmak üzere ($d > l$), birbirlerinden uzaklığı d olan bir paralel çizgiler dizisinin üzerine birçok kez bıraktı. Buffon bunun ardından, toplam deneme sayısı ile iğnenin kaç defa bir çizgi üstünde durduğunu oranladı ve π'nin, yaklaşık olarak, iğne uzunluğunun (l) iki katının, uzaklığa (d) ve çizgi üstüne düşen iğnelerin oranına (p) bölümüne eşit olduğunu ifade eden formülü buldu: $\pi \approx 2l \div dp$. İğnenin bir çizginin üstünde durması olasılığı, formülün iki tarafı da p ile çarpılıp π'ye bölünerek hesaplanabilir ve sonuç olarak $p \approx 2l \div \pi d$ elde edilir.

Bu π ilişkisi bazı olasılık probleminde kullanılabilir. Bu problemlerin bir örneğinde, bir karenin içine, sol üst köşeden sağ alt köşeye uzanan bir eğri meydana getirecek şekilde bir çeyrek daire çizilir (bkz. aşağıda). Karenin alttaki yatay kenarı x ekseni, soldaki dikey kenarı y eksenidir. Sol alt köşenin değeri 0, eğrinin uçlarındaki iki köşenin değeri 1'dir. 0 ile 1 arasında rasgele seçilen iki sayı x ve y koordinatları olarak belirlendiğinde bu sayıları x koordinatı olan a'nın ve x koordinatı olan b'nin yerine koyup $\sqrt{a^2 + b^2}$ işleminin sonucuna bakarak noktanın çeyrek dairenin içine mi



Pi'den yararlanılarak, rasgele seçilen bir noktanın bu karenin içindeki çeyrek dairenin içine düşmesi olasılığı hesaplanabilir; sonuç yaklaşık olarak yüzde 78'dir.

Ayrıca bkz. Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Bayes teoremi 198–99 ▪ Modern istatistiğin doğuşu 268–71



d = çizgilerin arasındaki uzaklık
l = iğnenin uzunluğu

Buffon'un iğne deneyi, olasılık ile Pi arasında nasıl bağlantı kurulabileceğini gösterdi. Buffon, bırakıldığında çizgi üstünde duran iğneleri "başarma" (pembe), durmayanları "başaramama" (mavi) olarak sınıflayıp ardından "başarma" olasılığını hesapladı.

(başarma) yoksa dışına mı (başaramama) denk geldiği anlaşılabilir. Eğrinin dışında kalan noktalar için sonuç > 1, eğrinin içinde kalan noktalar içinse < 1'dir. Nokta gelişigüzel seçildiğinden, karenin içinde herhangi bir yerde olabilir. Çeyrek daire çizgisinin üstündeki noktalar başarma sayılabilir. "Başarma" şansı πr^2 (çemberin alanı) ÷ 4'tür. Yarıçap 1'se, r^2 = 1'dir, dolayısıyla alan sadece π'dir; çeyrek daire için, π 4'e bölünür ve yaklaşık olarak 0,78 elde edilir. Alanın tamamı, karenin alanıdır: 1 × 1 = 1. Bu nedenle, düşen iğnenin renkli alanda durması olasılığı yaklaşık olarak 0,78 ÷ 1 = 0,78'dir.

Monte Carlo yöntemi

Bu problem, istatistiksel bir yaklaşımın uygulandığı daha geniş kapsamlı bir deney sınıfına örnektir. Polonyalı-Amerikalı bilim insanı Stanislaw Ulam ve çalışma arkadaşları, II. Dünya Savaşında nükleer silahlarla ilgili olarak gizli araştırmalarda kullanılan rassal örneklemenin kod adı olarak uydurduğu Monte Carlo yöntemi adını vermiştir. Monte Carlo yöntemleri, sonraları, defalarca tekrarlanan olasılık deneyleri bilgisayarla daha kısa sürede yürütülmeye başlayınca modern uygulamalar için elverişli oldu. ■



Rüzgâr enerjisi verimlilik analizinde, bir rüzgâr santralinin ömrü boyunca sağlaması öngörülen enerji çıktısı Monte Carlo olasılık yöntemleriyle hesaplanır ve farklı belirsizlik düzeyleri sağlanır.



Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon

1707'de Fransa'nın Montbard kasabasında doğan Georges-Louis Leclerc'ün anne babası, oğullarının hukukta kariyer yapması konusunda ısrarcıydı ama o daha çok bitkibilim, tıp ve matematiğe ilgi duyuyordu. Fransa'da Angers Üniversitesinde bu alanlarda eğitim aldı. 20 yaşında binom teoremini araştırmaya koyuldu.

Şahsi bir serveti olan Buffon yılmadan yazıp araştırıyor, zamanın bilim camiasının birçok seçkin simasıyla yazışıyordu. İlgi alanları çok çeşitliydi ve gerek gemi inşaatı gerekse doğa tarihi ve astronomi gibi çeşitli konularda sayısız eser üretti. Kont ayrıca birçok bilimsel çalışmanın çevirisini yaptı.

1739'da Paris'teki kraliyet botanik bahçeleri Jardin du Roi'nin başına getirilen Buffon, bahçelerdeki bitki derlemini zenginleştirdi ve boyutunu iki katına çıkardı. 1788'de Paris'te vefat edene dek bu görevini sürdürdü.

Önemli eserleri

1749–1786 *Histoire naturelle (Doğa Tarihi)*
1778 *Les époques de la nature (Doğanın Dönemleri)*

CEBİR

ONDAN NE İSTENİRSE ÇOĞU ZAMAN FAZLASINI VERİR

CEBRİN TEMEL TEOREMİ



KISACA

KİŞİ
Carl Gauss (1777–1855)

ALAN
Cebir

ÖNCE
1629 Albert Girard derecesi ***n*** olan bir polinom denklemin kök sayısının ***n*** olduğunu belirtir.

1746 Jean d'Alembert cebrin temel teoremine (CTT) yönelik ilk ispat denemesini yapar.

SONRA
1806 Robert Argand karmaşık katsayılı polinomlara olanak tanıyan CTT için ilk kesinlik içeren ispatı yayımlar.

1920 Alexander Ostrowski, Gauss'un CTT ispatındaki geri kalan kabulleri ispatlar.

1940 Hellmuth Kneser, Argand'ın köklerin bulunmasına olanak tanıyan CTT ispatının, yapıcı nitelikteki ilk çeşidini üretir.

> İnsanın bilgisiz olduğunu içtenlikle kabul etmek suretiyle problemleri çözmesi yöntemine cebir denir.
>
> **Mary Everest Boole**
> **İngiliz matematikçi**

Denklemler, bir niceliğin başka bir niceliğe eşit olduğunu belirtir ve bilinmeyen bir sayıyı bulma imkânını verir. Babillilerin döneminden bu yana bilginler denklemlerin çözümlerini bulmaya çalışmış ve çözümsüz görünen denklemlerle zaman zaman karşılaşmışlardır. MÖ 5. yüzyılda Hippasos'un $x^2 = 2$'yi çözme denemelerinde $\sqrt{2}$'nin irrasyonel (ne tamsayı ne de kesir) olduğunu anlamasının, Pisagorcu inanışları ifşa ettiğinden dolayı ölümünü getirdiği söylenir. 800 yıl kadar sonra, Diyofantus negatif sayılara dair bilgisi olmadığından, x'in negatif olduğu denklemleri ($4 = 4x + 200$ denkleminde x'in -4'e eşit olması gibi) kabul edemedi.



Gerolamo Cardano 16. yüzyılda üçüncü derece denklemlere çalışırken negatif köklerle karşılaştı. Bunları geçerli çözümler olarak kabul etmesi cebri ileri taşıyan önemli bir adımdı.

Polinomlar ve kökler

18. yüzyılda matematikte en çok araştırılan alanlardan biri polinom denklemleri kapsıyordu. Polinom denklemler çoğunlukla mekanik, fizik, astronomi ve mühendislikteki problemleri çözmek için kullanılır ve x^2 gibi bilinmeyen bir değerin kuvvetlerini içerir. Bir polinom denklemin "kökü", bilinmeyen değerin yerine yazılıp polinom denklemi "0"a eşitleyen belirli bir sayısal değerdir. 1629'da Fransız matema-

Değişken (x ve y gibi) ve **katsayıların** (4 gibi) yanı sıra işlemlerin (+ ve – gibi) bir araya gelmesiyle kurulan denklemlere ($x^2 + 4x - 12 = y$ gibi) **polinom denklem** denir.

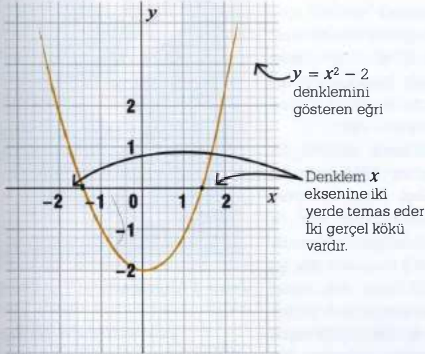
Kök, bir değişkenin (mesela $x = -6$) yerine yazıldığında denklemi sıfıra eşitleyen bir sayıdır.

Tüm polinom denklemlerin ya **gerçel** ya da **karmaşık kökleri** vardır.

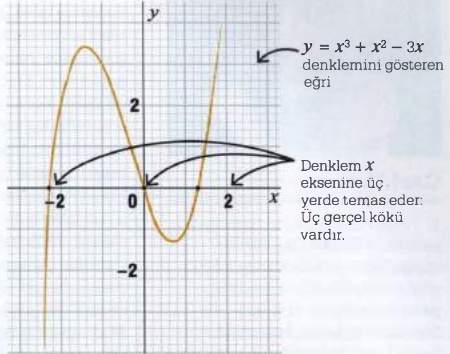
Bu, **cebrin temel teoremi** (CTT) olarak bilinir.

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Cebir 92–99 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–05 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Denklemlerin cebirsel çözümü 200–01 ▪ Karmaşık düzlem 214–15

Bir denklemin kökünü/köklerini bulmak



$y = x^2 - 2$ gibi, en büyük üssü 2 olan bir denklemin her zaman iki adet gerçel veya karmaşık kökü vardır.



$y = x^3 + x^2 - 3x$ gibi, en büyük üssü 3 olan bir denklemin her zaman üç adet gerçel veya karmaşık kökü vardır.

tikçi Albert Girard, derecesi n olan bir polinomun n sayıda kökü olduğunu gösterdi. Örneğin $x^2 + 4x - 12 = 0$ denkleminin, her ikisi de 0 yanıtını veren iki kökü vardır: $x = 2$ ve $x = -6$. İki kök olmasının sebebi x^2 terimidir; 2, denklemdeki en büyük üstür. Her ikinci derece denklemin kökleri, denklem grafikte gösterildiğinde (yukarıda gösterildiği gibi) kolaylıkla bulunabilir: Çizginin x eksenine temas ettiği yerlerdedir. Girard'ın teoremi yararlıydı ama karmaşık sayılar kavramından haberdar olmadığı için çalışması güdük kaldı. Olanaklı tüm polinomların çözülmesini sağlayan bir cebrin temel teoremini (CTT) üretmenin yolu bu sayılardan geçiyordu.

Karmaşık sayılar

Pozitif ve negatif, rasyonel ve irrasyonel tüm sayılar bir araya geldiğinde gerçel sayıları meydana getirir. Buna rağmen bazı polinomların kökleri gerçel sayı değildir. İtalyan Gerolamo Cardano ve meslektaşlarının 16. yüzyılda karşılarına bu problem çıktı; üçüncü denklemlere çalıştıkları sırada bazı çözümlerin negatif sayıların köklerini içerdiğini fark ettiler. Negatif bir sayı kendisiyle çarpıldığında pozitif bir sayı elde edildiğinden bu onlara imkânsız geldi.

Bir başka İtalyan, Rafael Bombelli, gerçel sayılarla birlikte $\sqrt{-1}$ gibi sayıları barındıran genişletilmiş bir sayı sisteminin kurallarını sıralayınca, 1572'de bu problem çözüldü. 1751'de Leonhard Euler polinomların sanal köklerini araştırdı ve $\sqrt{-1}$'e "sanal birim" ya da i. adını verdi. Tüm sanal sayılar i.'nin birer katıdır. Gerçek ve sanal sayıların $a + bi$'de (a ve b herhangi birer gerçel sayı ve $i = \sqrt{-1}$'dir) olduğu gibi bir araya gelmesiyle karmaşık sayılar oluşur. Bazı denklemlerin çözümü için negatif ve karmaşık sayıların şart olduğunu matematikçiler kabul edince daha yüksek derece denklemlerin köklerini bulmanın daha da yeni sayı türlerinin bulunmasını gerektirip gerektirmeyeceği sorusu kaldı geriye. Euler ve başta Almanya'daki Carl Gauss olmak üzere diğer matematikçiler bu soruya yanıt arayacak ve her polinomun köklerinin ya gerçel ya da karmaşık sayı olduğu (başka sayı

> Sanal sayılar kutsal ruhun sunduğu incelikli ve harikulade bir çaredir.
> **Gottfried Leibniz**



Carl Gauss

1777'de Almanya'nın Brunswick şehrinde doğan Carl Gauss matematik yeteneklerini küçük yaşta sergiliyordu: Henüz üç yaşında babasının maaş hesabını düzeltti, beş yaşına bastığında babasının hesaplarını tutuyordu. 1795'te Göttingen Üniversitesine girdi ve 1798'de sadece cetvel ve pergel kullanarak düzgün bir heptadekagon (17 kenarlı bir çokgen) çizdi; 2000 yıl kadar öncesinin Öklitçi geometrisinden beri çokgen çizimi açısından en büyük ilerlemeydi bu. Gauss'un 21 yaşında yazdığı ve 1801'de yayımlanan *Arithmetical Investigations*'ı (*Aritmetik Araştırmaları*), sayı kuramının tanımının yapılmasında önemli rol oynadı. Gauss'un gelişmelere imza attığı diğer alanlar astronomi (Ceres asteroidinin yeniden keşfi gibi), kartografi, elektromanyetizma araştırmaları ve optik gereçlerinin tasarımıydı. Gelgelelim birçok fikrini kendisine saklamıştı; ölümünden sonra 1855'te, yayımlanmayan müsveddelerinde böyle çok sayıda fikri keşfedildi.

Önemli eseri

1801 *Disquisitiones Arithmeticae (Aritmetik Araştırmaları)*

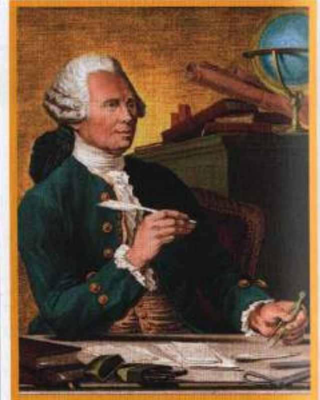
türünün gerekmediği) sonucuna ulaşacaklardı.

İlk araştırmalar

CTT'yi farklı şekillerde ifade etmek mümkündür ancak en genel tanımlanışına göre, karmaşık katsayı içeren her polinomun en az bir karmaşık kökü vardır. Şöyle de ifade edilebilir: Karmaşık katsayı içeren ve derecesi n olan tüm polinomların n sayıda karmaşık kökü vardır.

CTT'yi ispatlamaya dönük ilk hatırı sayılır girişim, 1746 yılında Fransız matematikçi Jean le Rond d'Alembert'in "Recherches sur le calcul intégral" ("İntegral Hesabı Üzerine Araştırma") başlıklı çalışmasında yer alır. D'Alembert, ispatında, gerçel katsayılara sahip bir $P(x)$ polinomunun bir karmaşık kökü ($x = a + ib$) varsa, o zaman bir karmaşık kökü ($x = a - ib$) daha olduğunu ileri sürüyordu. Bu teoremi ispatlamak adına, günümüzde "d'Alembert önsavı" adıyla bilinen karmaşık bir kavramdan yardım aldı. Matematikte önsav, daha büyük bir teoremi çözmek için kullanılan aracı bir önermedir. Oysa d'Alembert kendi önsavının tatminkâr bir ispatını sunamadı; ispatı doğru olmasına rağmen diğer matematikçileri tatmin edemeyecek kadar çok boşluk içeriyordu. CTT'yi ispatlamaya yönelik sonraki girişimler Leonhard Euler ve Joseph-Louis Lagrange'dan geldi. Her ne kadar sonraki matematikçilerin işine yarasalar da bunlar da tatmin edici değildi. 1795'te Pierre-Simon Laplace CTT'yi, polinomun katsayılarından tespit edilen ve köklerinin özelliğine (gerçel mi karmaşık mı gibi) işaret eden polinom "diskriminantı" kavramını kullanarak ispatlamayı denedi. İspatı, d'Alembert'in uzak durduğu ispatlanmamış bir kabulü içeriyordu: bir polinomun her zaman kökleri olduğunun kabulü.

> Yalnızca iki tür kesin bilgi vardır: kendi varlığımızın farkında olduğumuz ve matematiğin hakikatleri.
> **Jean d'Alembert**



Jean d'Alembert, CTT'yi ilk ispatlama girişiminde bulunan kişiydi. Fransa'da bu, Gauss'un d'Alembert'den etkilendiği imasını taşıyan, d'Alembert-Gauss teoremi adıyla anılır.

Gauss'un ispatı

Carl Friedrich Gauss 1799'da 21 yaşındayken doktora tezini yayımladı. Tezi, başka hususların yanında, d'Alembert'in ispatının bir özeti ve eleştirisiyle başlıyordu. Gauss, önce yapılmış her ispatta, ispatlanmaya çalışılan şeyin bir kısmının kabul edilmiş olduğuna dikkat çekiyordu. Bunlardan birinde, derecesi tek sayı olan polinomların (mesela üçüncü

ve beşinci derece denklemlerin) her zaman gerçel bir kökü olduğu kabul ediliyordu. Bu kabul doğrudur ama Gauss ispatlanması gerektiğini savunuyordu. Gauss'un ilk ispatı cebirsel eğrilerle ilgili kabullere dayanıyordu. Bunlar akla uygundu ama Gauss'un tezindeki ispatları kesinlikten yoksundu. Gauss'un tüm kabullerinin doğruluğu, Ukraynalı matematikçi Alexander Ostrowski'nin ilk ispatını yayımladığı 1920 yılında onaylanabildi. Gauss'un ilk ve geometrik ispatının vakitsiz olduğu söylenebilir; Gauss'un fikirlerini daha net açıklamasına yardımcı olacak süreklilik ve karmaşık düzlem kavramları 1799'da henüz üretilmemişti.

Argand'ın eklemeleri

Gauss 1816'da CTT'nin iyileştirdiği bir ispatını yayımladı, 1849'da doktora diplomasını alışının 50. yıldönümünü, o günkü derste bu ispatın daha da mükemmelleştirdiği bir halini sunarak kutladı. Birinci ve geometrik olan yaklaşımından farklı olarak ikinci ve üçüncü ispatları daha cebirsel ve teknik nitelikteydi. Gauss, CTT için dört ispat yayımlamasına rağmen problemi tam olarak çözüme kavuşturamadı. Bir sonraki belirgin adıma çare bulmayı başaramadı: Gerçel sayılı her denklemin karmaşık sayılı bir çözümü olacağını tespit etmiş, ama $x^2 = i$ gibi karmaşık sayı içeren denklemleri hesaba katmamıştı.

1806'da İsviçreli matematikçi Jean-Robert Argand baştan aşağı kusursuz bir çözüm buldu. Herhangi bir z karmaşık sayısı, a z'nin gerçel kısmı, bi sanal kısmı olacak şekilde, $a + bi$ kalıbında yazılabilir. Argand'ın emeklerinin sonucunda sayıların geometrik olarak simgelenmesi artık mümkündü. Gerçek sayılar x eksenine, sanal sayılar y eksenine yazılırsa o zaman eksenlerin arasında kalan bütün düzlem karmaşık sayıların bölgesi olur. Argand karmaşık sayılarla kurulmuş her denkleminin çözümünün, şemasındaki karmaşık sayıların içinde bulunabileceğini, dolayısıyla sayı sistemini genişletmenin lüzumu olmadığını ispatladı. Argand'ın ispatı, uygun kesinlik düzeyindeki ilk CTT ispatıydı.

Teoremin kalıtı

Gauss ve Argand'ın ispatları, polinomların kökleri olarak karmaşık sayıların geçerliliğini tesis etti. CTT ile vurgulanan şuydu: Gerçel sayılarla kurulmuş bir denklemi çözecek bir kimse, çözümü karmaşık sayılar bölgesinde bulabileceğinden emin olabilirdi. Ezberleri bozan bu kavramlar karmaşık analizin temelini oluşturdu.

> Sonuçlar uzun zamandır elimde ancak onlara nasıl ulaşacağımı henüz bilmiyorum.
> **Carl Gauss**

CTT'yi ispatlama denemelerini Argand'dan sonraki matematikçiler yeni yöntemlere başvurarak sürdürüler. Bunun 1891 yılındaki bir örneğinde Alman Karl Weierstrass, bir polinomun tüm köklerini aynı anda bulmayı sağlayan bir yöntemi yarattı; sonradan 1960'larda matematikçilerce yeniden keşfedildiği için bu yöntemin adı günümüzde Durand-Kerner yöntemi olarak geçer. ■



Bir Einstein halkası: Kaynağından çıkan ışığın, kütleçekimsel lensleme etkisiyle aldığı halka şekli. İlk olarak 1998'de gözlemlenmiştir.

CTT'nin uygulamaları

Cebrin temel teoremine dönük araştırmalar başka alanlarda da önemli atılımları beraberinde getirdi. 1990'larda İngiliz matematikçiler Terrence Sheil-Small ve Alan Wilmshurst harmonik polinomları da CTT'nin kapsamına aldı. Bu polinomların sonsuz sayıda kökü olabilir ama bazı durumlarda köklerin sayısı sonludur. 2006'da Amerikalı matematikçiler Dmitry Khavinson ve Genevra Neumann belirli bir harmonik polinom sınıfının kök sayısının bir üst sınırı olduğunu ispatladılar. Sonuçlarını yayımladıktan sonra, ispatlarının Güney Koreli astrofizikçi Sun Hong Rhie'ye ait bir kestirimi çözüme ulaştırdığını öğrendiler. Kestirim uzaklardaki astronomik ışık kaynaklarıyla ilgiliydi. Evrendeki devasa cisimler uzaklardaki kaynaklardan gelen ışık ışınlarını kütleçekimsel lensleme denen olay aracılığıyla bükerek teleskopla görülebilen birden çok görüntü oluşturur. Rhie ortaya çıkan görüntü sayısının bir maksimum değeri olması gerektiğini iddia etmiş, Khavinson ve Neumann da tam olarak bu üst sınırı bulmuştu.

19. YÜ

1800–1900

ZYIL

1806

Amatör matematikçi Jean-Robert Argand **karmaşık sayıları grafikte koordinatla gösterme** fikrini irdeler.

1814



Pierre-Simon Laplace **her bir parçacıkla** ilgili tüm bilgilere sahip olunduğunda **öngörülebilir olan belirlenimci bir evren** kavramını öne sürer. Sonraları bu kavrama **Laplace'ın şeytanı adı verilir.**

1822

Charles Babbage'ın **Fark Makinesi,** geleceğin **hesap makinelerine** ve son olarak da bilgisayarlara **zemin hazırlar.**

1829



Carl Gustav Jacob Jacobi **eliptik fonksiyonlar** konusundaki araştırmasıyla matematik ve fizik adına **önemli birer adım** atar.

1829–32

Öklit'in 2000 yıllık **paralellik beliti** problemini János Bolyai ve Nicolai Lobachevsky çözüme kavuştururlar. Aynı ikili paralellik belitine **uymayan hiperbolik geometrinin geçerliliğini** ispatlar.

1832



Polinomlarla ilgili araştırmasında destek almak üzere **grup kuramını geliştiren** Évariste Galois 20 yaşında hayata veda eder.

1837

Belirli bir zaman zarfında **bir olayın meydana gelme sayısının** modellenmesinde halen kullanılmakta olan **Poisson dağılımı kanıtlanır.**

---

19. yüzyılda matematikte kaydedilen ilerlemeler hız kazanıyor, bilim ve matematik artık saygın birer akademik araştırma alanı oluyordu. Sanayi Devriminin yayılması ve "Devrim Yılı" olarak nitelendirilen 1848'de köhnemiş imparatorluklarda yükselişe geçen milliyetçilik, evrenin işleyişini din veya felsefe aracılığıyla değil yeniden bilimsel açıdan anlamaya yönelik bir dürtüyü beraberinde getirdi. Mesela Pierre-Simon Laplace kalkülüsün kuramlarını gök mekaniğine uyguladı. Bir nevi bilimsel belirlenimcilik önerisi sunup, hareketli parçacıklarla ilgili uygun bilgilere sahip olmak suretiyle evrendeki her şeyin davranışının öngörülebileceğini söyledi.

19. yüzyıl matematiğinin başka bir belirgin özelliği de kuramsal boyuta dönük eğilimdeki artıştı. Bu eğilimi besleyen, pek çok meslektaşının matematikçilerin en büyüğü addettiği Carl Friedrich Gauss'un etkili çalışmasıydı. Gauss cebir, geometri ve sayı kuramı alanlarına katkısıyla adını taşıyan Gauss dağılımı, Gauss fonksiyonu, Gauss eğriliği ve Gauss hata eğrisi gibi kavramlarıyla yüzyılın ilk yarısının büyük bölümünde matematiğe yön verdi.

Yeni alanlar

Gauss 19. yüzyıl matematiğindeki devrim ortamını kusursuzca simgeleyen Öklitçi olmayan geometrinin de öncülerindendi. Bu konuyu kaldığı yerden alan Nicolai Lobachevsky ve János Bolyai hiperbolik geometri ve eğri uzay kuramlarını birbirlerinden bağımsız olarak geliştirerek Öklit'in paralellik beliti problemini çözdüler. Böylece yepyeni bir geometri yaklaşımı açığa çıktı; henüz olgunlaşma çağındaki topoloji alanının önünü açan hem bu yaklaşım hem de William Hamilton'ın dördeyleri keşfedip üçten fazla boyutu olanaklı kılmasıydı.

Topolojideki belki de en çok tanınan öncülerden August Möbius yalnızca bir kenarlı ve iki boyutlu bir yüzey olan sıra dışı Möbius şeridinin mucidiydi. Bernhard Riemann'sa çoklu boyutlardaki farklı geometri türlerini belirleyip tanımlarını çıkararak Öklitçi olmayan geometriyi daha da ileri taşıdı. Riemann araştırmalarını geometriyle sınırlı tutmadı. Kalkülüs araştırmalarının yanı sıra Gauss'un izinden giderek masaya yatırdığı sayı kura-

1843

William Hamilton sonraki yüzyılın **teknolojik ilerlemelerinde önemli rol oynayacak dördeyler** kavramını geliştirir.

1844

Eugène **Catalan** pozitif tamsayıların kuvvetleriyle ilgili **kestirimini ortaya atar.** Bu kestirim 150 yıldan uzun bir süredir ispatlanmamıştır.

1847

George Boole **matematiksel mantık** buluşunu **cebir üzerine temellendirir.**

1850

James Joseph Sylvester **"matris"** terimini icat eder.

1858

August Ferdinand Möbius ve Johann Listing **Möbius şeridinin** matematiksel **özelliklerini** araştırır.

1859

Şu ana dek ispatlanamayan **Riemann varsayımı ileri sürülür.**

1874

Sonsuzluk için matematiksel bir hassasiyet sağlayan **ilk matematikçi** Georg Cantor olur.

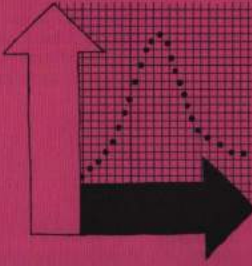
mına da önemli katkılar yaptı. Karmaşık sayılarla ilgili Riemann zeta fonksiyonundan türetilen Riemann varsayımı hâlâ çözülemedi. Georg Cantor'un kümeler kuramını yaratması ve "sonsuzlukların sonsuzluğu" kavramını tanımlaması, Eugène Catalan'ın pozitif tamsayıların kuvvetleri hakkındaki kestirimi ve Gustav Jacob Jacobi'nin eliptik fonksiyonların sayı kuramına uygulanması yönündeki önerisi o dönemde sayı kuramında yapılan diğer kayda değer keşiflerdendi.

Riemann gibi Jacobi de çok yönlülüğüyle matematiğin farklı alanları arasında yeni yollarla bağlantı kuruyordu. 19. yüzyılda gitgide soyutlaşan bir diğer matematik alanı olan cebir, başlıca ilgi alanıydı. Büyümekte olan soyut cebir alanının zeminini hazırlayansa, erken yaşta ölmesine karşın, polinom denklemleri çözmeye yönelik genel bir cebirsel yöntemi tespit etmeye çalıştığı sırada grup kuramını da geliştiren Évariste Galois'ydı.

Yeni teknolojiler

Bu dönemde matematiğin tamamı safi kuramsal değildi, üstelik soyut kavramların bazılarına çok geçmeden nispeten daha uygulamaya dayalı kullanım alanları bulundu. Örneğin Siméon Poisson olasılık kuramı alanındaki ana kavramlardan biri olan Piosson dağılımı gibi fikirleri geliştirmek için elindeki soyut matematik bilgilerini kullandı. Diğer yandan Charles Babbage uygulama tarafından gelen hassas ve hızlı bir hesaplama aracı talebini, kendisine ait "Fark Makinesi" adlı mekanik hesap aletiyle karşılayarak bilgisayarların icadı için gereken altyapıyı sağladı. Arkasından, Babbage'ın araştırmalarından bulduğu ilhamla, Ada Lovelace, modern bilgisayar algoritmalarının bir atasını zihninde tasarladı.

Aynı zaman zarfında, gelecekteki teknolojik ilerlemeler için büyük anlam taşıyan başka gelişmeler de yaşanıyordu matematikte. Cebri başlangıç noktası alan George Boole, ikili sistem esasına dayanan ve VE, VEYA ve DEĞİL işleçlerinin kullanıldığı bir mantık biçimini kurdu. Bu kavramlar modern matematiksel mantığın temeli haline geldi ve daha da önemlisi, neredeyse yüzyıl sonra bilgisayarlarda kullanılacak dil bu sayede ufukta gözüktü. ■



KARMAŞIK SAYILAR BİR DÜZLEMDEKİ KOORDİNATLARDIR

KARMAŞIK DÜZLEM

KISACA

KİŞİ
Jean-Robert Argand
(1768–1822)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE

1545 İtalyan bilgin Gerolamo *Ars Magna* yapıtında üçüncü derece denklemlerin çözümünde negatif karekökleri kullanır.

1637 Fransız filozof ve matematikçi René Descartes cebirsel ifadeleri bir kafesteki koordinatlar olarak göstermenin bir yolunu bulur.

SONRA

1843 İrlandalı matematikçi William Hamilton karmaşık düzleme iki sanal birim daha eklemek suretiyle dördeyleri (dört boyutlu uzayda gösterilen ifadeler) yaratır.

1859 Bernhard Riemann karmaşık fonksiyonlara yönelik analizlerde yardım almak için, iki karmaşık düzlemi birleştirip dört boyutlu bir yüzey üretir.

Bazı denklemler **karmaşık sayılar** kullanılmadan **çözülemez.**

Karmaşık sayıların **iki bileşeni** vardır: bir **gerçel sayı** ve bir **sanal sayı.**

Gerçel sayılar (–1, 0, 1 vb.) geleneksel olarak yatay bir sayı doğrusu üzerinde ifade edilir.

Sanal sayılar sayı doğrusuna dik bir doğrunun üzerine işaretlenebilir; bu iki doğru *x* ve *y* eskenlerini oluşturur.

Böylece gerçel sayıların *x* ekseninde, sanal sayılarınsa *y* ekseninde gösterildiği bir karmaşık sayılar düzlemi meydana gelir.

Matematikçiler yüzyıllarca şüpheyle baktıkları negatif sayılar kavramını nihayet 1700'lü yıllarda sanal sayıları cebirde kullandıklarında benimsediler. İsviçre doğumlu matematikçi Jean-Robert Argand'ın 1806 yılında sunduğu önemli katkı, (bir gerçel ve bir sanal bileşenden oluşan) karmaşık sayıları iki eksenin meydana getirdiği bir düzlemde (gerçel sayılar için *x* ve sanal sayılar için *y*) göstermekti. Bu karmaşık düzlemle, karmaşık sayıların ayırt

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–05 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Koordinatlar 144–51 ▪ Cebrin temel teoremi 204–09

> Bilim ve teknolojinin ancak çok küçük bir kısmı karmaşık sayılara bağlı olmayabilir.
>
> **Keith Devlin**
> **İngiliz matematikçi**

edici özelliklerine dair ilk geometrik yorum elde edildi.

Cebirsel kökler

Sanal sayılar 16. yüzyılda Gerolamo Cardano ve Niccolò Fontana Tartaglia gibi İtalyan matematikçiler, üçüncü derece denklemleri çözmek için negatif bir sayının kareköküne ihtiyaç olduğunu buldular. Bir gerçel sayının karesi negatif olamayacağı (her gerçel sayı kendisiyle çarpıldığında sonuç pozitiftir) için, $\sqrt{-1}$'i gerçel sayılardan farklı işleyen yeni bir birim olarak ele almaya karar verdiler. Leonhard Euler, cebrin temel teoremini (CTT) ispatlama girişimlerinde, sanal birimi ($\sqrt{-1}$) simgelemek için ilk önce i'yi kullandı. Bu teoreme göre, derecesi n olan polinom denklemlerin kök sayısı n'dir. Tek bir değişkenden (mesela x) ve gerçel katsayılardan (değişkenlerle çarpılan sayılar) oluşan bir cebirsel ifadede en büyük kuvvet x^2 ise, ifadenin derecesi ikidir ve iki kökü vardır; kökler, x'in yerine yazıldığında polinomun sıfıra eşit olduğu değerleridir. Gelgelelim, x bir gerçel sayıysa, $x^2 + 1$ gibi basit görünen çoğu polinom sıfıra eşit olmaz. $x^2 + 1$; x ve y eksenlerinden oluşan bir grafikte gösterildiğinde, baş noktadan, yani (0,0) noktasından, geçmeyen muntazam bir eğri ortaya çıkar. CTT'nin $x^2 + 1$'de işe yaraması için, Gauss ve diğerleri, gerçel sayılarla sanal sayıları bir araya getirerek yarattıkları karmaşık sayıları kullandılar. Esas itibariyle tüm sayılar karmaşıktır. Örneğin 1 gerçel sayısı $1 + 0i$ karmaşık sayısıdır; i sayısıysa $0 + i$'dir. $x^2 + 1$ denklemi, x i veya $-i$ olduğunda sıfıra eşit olabilir.

Argand'ın keşfi

Argand karmaşık sayıları grafikte göstermeye başlayınca daha büyük kuvvetleri alındığında i sanal sayısının büyümediğini keşfetti. Aksine, bu sayı, sonsuza dek yinelelen dört adımlık bir örüntüyü takip eder: $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$, $i^4 = 1$; $i^5 = i$ vb. Karmaşık düzlemde bu görselleştirilebilir. Gerçel sayılar sanal sayılarla çarpıldığında karmaşık düzlemde 90° açılı dönüşler ortaya çıkar. Bu suretle, $1 \times i = i$'dir; i, x gerçel sayı ekseninde değil y sanal eksenindedir. i ile çarpma işlemine devam edildiği takdirde 90° açılı dönüşler de devam eder; her dört çarpma işleminde başlangıç noktasına geri gelinmesinin sebebi budur.



Bir Argand diyagramında, x ve y eksenleri aracılığıyla gerçel sayılar ve sanal sayılar temsil edilir; bunların bir araya getirilişiyle karmaşık sayılar grafikte gösterilir. Bu diyagramda iki sayı gösterilmekte: $3 + 5i$ ve $7 + 2i$.

Karmaşık sayıların grafikte gösterilişi, yani Argand diyagramları, çetrefilli polinomların çözümünü kolaylaştırır. Günümüzde karmaşık düzlem, sayı kuramı sınırlarının çok ötesindeki alanlarda da yararlanılan, etkili bir araçtır. ■

Jean-Robert Argand

Jean-Robert Argand'ın yaşamının ilk evrelerine ilişkin elimizde az bilgi vardır. 1768'de Cenevre'de dünyaya geldi. Görünüşe göre matematik üzerine örgün eğitim almadı. 1806'da Paris'e taşındı, bir kitapçı işletti ve ününü borçlu olduğu karmaşık sayıların geometrik yorumunu barındıran eserini şahsen yayımladı. (Norveçli kartograf Casper Wessel'in, benzer çizimleri 1799'da kullandığı günümüzde bilinmekte.) Argand'ın makalesi 1813'te bir matematik dergisinde yeniden yayımlandı ve ertesi yıl cebrin temel teoreminin uygun kesinlikteki ilk ispatını karmaşık düzlemi kullanarak yapmak için kullandı. Argand sekiz makale daha yayımladıktan sonra 1822'de Paris'te hayatını kaybetti.

Önemli eseri

1806 *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (Sanal Nicelikleri Geometrik Olarak Temsil Etmenin bir Yöntemi Üzerine Makale)*



DOĞA, MATEMATİKSEL KEŞİFLERİN EN BEREKETLİ KAYNAĞIDIR

FOURIER ANALİZİ

KISACA

KİŞİ
Joseph Fourier (1768–1830)

ALAN
Uygulamalı matematik

ÖNCE
1701 Fransa'da, Joseph Sauveur tellerin titreşiminde farklı boylardaki birçok dalganın aynı anda salınım yaptığını iddia eder.

1753 İsviçreli matematikçi Daniel Bernoulli bir telin titreşiminin sonsuz sayıda harmonik salınımdan oluştuğunu ortaya çıkarır.

SONRA
1965 ABD'de James Cooley ve John Tukey, Fourier analizini hızlandırabilen Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) adlı bir algoritmayı geliştirirler.

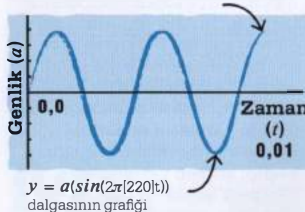
2000'ler Bilgisayarlar ve akıllı telefonlar için bir dizi konuşma tanıma programının oluşturulmasında Fourier analizi kullanılır.

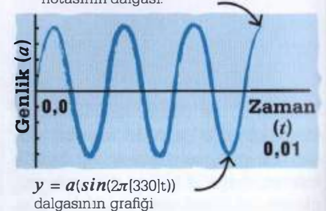
Titreşen tellerin çıkardığı sesler 2500 yıldan uzun zamandır araştırmalara konu olmuştur. MÖ yaklaşık 550'de Pisagor aynı malzemeden yapılmış, aynı gerginlikte ancak biri diğerinin iki katı uzunluğundaki iki gerili telin kısa olanı, uzun tele oranla iki kat daha yüksek frekansla titreştiğini ve bu sebeple sonuç olarak üretilen notaların bir oktav ayrık olduğunu keşfetti.

İki yüzyıl sonra Aristoteles, sesin havada dalgalar halinde ilerlediğini iddia etti etmesine ama öte yandan tiz seslerin pes seslerden daha hızlı ilerlediği düşüncesi hatalıydı. 17. yüzyılda Galileo seslerin titreşimlerden kaynaklandığını fark etti: Titreşimlerin frekansı ne kadar yüksekse algıladığımız sesin perdesi de o kadar yüksekti.

Isı ve harmoni

17. yüzyılın sonunda, aralarında Joseph Sauveur'un da bulunduğu fizikçiler gerili tellerdeki dalgalar ile bu dalgalardan kaynaklanan seslerin perde ve frekansı arasındaki ilişki üzerine yürüttükleri araştırmalarında büyük adımlar atıyorlardı. Matematikçiler her telin esas frekanstan (telin en





Sesler karmaşık bir ton silsilesinden meydana gelir. Salt tonlar Fourier analiziyle birbirlerinden ayırt edilebilir ve grafikte sinüs dalgaları şeklinde gösterilebilir. Tonların frekans ve genliği olur. Frekans perdeyi, genlikse genişliği belirler.

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Bessel fonksiyonları 221 ▪ Eliptik fonksiyonlar 226–27 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Langlands Programı 302–03

Joseph Fourier



Jean-Baptiste Joseph Fourier 1768'de Fransa'nın Auxerre şehrinde doğdu. Bir terzinin oğlu olan Fourier gittiği askeri okulda matematiğe duyduğu büyük ilginin sonucunda ileride başarılı bir matematik öğretmeni oldu.

Fourier'nin kariyeri, yaşadığı iki tutuklanma hadisesiyle (ilkinde Fransız Devrimini eleştirdiği, ikincisinde desteklediği gerekçesiyle) sekteye uğradı ancak 1798'de Napolyon'un Mısır'a giren ordusuna diplomat olarak eşlik etti. Bunun üzerine Napolyon onu baron, daha sonra da kont ilan etti. 1815'te Napolyon iktidardan düşünce Fourier, Sen İstatistik Merkezinin yöneticilik koltuğuna oturmak üzere Paris'e taşındı. Burada, Fourier serisi (seslere ayırt edici özelliklerini veren bir sinüs dalgası serisi) üzerine çalışmasını da içeren matematiksel fizik araştırmalarını sürdürdü. 1822'de Fourier, Fransız Bilimler Akademisinin sekreterliğine getirildi ve 1830'da hayatını kaybedene dek bu makamı işgal etti. Eyfel Kulesine adı kazınan 72 bilim insanından biri Fourier'dir.

Önemli eseri

1822 *Théorie analytique de la chaleur (Isının Analitik Kuramı)*

düşük doğal frekansı) itibaren harmonik frekansları (esas frekansın çift katları) da içine alan potansiyel olarak sonsuz bir titreşim silsilesini destekleyeceğini araştırmalarında gösterdiler. Tek bir perdenin salt tonunu, sinüs dalgası denen düzgün ve tekrarlayan bir salınım üretir (bkz. grafik). Bir çalgı aletinin ses kalitesi esas itibariyle sesteki harmoniklerin sayısı ve göreli şiddetlerinden ya da harmonik içeriğinden ileri gelir. Sonuç, girişim içerisindeki çeşitli dalgalardır.

Joseph Fourier ısının katı bir cisim içerisinde nasıl yayındığının masaya yatırıldığı problemi çözmeye çalışıyordu. Isı kaynağıyla bir cismin bir kenarından ısı verildikten sonraki bir anda, cismin içerisinde kalan bir konumdaki sıcaklığın hesaplanması olanağını sunan bir yaklaşımı geliştirdi.

Fourier'nin ısı dağılımı araştırmaları, ne kadar karmaşık olursa olsun bir dalga biçiminin, onu oluşturan sinüs dalgalarına ayrıştırılabileceğini (günümüzde Fourier analizi olarak anılan işlem) gösterdi. Işınım biçimindeki ısı bir dalga olduğundan Fourier'nin ısı dağılımı hakkındaki keşifleri ses araştırmalarında uygulamaları mevcuttu. Bir ses dalgası onu oluşturan sinüs dalgalarının genliklerine bakılarak anlaşılabilir. Bunlar kimi zaman harmonik spektrum olarak değinilen bir sayı öbeğidir.

Dijital dosya sıkıştırma, MRI taraması analizi, konuşma tanıma yazılımları, müzikal perde düzeltme yazılımları ve gezegen atmosferlerinin bileşiminin belirlenmesi gibi pek çok uygulamada Fourier analizi günümüzde önemli yer tutmakta. ▪



Malzemelerin titreşimine uygulanan Fourier analizi sayesinde mühendisler, tipik bir depremden farklı rezonans frekanslarına sahip binalar inşa etmek suretiyle 2017'de Mexico City'dekine benzer hasarların meydana gelmesinin önüne geçebiliyorlar.



EVRENDEKİ HER PARÇACIĞIN KONUMUNU BİLEN KÜÇÜK ŞEYTAN

LAPLACE'IN ŞEYTANI

KISACA

KİŞİ
Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

ALAN
Matematik felsefesi

ÖNCE
1665 Isaac Newton düşüş halindeki cisimlerin hareketini ve diğer karmaşık mekanik sistemleri açıklayabilmek için kalkülüsü geliştirir.

SONRA
1872 Ludwig Boltzmann bir sistemin termodinamiğinde sonuç itibariyle nasıl daima entropi artışı yaşandığını göstermek için istatistiksel mekanikten yararlanır.

1963 Edward Lorenz, başlangıç parametrelerinde yapılan her ufak değişikliğin kaotik sonuçlar doğurduğu bir model olan Lorenz çekicisinin tanımını yapar

2008 Amerikalı matematikçi David Wolpert, "aklı" bir bilgisayar olarak ele alıp Laplace'ın şeytanını çürütür.

Matematik ve bilim ile felsefe ve siyaseti bir araya getiren Fransız matematikçi Pierre-Simon Laplace, günümüzde Laplace'ın şeytanı olarak bilinen düşünce deneyini 1814'te takdim etti. Bizzat Laplace'ın hiç sarf etmediği "şeytan" sözcüğü, sonraları matematikçilerin tanrı mertebesine koyduğu doğaüstü bir varlığı çağrıştıran çarpıtılmış anlatılara konu edildi.

Laplace, evrendeki tüm atomların hareketini analiz edip bu atomların gelecekteki güzergâhlarını kesin olarak tahmin edebilecek bir aklı hayal etti. Yürüttüğü deneyde gelecekteki tüm olayları geçmişteki nedenlerin belirlediği felsefi bir kavram olan belirlenimciliği irdeledi.



Mekanik analiz

Isaac Newton'ın hareket yasalarını esas alan ve hareketli cisimlerin davranışını açıklayan matematik alanı klasik mekanik Laplace'ı etkiledi. Newtoncı evrende, atomlar (hatta ışık parçacıkları da) hareket yasalarına uyar ve bir güzergâhlar keşmekeşi içerisinde bir o yana bir bu yana sıçrar. Laplace'ın "aklı", bu atomların tüm hareketlerini yakalayıp analiz etme yeteneğine sahipti; mevcut hareketlerden yararlanarak, geçmişteki hareketleri tespit, gelecektekileri tahmin edecek bir formülü yaratacaktı.

Laplace'ın kuramı şaşırtıcı bir felsefi sonuca çıkıyordu. Ancak ve ancak evren öngörülebilir, mekanik bir yolu takip ettiği takdirde bu kuramın işlemesi mümkündür. Evren böyle bir yolu takip ettiğinde galaksilerin dönüşünden düşünceleri denetleyen sinir hücrelerindeki ufacık atomlara varana kadar her şeyin gelecekteki ayrıntılı bir hari-

Güneş sistemindeki gökcisimlerinin hareketini gösteren "saat gibi işleyen bir evren" olarak tanımlanabilecek güneş sistemi modeli (*orrery*), Newton'ın evrensel kütleçekim kuramı yayımlandıktan sonra popüler bir aygıt haline geldi.

Ayrıca bkz. Olasılık 162–65 ■ Kalkülüs 168–75 ■ Newton'ın hareket yasaları 182–83 ■ Kelebek etkisi 294–99

Klasik mekanikten (kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin hareketlerinden) yararlanarak **evrendeki her parçacığın davranışını** modellemek **mümkün** müdür?

Evet, yani **evren belirlenimcidir.**

Gelecek zaten **belirlenmiştir** ve **eylemlerimiz denetimimizde değildir.**

Laplace'ın şeytanı **geleceği kesin bir şekilde tahmin edebilir.**

Hayır, yani **evren olasılıkçıdır.**

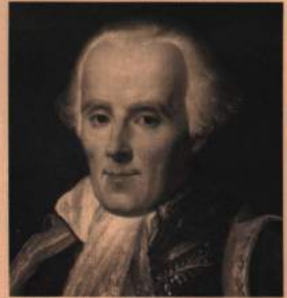
Gelecek yazılmamıştır ve **ona etki etmek elimizdedir.**

Laplace'ın şeytanı **var olamaz.**

tam çıkarılabilir. İnsanın yaşamının, ölüme kadar her yönüyle önceden belirlenmiş olduğu anlamına gelirdi bu; insanın özgür iradesi yoktur ve düşünce ve eylemlerinde etken değildir.

Şans ve istatistik

Gerçekliğe dair böylesi ağır bir imgenin yaratılmasında her ne kadar matematikten yardım alındıysa da, bu imge yine matematiğin yardımıyla gözden çıkarıldı. 1850'lerde ısı ve enerjiyi inceleyen bilim dalı (termodinamik) yeni bir modelin gelişini müjdeledi: atomların evreni. Bunu becerebilmek için maddenin içindeki atom ve moleküllerin hareketinin açıklanması gerekiyordu. Klasik mekanik bu görev için yeterli değildi. Fizikçiler bunun yerine İsviçreli matematikçi Daniel Bernoulli'nin 1738'de icat ettiği bir tekniği kullandılar. Olasılık kuramından yararlanılan bu teknikle bir uzaydaki birbirlerinden bağımsız birimlerin hareketi modelleniyordu. Avusturyalı fizikçi Ludwig Boltzmann elden geçirip geliştirdikten sonra bu teknik istatistiksel mekanik adıyla bilinirlik kazandı. Atomların dünyasını rasgele şansla açıklaması bakımından Laplace'ın şeytanındaki mekanik belirlenimcilikle çelişiyordu. 1920'li yıllarda, belirsizlik esasına bağlı kuantum fiziğinin geliştirilmesiyle, olasılıkçı evren kavramı pekiştirildi. ■



Pierre-Simon Laplace

Aristokrat bir ailenin çocuğu olarak 1749'da dünyaya gelen Laplace birçok arkadaşının öldürüldüğü Fransız Devrimini ve Terör Dönemini sağ atlattı. 1799'da Napolyon Bonaparte'ın yönetiminde İç İşleri Bakanı oldu ancak fazlasıyla analitik ve etkisiz olması nedeniyle yalnızca altı hafta sonra görevden alındı. Daha sonra Laplace, Bourbon'ların (Fransız kraliyet ailesi) safına geçti ve monarşi yeniden kurulunca ilk unvanı kendisine ödül olarak geri verildi.

Laplace'ın şeytanı, fizik ve astronomiyi de içine alan bir kariyerin bir ayrıntısıydı. Kara delik kavramının var olduğunu ilk iddia eden, Laplace'tı. Klasik mekanik, olasılık kuramı ve cebirsel dönüşümlerde matematiğe çok katkı sundu. Laplace 1827'de Paris'te hayata gözlerini yumdu.

Önemli eserleri

1798–1828 *Gök Mekaniği*
1812 *Analitik Olasılık Kuramı*
1814 *Olasılıklar Üzerine Felsefi Bir Deneme*



NE KADAR OLASI?

POISSON DAĞILIMI

KISACA

KİŞİ
Siméon Poisson (1781–1840)

ALAN
Olasılık

ÖNCE
1662 İngiliz tüccar John Graunt, yayımladığı *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality* (*Ölüm Oranı Raporu Hakkında Doğal ve Siyasi Gözlemler*) ile istatistiği dünyaya getirir.

1711 Abraham de Moivre, *De Mensura Sortis* (*Şansın Ölçümü Üzerine*) başlıklı yapıtında sonraları Poisson dağılımı olarak bilinecek kavramı açıklar.

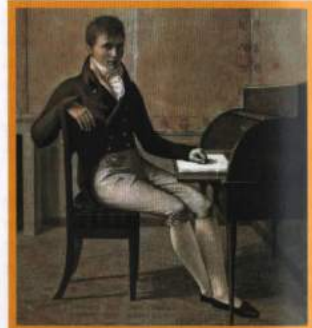
SONRA
1898 Rus istatistikçi Ladislaus Bortkiewicz at çiftesiyle ölen Prusyalı askerlerin sayısını incelemek için Poisson dağılımını kullanır.

1946 İngiliz istatistikçi R. D. Clarke, V1 ve V2 füzelerinin Londra'da bıraktığı etkilerin örüntüleri hakkında Poisson dağılımını temel alan bir çalışma yayınlar.

İstatistikte Poisson dağılımı, gelişigüzel meydana gelen bir olayın, verilen bir zaman aralığı veya uzayda kaç defa yaşandığını modellemek için kullanılır. Siméon Poisson'un 1837'de tanıttığı ve Abraham de Moivre'ın çalışmasını esas alan istatistik, çeşitli olasılıklar üzerine tahmin yürütülmesine yardımcı olabiliyor.

Kafesinde kaç adet kumpir siparişi verileceğini sayısını tahmin etmek isteyen bir şef örneğini ele alalım. Şefin her gün kaç adet patatesi önceden pişirmesi gerektiğine karar vermesi gerekiyor. Günlük ortalama sipariş sayısını biliyor, n en az yüzde 90 olasılıkla talebi karşılayacak bir sayı olmak üzere, n adet kumpir hazırlamaya karar veriyor.

Poisson dağılımını kullanarak n'yi hesaplayabilmek için birtakım koşullar karşılanmalıdır: Verilen siparişler gelişigüzel, ayrı ayrı ve yeknesak olmalıdır (ortalamada, her gün aynı sayıda patates siparişi verilir). Bu koşullar sağlanıyorsa, şef n'nin değerini (kaç patatesi önceden fırına vereceğini) bulabilir. Önemli olan, birim uzay veya zaman başına ortalama olay sayısıdır (lambda, yani λ). $\lambda = 4$ (gün başına ortalama kumpir siparişi sayısı) ve herhangi bir günde verilen kumpir siparişi sayısı B ise, B'nin 6'dan küçük veya eşit olması olasılığı yüzde 89'dur; B'nin 7'den küçük veya eşit olması olasılığıysa yüzde 95'tir. Şef talebin karşılanacağından en az yüzde 90 emin olmalıdır; dolayısıyla burada n, 7 olur. ■



Siméon Poisson her ne kadar Poisson dağılımını bulan kişi olarak bilinse de bu, Stigler Yasasının bir örneği olabilir bu: Hiçbir bilimsel keşif gerçek kâşifine mal edilmez.

Ayrıca bkz. Olasılık 162–65 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Normal dağılım 192–93 ▪ Modern istatistiğin doğuşu 268–71



UYGULAMALI MATEMATİKTE OLMAZSA OLMAZ BİR ARAÇ

BESSEL FONKSİYONLARI

KISACA

KİŞİ
Friedrich Wilhelm Bessel
(1784–1846)

ALAN
Uygulamalı geometri

ÖNCE
1609 Johannes Kepler gezegenlerin yörüngelerinin elips şeklinde olduğunu gösterir.

1732 Daniel Bernoulli sallanan bir zincirin titreşimlerini araştırmak için daha sonra Bessel fonksiyonları olarak bilinecek fonksiyonları kullanır.

1764 Leonhard Euler zar titreşimi analizinde sonraları Bessel fonksiyonları olduğu anlaşılan fonksiyonları kullanır.

SONRA
1922 İngiliz matematikçi George Watson büyük yankı uyandıran *A treatise on the theory of Bessel functions* (*Bessel Fonksiyonları Kuramı Üzerine Bir İnceleme*) yapıtını yazar.

19. yüzyıl başlarında Alman matematikçi ve astronom Friedrich Wilhelm Bessel, Bessel denklemi denen kayda değer bir diferansiyel denklemin çözümlerini buldu. Bu fonksiyonları (çözümleri) 1824 yılında sistemli bir şekilde inceledi. Günümüzde Bessel fonksiyonları olarak bilinen bu fonksiyonlar bilim insanları ve mühendisler için kullanışlıdır. Kablolarda ilerleyen elektromanyetik dalgalar gibi dalgaların analizi için esastırlar. Ayrıca, ışığın kırınımının, elektrik veya ışığın katı bir silindirin içinde akışının ve akışkanların hareketinin açıklamasında kullanılırlar.

Gezegenlerin hareketi

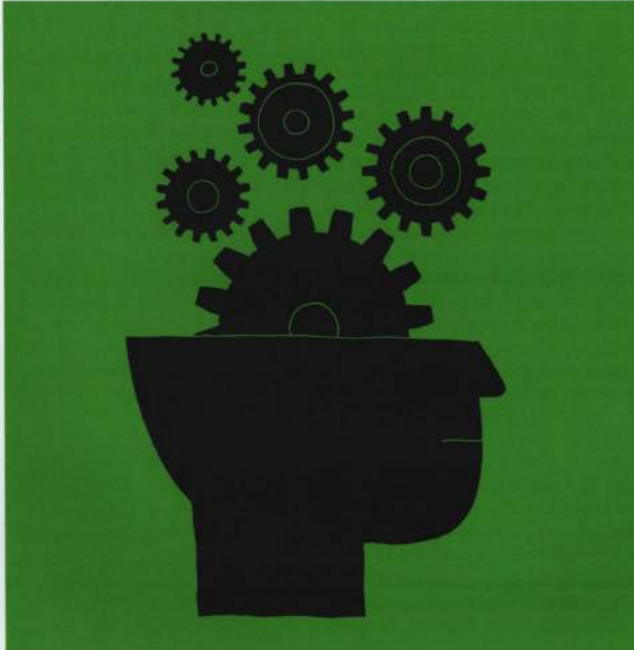
Bessel fonksiyonlarının kökeni, Alman matematikçi ve astronom Johannes Kepler'in gezegenlerin hareketi üzerine 17. yüzyıl başlarında yürüttüğü çalışmaya dayanır. Gözlemleri kılı kırk yararcasına analiz etmesinin sonucunda, gezegenlerin güneşin etrafındaki yörüngelerinin dairesel değil eliptik olduğunun farkına vardı ve gezegenlere hareketine ilişkin üç temel kuralı açıkladı. Daha sonra matematikçiler Bessel fonksiyonlarından yardım alarak çeşitli alanlarda önemli buluşlara imza attılar. Daniel Bernoulli bir sarkacın salınımları için birtakım denklemler bulurken diğer tarafta Leonhard Euler gergin bir zarın titreşimini karşılayan denklemler geliştirdi. Buna ek olarak, gezegen veya uydu gibi bir cismin, iki başka cismin kütleçekimsel alanlarının etkisi altındayken sergilediği hareketle ilgili "üç-cisim problemine" çözüm bulmayı amaçlayan Euler ve diğerleri, Bessel fonksiyonlarından yararlandılar. ■

> Uygulamaları olmasına karşın Bessel fonksiyonları enfes fonksiyonlardır.
> **E. W. Hobson**
> **İngiliz matematikçi**

Ayrıca bkz. Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Fourier analizi 216–17

BİLİMİN GELECEKTEKİ YÖNÜNÜ TAYİN EDECEK

MEKANİK BİLGİSAYAR



KISACA

KİŞİLER
Charles Babbage (1791–1871), **Ada Lovelace** (1815–52)

ALAN
Bilgisayar bilimi

ÖNCE
1617 İskoç matematikçi John Napier elle çalıştırılan bir hesap aleti icat eder.

1642–44 Fransa'da Blaise Pascal bir hesap makinesi tasarlar

1801 Fransız dokumacı Joseph-Marie Jacquard delgili kartla idare edilen bir dokuma tezgâhını programlanabilir ilk makine sıfatıyla sergiler.

SONRA
1944 İngiliz şifre kırma uzmanı Max Newman ilk dijital, elektronik ve programlanabilir bilgisayar olan Colossus'u inşa eder.

İngiliz matematikçi ve mucit Charles Babbage, mekanik hesaplama araçları ve "düşünen" makinelerle ilgili iki fikriyle, bilgisayar çağını yüzyıldan uzun bir süre önce öngördü. Pirinçten dişli çarklar ve çubuklar vasıtasıyla otomatik işleyen bir hesap makinesi olan ilk düşününe Fark Makinesi adını verdi. Babbage makinenin ancak bir kısmını inşa edebilmesine karşın bu kısmi yapı bile karmaşık hesaplamaları çok kısa sürelerde hassas bir şekilde işleme koyabiliyordu.

İkinci ve daha iddialı düşünü, Analitik Makineydi. Hiç inşa edilmeyen bu makine yeni problemlere çözüm bulacak ve bunları insan müdahalesi olmadan çözecek bir

Ayrıca bkz. İkili sayılar 176–77 ▪ Matrisler 238–41 ▪ Sonsuz maymun teoremi 278–79 ▪ Turing makinesi 284–89 ▪ Bilişim kuramı 291 ▪ Dört renk teoremi 312–13



Charles Babbage'ı mekanik bir hesaplama aygıtı üstünde çalışmak üzere kolları sıvamaya iten, güven telkin etmeyen düşük ücretli çalışanların çıkardığı astronomik tablolarda bulduğu hatalardı.

makine olarak hayal edilmişti. Genç ve parlak matematikçi Ada Lovelace projeye çok önemli katkılarda bulundu. Lovelace bilgisayar programlamayla ilgili başlıca hususların çoğunu önceden sezdi ve makineyle her tür simgenin nasıl analiz edilebileceğini öngördü.

Otomatik hesaplama

17. ve 18. yüzyıllarda Gottfried Leibniz ve Blaise Pascal mekanik hesaplama araçları ürettiler ama bunların hem gücü kısıtlıydı hem de her aşamada insan girdisi gerektirdiğinden hataya meyilliydi. Babbage'ın aklına, otomatik işleyişiyle insan kaynaklı hataları bertaraf eden bir hesap makinesi üretme düşüncesi geldi. Karmaşık çarpma ve bölme işlemlerinin, iç içe geçmiş çok sayıda dişli çark sayesinde toplama ve çıkarma işlemlerine (farklara) indirgenmesine olanak tanıdığından makinesine Fark Makinesi adını verdi. Makineyle sonuçların çıktısı dahi alınabiliyordu.

Daha önce hiçbir hesap aracında dörtten fazla basamağı olan sayılarla çalışılmamıştı. Oysa Fark Makinesi 25.000'in üzerinde hareketli parçayla basamak sayısı 50'ye varan sayılarla baş edecek şekilde tasarlanmıştı.

Makinenin hesap işlemleri, her biri bir rakamı temsil eden sütunlarla ayarlanıyordu. Sütunlar 0'dan 9'a kadar rakamlarla işaretlenmiş dişli çarklardan oluşuyordu. Sütunlardaki dişli çarklar döndürülüp doğru rakama getiriliyor ve bu suretle sayılar belirleniyordu. Makine bunun üzerine hesaplamayı baştan sona otomatik olarak yürütüyordu.

Babbage sadece yedi sayı sütunu içermesine karşın olağanüstü bir hesaplama gücüne sahip, küçük ve işleyen birkaç model inşa etti. 1823 yılında İngiliz hükümetini, makine sayesinde daha hassas resmi tabloların çok daha az zaman ve maliyetle üretilebileceğini vadedip ilgili projeye kısmi bir mali destek sağlamaya ikna etmeyi bildi. Halbuki makinenin tamamının geliştirilmesi son

> Bilgi birikimindeki her artış ve icat edilen her yeni araç insan emeğinden tasarruf edilir.
> **Charles Babbage**

Fark Makinesi, kullandığı **temel mantıkla** şunları yapabiliyordu:

- **Aritmetik işlemlerin** tamamını: +, ×, −, ÷
- Aritmetik işlemlerin tüm **dizilişlerini**.
- **Yineleme (iterasyon):** aritmetik işlemlerin her bir dizilişinin tekrarlanması.

Analitik Makine, inşa edilse, bütün bunların yanı sıra şunu da yapabilecekti:

Koşullu yinelemeler: Eğer P, aritmetik bir işlem ve T de bir testse, o halde makine T başarısız olana dek P için yineleme uygular.



Babbage'ın 1832'de ürettiği Fark Makinesi No. 1 numunesinin, dişli çarkları numaralandırılmış üç sütunu vardır. Sütunların ikisi hesaplama, biri sonuç içindir.

derece pahalıya geldi ve dönemin teknoloji olanaklarının sınırlarını zorluyordu. 20 yıllık çalışmanın ardından devlet 1842'de projeyi iptal etti.

Bu sırada Babbage yaptığı çizim ve hesaplamalarla Analitik Makine düşünü üzerinde de çalışmaktaydı. Aldığı notlardan anlaşılan o ki, makine inşa edilse günümüzdeki bilgisayarların bir benzeri olabilirdi. Merkezi işlem birimi (CPU), bellek saklama ve bütünleşik programlar dahil, modern bilgisayarların temel bileşenlerinin hemen hemen tamamını barındıran bir tasarımı vardı.

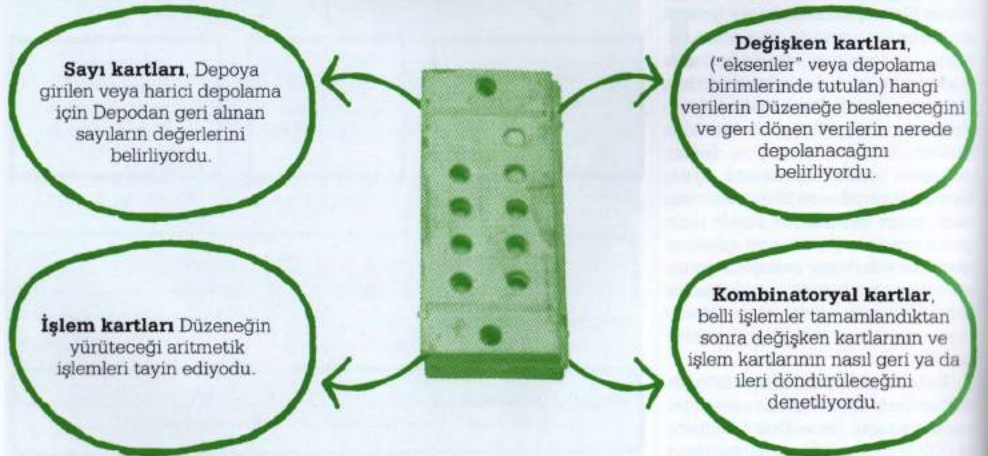
Babbage'ın karşılaştığı problemlerden biri, rakamlardan oluşan sütunları toplarken bir sonraki sütuna taşınacak sayılar konusunda ne yapacağıydı. İlk olarak, taşınacak her sayı için ayrı bir mekanizma kullandı ama bunun fazlasıyla çetrefilli olduğu ortaya çıktı. Ardından makineyi "Düzenek" (*"Mill"*) ve "Depo" (*"Store"*) olarak iki parçaya ayırdı ve böylece toplama ve taşıma işlemlerini birbirinden ayırmak mümkün hale geldi. Düzenek aritmetik işlemlerin yürütüldüğü, Depoysa sayıların işlem öncesinde tutulduğu ve ardından işlem sonrasında Düzenekten geri alındığı kısımdı. Düzenek, Babbage tipi bir bilgisayar CPU'suydu. Depoysa bilgisayarın belleğinin görevini üstleniyordu.

Bir makineye ne yapması gerektiğini söyleme (programlama) fikri, Joseph-Marie Jacquard adlı Fransız bir dokumacıdan çıkmıştı. Jacquard ürettiği dokuma tezgâhına karmaşık ipek desenleri nasıl dokuyacağını söylemek için üstüne delikler açılmış kartlar yerleştirmişti. 1836'da Babbage kendisinin de delgili kartları kullanabileceğini ve bu sayede kendi makinesini idare etmekle kalmayıp sonuçları ve hesap sıralamalarını kaydedebileceğini fark etti.

Destek çıkan bir dâhi

Babbage'ın çalışmasının en büyük destekçilerinden biri, matematikçi iş arkadaşı Ada Lovelace'ti. Lovelace, Analitik Makine hakkında, "cebirsel desenleri, tıpkı Jacquard dokuma makinesinin çiçek ve yaprakları dokuduğu gibi dokuyacağını" yazıyordu. 1832'de ergenlik çağında olan Lovela-

Analitik Makineyi programlamak için kullanılan delikli kart çeşitleri



> Analitik Makinenin iki amacı vardır. Bunların birincisi, sayıların eksiksiz bir biçimde işlenmesidir. İkincisiyse, cebirsel simgelerin eksiksiz bir biçimde işlenmesidir.
> **Charles Babbage**

ce'in, çalışma halindeki bir Fark Makinesi modelini görmesiyle büyülenmesi bir olmuştu. İtalyan mühendis Luigi Menabrea'nın Analitik Makine hakkındaki bir kitapçığını çevirmiş, çeviriye uzun uzadıya açıklayıcı notlar ilave edip 1843'te yayımlatmıştı.

Söz konusu notların çoğunda, ileride modern bilgisayarların kapsamına dahil olacak sistemleri içeriyordu. Lovelace, "G Notunda," "örtük bir fonksiyonun çözümünün, insan zekâsından veya elinden önce makine tarafından bulunabileceğini gösterecek" muhtemelen ilk bilgisayar algoritmasını anlatıyordu. Ayrıca makinenin bir dizi talimatı yinelemek (günümüzde "döngü" olarak bilinen işlem) suretiyle problem çözebileceği yönündeki görüşünü kuramsal bir çerçeveye oturttu. Lovelace'in zihninde canlandırdığı şey, bir sonraki veri kartı veya kümesi üzerinde çalışmak için tekrar tekrar başlangıç konumuna dönen bir program kartıydı (ya da bir dizi program kartıydı). Böylelikle makinenin bir doğrusal denklemler sistemini çözebileceğini ya da asal sayılardan meydana gelen kapsamlı tablolar oluşturabileceğini iddia ediyordu Lovelace. Lovelace'in, makineleri, uygulama yelpazesi geniş mekanik beyinler olarak görmesi, aldığı notlar arasında onun kavrayış gücünü belki de en iyi yansıtan düşünüydü. "Makine, elindeki sayısal nicelikleri, harf veya başka herhangi genel simgelermiş gibi, sıraya koyabilir ve birleştirebilir" sözleri, sadece sayıların değil her tür simgenin makinelerce ele alınıp işleme koyulabileceğinin farkına vardığını açığa vuruyordu. Hesaplama ve programlama arasındaki fark (ve modern bilgisayarların temelinde yatan şey) budur. Lovelace girdi niteliğinin bu tür makineleri nasıl kısıtlayacağını da öngördü. 1938'de programlanabilen bir bilgisayar (hesap makinesi değil) geliştiren Konrad Zuse muhtemelen bunu yapan ilk kişiydi.

Gecikmeli miras

Lovelace'in vakitsiz vefatı, onun Babbage'ın çalışmasını geliştirme planlarının önüne geçti. O sıralarda Babbage yorgun, hasta ve Fark Makinesi destek görmediğinden kırgındı. Söz konusu makinenin inşa edilmesi için gereken yüksek hassasiyetli mekanizma o zamanlar hiçbir mühendisin elinden gelmezdi. 1953'te yeniden yayımlanana dek büyük oranda unutulan Lovelace'in notları, şimdi her ev ve işyerinde bulunan bilgisayarların çoğu işlevini, o ve Babbage'ın önceden sezdiğini onaylar niteliktedir. ■

> (Analitik Makinenin üstünde) çalıştıkça, daha üstün bir zekâya duyduğum açlık gitgite artıyor.
> **Ada Lovelace**



Ada Lovelace

Augusta Byron adıyla 1815'te Londra'da dünyaya gelen Ada, namıdiğer Kontes Lovelace, şair Lord Byron'ın tek meşru çocuğuydu. Byron, kızının doğumundan birkaç ay sonra İngiltere'den ayrıldı ve Lovelace babasını bir daha hiç görmedi. Annesi Leydi Byron'ın matematiğe yeteneği vardı (Byron karısına "Paralelkenarların Prensesi" adını takmıştı) ve Lovelace'in de matematik okumasında ısrarcıydı.

Lovelace matematik ve dil konularındaki yetenekleriyle nam saldı. 17 yaşındayken Charles Babbage'la tanıştı ve onun çalışmalarına büyük ilgi duydu. İki yıl sonra, Lovelace Kontu William King'le evlenip üç çocuk yaptı ama buna rağmen matematik okumaya ve ona "Sayıların Büyücü Kadını" lakabını yakıştıran Babbage'ın izinden yürümeye devam etti.

Lovelace, Babbage'ın Analitik Makinesi hakkında ayrıntılı yazılar yazdı. Geleceğin programlaması hakkında çok sayıda düşüncesini açıklayarak ilk bilgisayar programcısı unvanını hak etti. Lovelace 1852'de rahim kanseri yüzünden hayatını kaybetti. Vasiyeti doğrultusunda babasının yanına gömüldü.



YENİ BİR FONKSİYON TÜRÜ

ELİPTİK FONKSİYONLAR

KISACA

KİŞİLER
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–51)

ALANLAR
Sayı kuramı, geometri

ÖNCE
1655 John Wallis, kalkülüsü eliptik bir eğrinin uzunluğuna uygular. Elde ettiği eliptik integral, sonsuz bir terimler dizisiyle tanımlanır.

1799 Carl Gauss, eliptik fonksiyonların başlıca ayırt edici özelliklerini tespit eder ancak çalışması 1841'e kadar yayımlanmaz.

1827–28 Niels Abel haberi olmadan Gauss'la aynı bulguları elde eder ve yayımlar.

SONRA
1862 Alman matematikçi Karl Weierstrass eliptik fonksiyonlar için genel bir kuram geliştirerek hem cebir hem de geometri problemlerine uygulanabileceklerini gösterir.



Elipsin "ezilmiş çember" şekli matematikteki en tanıdık eğrilerdendir. Elipslerin matematikte uzun bir geçmişi vardır. Antik Yunanların araştırmalarına koni kesitlerinden biri olarak konu edilmişlerdi. Bir koni yatay doğrultuda kesildiğinde çember, daha dik bir açıyla kesildiğinde elips (ayrıca parabol ve hiperbol denen açık eğriler) oluşur. Elips kapalı bir eğridir ve bir düzlem üzerinde iki sabit noktaya (bunların her birine odak denir) toplam uzaklığı hep aynı sayı olan tüm noktaların meydana getirdiği noktalar kümesi şeklinde tanımlanır. (Çember iki yerine bir odak noktası olan

Ayrıca bkz. Huygens'in tautochrone eğrisi 167 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–83 ▪ Kriptografi 314–17 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23

> İki genç geometricinin, eliptik fonksiyonlar kuramını iki ayrı çalışmada kayda değer ölçüde geliştirmeyi başardığını öğrendiğimde bunu hem şaşkınlık hem de memnuniyetle karşıladım.
> **Adrien-Marie Legendre**

özel bir elipstir.) 1609'da Alman astronom ve matematikçi Johannes Kepler gezegenlerin yörüngelerinin eliptik, güneşin konumunun da bu elipsin odaklarından biri olduğunu kanıtladı.

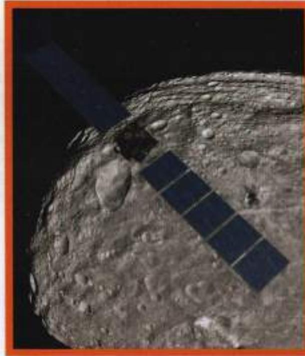
Yeni araçlar

Basit bir ses dalgasının yukarı aşağı hareketi gibi ritmik (yani periyodik) olarak değişen ya da tekrarlayan doğa olguları nasıl ki çember matematiğiyle modellenip tahmin ediliyor, elektromanyetik alanlar veya gezegenlerin yörüngesel hareketleri gibi daha karmaşık periyodik örüntüleri izleyen olgular için aynı şekilde elips matematiği kullanılmakta.

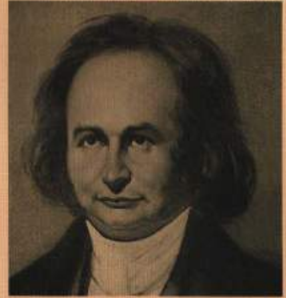
Bu araçlar, yani eliptik fonksiyonları, 17. yüzyıl matematikçileri John Wallis ve Isaac Newton İngiltere'de meydana çıkardı. Birbirinden bağımsız çalışan bu matematikçiler elipslerin yay uzunluğunu (veya bir kesitinin uzunluğunu) hesaplamanın bir yöntemini geliştirdiler. Daha sonra gelen katkılarla teknikleri gelişip eliptik fonksiyonlara dönüştü ve bu suretle, basit elipsi aşan çok çeşitli karmaşık eğriyi ve salınımlı sistemleri analiz etmenin bir yolu haline geldi.

Uygulamaları

1828'de yine birbirinden bağımsız çalışan Norveçli Neils Abel ve Alman Carl Jacobi eliptik fonksiyonların hem matematikte hem fizikte daha geniş ölçekte uygulanabildiğini gösterdi. Örneğin bu fonksiyonlar 1995 tarihli Fermat'nın son teoreminde ve en yeni açık anahtarlı kriptografi sistemlerinde karşımıza çıkar. Abel başlıca keşiflerini yaptıktan sadece birkaç ay sonra, 26 yaşında hayata veda ettiğinden, fonksiyonların bu işlevlerinin çoğunu Jacobi geliştirdi. Jacobi'nin eliptik fonksiyonları karmaşıktır ancak Alman matematikçi Karl Weierstrass 1862 yılında bunların daha basit bir tipi olan p fonksiyonunu tanıttı. P fonksiyonları klasik ve kuantum mekaniğinde kullanılıyor. ▪



Eliptik fonksiyonlar, asteroit kuşağındaki cüce gezegen Ceres'i ve Vesta asteroidini inceleyen Dawn uzay sondası gibi uzay araçlarının güzergâhlarının belirlenmesinde kullanılır.



Carl Gustav Jacob Jacobi

1804'te Prusya'nın Potsdam şehrinde dünyaya gelen Carl Gustav Jacob Jacobi ilk eğitimini dayısından aldı. Okulda öğrenebileceği ne varsa 12 yaşına geldiğinde öğrenmişti ama Berlin Üniversitesine girebilmek için 16 yaşına kadar beklemesi gerektiğinden, aradaki zaman zarfında kendi kendine matematik öğrendi. Üniversitedeki derslerin fazlasıyla basit olduğunu görünce buna devam etti. Bir yıl içerisinde mezun olup 1832'de Königsberg Üniversitesinde öğretim üyesi oldu. 1843'te hastalanıp Berlin'e dönen Jacobi'ye, Prusya Kralı orada geçirdiği süreçte destek olmak için aylık bağladı. 1848'de liberal kimliğiyle adaylığını koyduğu parlamento seçiminde yenilgiye uğramasına rağmen adaylığından rencide olan kral ona verdiği desteğini geçici olarak geri çekti. Jacobi 1851'de, henüz 46 yaşındayken, çiçek hastalığına yakalanıp hayatını kaybetti.

Önemli eseri

1829 *Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum (Eliptik Fonksiyonlar Kuramının Yeni Temelleri)*



HİÇ YOKTAN YENİ BİR DÜNYA YARATTIM

ÖKLİTÇİ OLMAYAN GEOMETRİ

KISACA

KİŞİ
János Bolyai (1802–60)

ALAN
Geometri

ÖNCE
1733 İtalya'da Öklit'in belitlerinden paralellik belitini diğer dördünden yola çıkarak ispatlamaya çalışan matematikçi Giovanni Saccheri başarısız olur.

1827 Carl Friedrich Gauss yayımladığı *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (*Eğri Yüzeylere Dair Genel Araştırmalar*) yapıtında, bir uzayın, o uzayın içerisinden anlaşılabilen "içkin eğriliğini" tanımlar

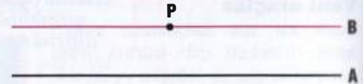
SONRA
1854 Bernhard Riemann hiperbolik geometri içeren yüzey türünü açıklar.

1915 Einstein kendisine ait genel görelilik kuramında kütleçekimi uzayzamandaki eğrilik olarak tanımlar.

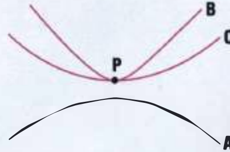
Paralelik beliti (PB), Öklit'in *Öğeler*'indeki geometri teoremlerine ulaşmak için yararlandığı beş belitin beşincisidir. PB, Öklit'in diğer belitleri kadar açık olmadığı ve bariz bir yoldan doğrulanamadığı için Antik Yunanlar arasında tartışmaya yol açtı. Halbuki geometrideki birçok temel teorem, PB olmadan ispatlanamıyordu. Sonraki 2000 yıl boyunca matematikçiler itibarlarını ortaya koyup meseleyi çözüme kavuşturmaya girişeceklerdi. MS 5. yüzyılda filozof Proklos, PB'nin diğer belitlerden türetilebilecek bir teorem olduğunu

Öklitçi geometri ve Öklitçi olmayan geometri

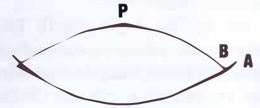
Öklitçi geometride (bkz. sağda) yüzey düz kabul edilir. Öklitçi olmayan geometri şekillerinde (bkz. aşağıda) durum böyle değildir. Hiperbolik geometride, yüzey, bir eyer gibi içe eğrilirken, eliptik yüzey bir küre gibi dışa eğrilir.



Paralellik beliti (PB), İskoç matematikçi John Playfair'in aksiyomuyla ifade edilebilir: A doğrusu ve A'nın üzerinde olmayan bir P noktası içeren verili bir düzlemde, P'den geçip A'yı kesmeyen kesin olarak bir adet B doğrusu vardır. Bu A ve B doğrualrı paraleldir.



Hiperbolik geometride, P'den geçip A çizgisini kesmeyen sonsuz sayıda çizgi (ör. B ve C) vardır. Hiperbolik geometride yüzeyler "negatif eğrilik" sergiler; tıpkı bir trompetin kalağı gibi.



Eliptik geometride mesela bir kürenin yüzeyinde, PB geçerli değildir ve P'den geçen her çizgi (ör. B) A çizgisini keser. Örneğin Yer'in meridyenleri, kutuplarda kesişen paralel çizgilerdir.

Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Tasarı geometri 154–55 ▪ Topoloji 256–59 ▪ 20. yüzyıl için 23 problem 266–67 ▪ Minkowski uzayı 274–75

> Paralellerin bilimine ilişmeyin. O kusuru geometriden ayıklamak için kolları tam sıvamıştım ki, kimsenin yolunu bulamayacağı bir karanlıkla karşılaşınca vazgeçtim.
>
> **Wolfgang Bolyai**
> **János Bolyai'nin babası**

ve bundan dolayı geçersiz sayılması gerektiğini iddia etti.

İslamiyetin Altın Çağında (8.-14. yüzyıl) matematikçiler PB'yi ispatlama denemelerinde bulundular. Çok yönlü İranlı bilgin Nasıreddin Tusi, PB'nin, her üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğunu söylemekle eşdeğer olduğunu göstermesine rağmen, PB hakkındaki tartışmalar yine de sonlanmadı. *Öğeler*'in yeni çevirilerinin Avupa'ya ulaştığı 17. yüzyılda, Giovanni Saccheri, PB doğru olmasa, bir üçgenin iç açılarının her zaman 180°'den ya küçük ya da büyük olacağını gösterdi.

19. yüzyılın başlarında, Macar János Bolyai ve Rus Nicolai Lobachevsky, PB'nin geçersiz olup Öklit'in diğer belitlerinin geçerli olduğu bir Öklitçi olmayan "hiperbolik" geometrinin (bkz. karşı sayfada) doğruluğunu birbirlerinden habersizce ispatladılar. Bolyai, "hiç yoktan başka bir evren yarattığını" iddia ediyorduysa da, sunduğu fikir o dönemde olumlu tepki almadı. Gauss fikrin doğru olduğunu teslim etti ancak iddiasına göre onu ilk kendisi keşfetmişti. Bir yüzey ya da uzayla ilgili olarak Gauss'un ürettiği "içkin eğriliği" kavramı bu evrenin kuruluşu için önemli bir araçtı ama Öklitçi olmayan geometriyi kendisinin geliştirmiş olduğuna dair yeterli delili arkasında bırakmadı. Ama her şeye rağmen evrenin Öklitçi olmayabileceği düşüncesini dikkate aldı. Peşinden Bernhard Riemann, Eugenio Beltrami, Felix Klein, David Hilbert ve diğerlerinin yaptığı atılımlar sayesinde, günümüzde Öklitçi olmayan geometri artık tuhaf algılanmıyor ve fizikçiler evrenimizin aslında düz mü (Öklitçi) yoksa eğri mi olduğu sorusuna ciddiyetle kafa yoruyorlar.

Sanatsal araştırmalar

Hiperbolik geometriye sanatta da rastlanır. Henri Poincaré'nin tasarladığı modeller, M. C. Escher'e birçok grafik yapıtında ilham verdi. Başta Daina Taimina olmak üzere bazı matematikçilerse sanat ve el sanatı tekniklerini kullanarak bu "yeni evrenleri" doğrudan doğruya kavranabilir hale getirdiler. ■



Daina Taimina'nın hiperbolik yüzeylerden oluşan kroşe modelleri, kâğıttan modellere kıyasla daha elle tutulurdur. Taimina, kroşe işleminin, geometri sezgisinin geliştirilmesine yardımcı olduğunu iddia eder.



Daina Taimina

1954'te Letonya'da dünyaya gelen Daina Taimina, kariyerine bilgisayar bilimi ve matematik tarihi alanlarında başladı. Letonya Üniversitesinde 20 yıl öğretim üyeliği yaptıktan sonra 1996'da ABD'deki Cornell Üniversitesine geçti ve orada tesadüf eseri yeni bir ilgi alanına sahip oldu. Taimina, David Henderson'ın verdiği bir geometri seminerine katıldı. Seminerde hiperbolik bir yüzeyin kâğıttan modelini yapmayı gösteren Henderson, bu tekniği, öncü topoloji uzmanı Amerikalı William Thurston'dan bizzat öğrenmişti.

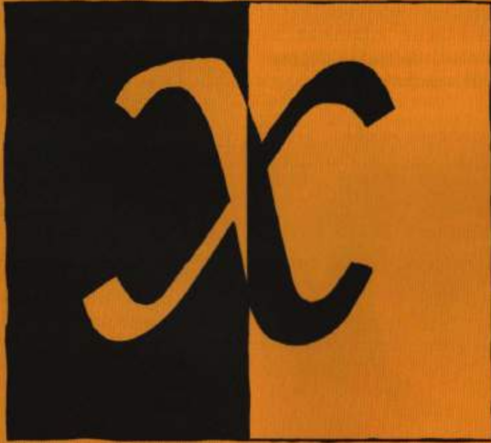
Taimina işi ilerletip kroşe tekniğiyle bizzat yaptığı hiperbolik yüzeyler modellerinden derslerinde yararlanmaya başladı. Matematiğin güzel sanatlar ve el sanatlarıyla alakasız bir bilim dalı olduğu yönündeki basmakalıp düşünce onun modellerinin başarıya ulaşmasıyla terk edildi. O andan beri Taimina bir matematikçi-sanatçı olarak ikinci bir kariyeri sürdürüyor.

Önemli eseri

2004 David W. Henderson ile *Experiencing Geometry* (*Geometriyi Deneyimlemek*)

CEBİRSEL YAPILARIN SİMETRİLERİ VARDIR

GRUP KURAMI



KISACA

KİŞİ
Évariste Galois (1811–32)

ALANLAR
Cebir, sayı kuramı

ÖNCE
1799 İtalyan matematikçi Paolo Ruffini köklerin permütasyon kümelerini soyut bir yapı olarak ele alır.

1815 Fransız matematikçi Augustin-Louis Cauchy permütasyon grupları hakkındaki kendi kuramını geliştirir.

SONRA
1846 Galois'nın eserini, kendisinin vefatının ardından Fransız meslektaşı Joseph Liouville yayımlar.

1854 İngiliz matematikçi Arthur Cayley, Galois'nın eserinin kapsamını genişletip soyut gruplarla ilgili eksiksiz bir kurama dönüştürür.

1872 Alman matematikçi Felix Klein geometriyi grup kuramı üzerinden tanımlar.

Grup kuramı, etkisi modern matematiğin her yanında hissedilen bir cebir dalıdır. Ortaya çıkışındaki büyük pay, neden yalnızca bazı polinom denklemlerin cebirsel yoluyla çözülebileceğini anlamak amacıyla kuramı geliştiren Fransız matematikçi Évariste Galois'ya aittir. Galois bunu yaparak başlangıcı Babilliler zamanına dayanan tarihi arayışa kesin bir yanıt bulmakla kalmayıp soyut cebrin temelini de atmış oldu.

Galois bu probleme yaklaşımında problemi matematiğin başka bir alanındaki bir soruyla ilintiledi. Söz konusu diğer alan iyi anlaşılmış bir alansa bu, etkili bir strateji olabilir. Oysa bu durumda, daha zor olan

Ayrıca bkz. Denklemlerin cebirsel çözümü 200–01 ▪ Emmy Noether ve soyut cebir 280–81 ▪ Sonlu basit gruplar 318–19

Sayılar veya şekiller gibi bir **elemanlar kümesi...**

...ve **o elemanlara etkiyen** bir işleminin (toplama veya dönme gibi) bütününe **grup** denir.

Grup olarak nitelendirilebilmesi için, bir kümenin dört aksiyomu sağlaması gerekir.

Bir **etkisiz elemanı** olmalıdır: başka herhangi bir elemana etkidiğinde onu **değişikliğe uğratmayan** bir eleman.

Bir **tersi** olmalıdır: Her elemana **karşılık gelen** ve bir araya getirildiğinde **etkisiz** elemanı veren bir eleman vardır.

Birleşme özelliği olmalıdır: İşlemlerin elemanlara hangi **sırayla** uygulandığı önemli değildir.

Kapalı olmalıdır: İşlem uygulandığında kümenin dışından bir eleman **elde edilmez.**

problemle (denklemlerin çözülebilirliğiyle) uğraşabilmek için Galois'nın ilk önce "basit" olan alanın kuramını (gruplar kuramını) geliştirmesi gerekti. Onun bu iki alan arasında kurduğu bağlantıya günümüzde Galois kuramı denir.

Simetrilerin aritmetiği Grup, soyut bir nesnedir: Birtakım aksiyomlara tabi olmak koşuluyla, bir elemanlar kümesi ve o elemanları birleştiren bir işlemden oluşur. Bu elemanlar şekillerden oluştuğu takdirde gruplar, simetri kodlaması olarak düşünülebilir. Düzgün bir çokgeninki gibi basit simetrileri sezgi yoluyla kavramak kolaydır. Örneğin köşe noktaları A, B ve C olan eşkenar bir üçgen (bkz. sonraki sayfada), merkezi etrafında üç şekilde döndürülebilir (120°, 240° ve 360° açılarla)



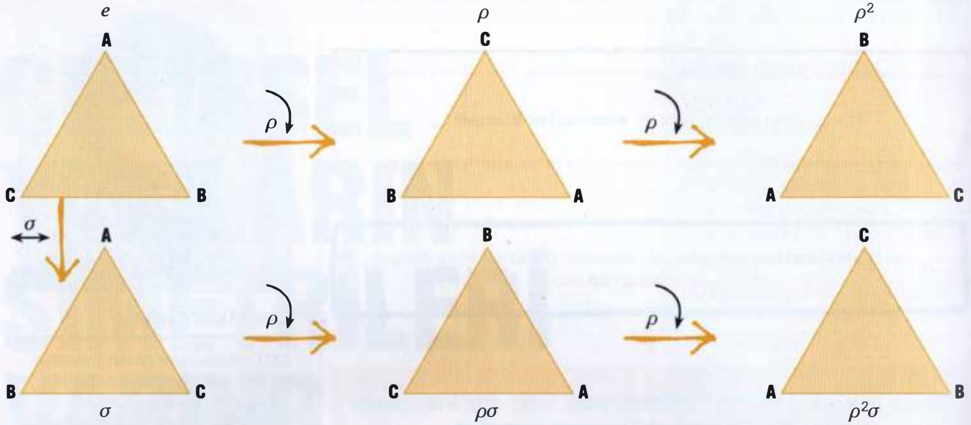
Évariste Galois

1811'de dünyaya gelen Évariste Galois, kısa ama hararetli ve fevkalade bir hayat yaşadı. Lagrange, Gauss ve Cauchy'nin çalışmalarına henüz ergenliğinde aşina olmasına karşın itibarlı École Polytechnique'e girme teşebbüsünde (iki kez) başarısız oldu. Başarısızlığının sebebi matematik ve siyaset konularındaki aceleciliği olsa bile, babasının intiharının da etkili olduğuna şüphe yoktu.

1829'da Galois, École Préparatoire'a kaydolduysa da siyasi görüşü nedeniyle 1830'da atıldı. Davasına bağlı bir cumhuriyetçi olan Galois, 1831'de tutuklandı ve sekiz ay hapis yattı. Salıverilişinin üzerinden çok geçmeden, 1832'de bir düelloya karıştı; sebebin bir gönül ilişkisi mi yoksa siyasi mesele mi olduğu belli değildir. Ağır yaralanıp ertesi gün hayatını kaybetti ve geriye sadece bir avuç matematik müsveddesi bıraktı; grup kuramı, sonlu alan kuramı ve şu anda Galois kuramı olarak bilinen kuramın temelleri bunların arasındaydı.

Önemli eserleri

1830 *Sur la théorie des nombres* (*Sayı Kuramı Üzerine*)
1831 *Premier Mémoire* (*İlk Hatıralar*)



Eşkenar üçgenin altı adet simetrisi vardır. Bunlar 120°, 240° ve 360° döndürülerek elde edilen döndürüler (ρ) ve A, B veya C'den geçen dikey bir doğruyla elde edilen yansımalardır (σ). Yukarıdaki şemada, etkisiz eleman *e*'ye (0° döndürü) arka arkaya simetri uygulanmasının sonuçları ve bunların yazılışları gösterilmekte; $\rho^2\sigma$ (şemadaki son eşkenar üçgen), "iki defa 120 derece döndür ve yansıt" anlamına gelir.

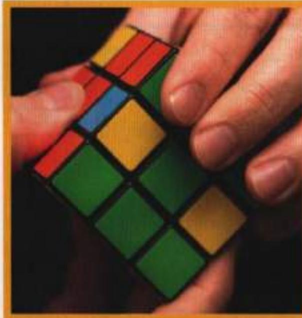
ve üç farklı doğru üzerinden yansıtılabilir.

Bu altı dönüşümün her birinde üçgen kendi üzerine oturtulur: Köşe noktalarının değişmiş olması (başka türlü sıralanması) dışında üçgen tıpatıp aynı görünür. Saat yönünde 120° döndürme, A köşesini B'nin eski yerine, B'yi C'ye, C'yiyse A'ya eşler. A'dan geçen bir dikey doğruyla yapılan yansımaysa B ile C köşe noktalarının yerlerini karşılıklı olarak değiştirir. Üçer döndürü ve yansıma, ABC üçgeninin olanaklı tüm simetrilerini verir.

Üçgenin simetrilerine bakmanın başka bir yolu, köşe noktalarının tüm permütasyon olanaklarını düşünmektir. Bir döndürü veya yansıma, A köşesini üç noktadan birine (kendisine dahil) eşleyebilir. Bu olasılıkların her birinden, B köşesinin gidebileceği iki yer vardır. Üçgen esnemez olduğundan, üçüncü köşenin gideceği yer artık belirlenmiştir ve dolayısıyla 3 × 2 = 6 olanak vardır. Çokgenlerin simetri grupları, bir elemanlar kümesinin permütasyonları olarak düşünülebilir. Eşkenar üçgenin simetri grubu, D_3 adlı küçük bir grubun üyesidir.

Grup kuramının aksiyomları

Grup kuramının dört ana aksiyomu vardır. Bunların birincisi etkisiz eleman aksiyomudur: Grubun bu özel elemanıyla birleştirilen diğer elemanlar değişime uğramaz. ABC üçgeni örneğindeki etkisiz eleman, 0° açıyla dönmedir.



Bir Rubik Küpün olanaklı döndürüleri 43.252.003.274.489.856.000 elemanlı bir matematiksel grup oluşturmasına rağmen küpü herhangi bir konumdan başlayarak çözmek için en fazla 26 defa 90° döndürme yeterlidir.

İkinci aksiyom, terslik aksiyomudur. Bu aksiyoma göre, her eleman için özel bir ters eleman vardır ve bu ikisinin birleştirilmesiyle etkisiz eleman elde edilir.

Üçüncü aksiyom birleşme özelliğiyle ilgilidir ve elemanlarla işlem yapıldığında çıkan sonucun, işlemlerin hangi sırayla yapıldığına bağlı olmadığını ifade eder. Örneğin üç elemanlı bir kümeyi çarpma işlemiyle bir araya getirirseniz, işlemleri herhangi bir sırayla yapabilirsiniz. Dolayısıyla, 1, 2 ve 3 elemanları bir grubun üyesiyse o halde (1 × 2) × 3 = 2 × 3 = 6 ve 1 × (2 × 3) = 1 × 6 = 6'dır: İşlemlerin hepsi aynı sonucu verir.

Dördüncü aksiyom, kapalılıktır: Bir grupta yapılan işlemlerle elde



CERN hızlandırıcısındaki ATLAS dedektörü, atomaltı parçacıkları incelemek üzere tasarlanmıştır. İncelenen parçacıkların arasında, grup kuramıyla öngörülen parçacıklar da vardır.

Fizikte grup kuramı

Fizik aracılığıyla anladığımız şekliyle evren simetrilerle doludur. Bu simetrilerin kavranması ve öngörülmesi bakımından grup kuramı bize etkili bir araç sağlamıştır. Fizikçiler 19. yüzyılda yaşamış Norveçli matematikçi Sophus Lie'nin adını taşıyan Lie gruplarını kullanırlar. Lie grupları süreksiz değil süreklidir; örneğin bir çokgenin sonlu sayıdaki dönüşümlerindense bir çemberin simetrileri gibi sonsuz sayıdaki döndürü simetrisini modellemede kullanılırlar. 1915'te Alman cebirci Emmy Noether, Lie gruplarının korunum yasalarıyla (enerjinin korunumu gibi) nasıl bağlantılı olduğunu ortaya çıkardı. 1960'larda fizikçiler atomaltı parçacıkların sınıflamasında grup kuramından yardım aldılar. Oysa kullandıkları matematiksel gruplar, bilinen hiçbir parçacıkta bulunmayan bir simetriler birleşimini içeriyordu. Bilim insanları bu simetriler birleşimini içeren bir parçacığı aradıklarında Omega-eksi parçacığını buldular. Daha yakın bir tarihte benzer başka bir boşluk Higgs bozonuyla dolduruldu.

edilen sonuçların içerisinde grup dışından eleman bulunmamalıdır. Dört aksiyomun dördüne de uyan bir grup örneği, toplama işleminin tanımlı olduğu {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...} tamsayılar kümesidir. Özel etkisiz eleman 0'dır ve her n tamsayısının tersi $-n$'dir çünkü $n + -n = 0 = -n + n$. Tamsayıların toplama işlemi birleşmelidir ve küme kapalıdır, çünkü herhangi iki tamsayının toplamı yine bir tamsayıdır.

Grupların değişmelilik olarak bilinen başka bir özelliği de olabilir. Bir grup değişmeliyse o gruba Abel grubu (değişmeli grup) denir. Gruba ait elemanların yerleri değiştirildiğinde sonuç değişmez. Tamsayıları dilediğiniz sırayla topladığınızda aynı sonuç çıkar (6 + 7 = 13 ve 7 + 6 = 13), dolayısıyla toplama işlemi tanımlı tamsayılar kümesi, değişmeli bir gruptur.

> Grupların kendilerini gösterdiği ya da kullanılabildiği her yerde, nispi bir karmaşanın içerisinden berrak bir basitlik meydana çıkıyordu.
>
> **Eric Temple Bell**
> **İskoç matematikçi**

Galois grup ve alanları

Gruplar çok sayıda soyut cebirsel yapının sadece bir çeşididir. Yine işlemlerin ve aksiyomların tanımlı olduğu kümeler olarak ifade edilen halkalar ve oyutlar, yakın akrabası olan yapılardandır. Bir oyut, iki işlem içerir; karmaşık sayılar (toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte) bir oyuttur. Karmaşık sayılar oyutu, polinom denklemlerin çözümlerinin bulunduğu bölgedir.

Galois kuramında polinom denklemlerin (kökleri bir oyutun elemanlarıdır) çözülebilirliği bir grupla ilişkilendirilir: köklerinin farklı diziliş olanaklarının kodlu olduğu permütasyon grubuyla. Galois günümüzde Galois grubu denen bu grubun, denklem cebirsel olarak çözülebiliyorsa belli tür bir yapıda, çözülemiyorsa başka tür bir yapıda olması gerektiğini gösterdi. Dördüncü derece denklemlerin ve daha basit polinomların Galois grupları çözülebilirken, öte yandan daha yüksek derece polinomlarınkiler çözülebilir değildir. Modern cebir; grup, halka, oyut ve diğer cebirsel yapıları inceleyen soyut bir araştırma alanıdır.

Grup kuramı, alandaki uzmanlarca geliştirilmeye devam ediyor ve birçok uygulaması mevcut. Örneğin kimya ve fizikteki simetrilerin araştırmasında grup kuramından yararlanılır. Günümüzde çoğu dijital iletişimin güvenliğini sağlayan açık anahtarlı kriptografide de grup kuramı kullanılabiliyor. ■

> İşlemlerin de en az uygulandıkları nicelikler kadar bilinmez olduğu bir süper matematiğe ihtiyacımız var. Gruplar Kuramı, böylesi bir süper matematiktir.
>
> **Arthur Eddington**
> **İngiliz astrofizikçi**



TIPKI CEP HARİTASI GİBİ

DÖRDEYLER

KISACA

KİŞİ
William Rowan Hamilton (1805–65)

ALAN
Sayı sistemleri

ÖNCE
1572 İtalyan Rafael Bombelli, 1 birimini temel alan gerçel sayıları, *i* birimini temel alan sanal sayılarla bir araya getirerek karmaşık sayıları oluşturur.

1806 Jean-Robert Argand karmaşık sayıları koordinatlar olarak gösterdiği grafikle karmaşık düzlemi meydana getirerek karmaşık sayıların geometrik bir yorumunu oluşturur.

SONRA
1888 Charles Hinton küpün dört boyutlu uzaya genişletilmiş hali olan hiperküpü icat eder. Hiperküp, dört adet küp ve altı adet kare içerir, ayrıca her köşesinde dörder ayrıt buluşur.

Karmaşıksayıların bir genişletilişi olan dördeyler hareketi üç boyutta modellemek, yönetmek ve tanımlamak için kullanılır. Örneğin bir video oyunun grafiklerinin oluşturulması, bir uzay sondasının rotasının planlanması ve bir akıllı telefonun doğrultulduğu yönün hesaplanması için vazgeçilmezdir. Dördeyler hareketin üç boyutlu uzayda modellenmesiyle ilgilenen İrlandalı matematikçi William Rowan'ın parlak bir buluşuydu. 1843'te, kafasında bir şimşek çaktı ve "üçüncü boyut probleminin" üç boyutlu bir sayıyla çözülemeyece-

Karmaşık sayıların (gerçel ve sanal sayıların toplamları) **iki boyutu** vardır ve hareketi iki boyutta tanımlarlar.



Hareketi **üç boyutta** tanımlamak için, karmaşık sayıların **genişletilmiş bir versiyonuna** ihtiyacımız vardır.



Üç boyutlu bir sayı, hareketi üç boyutta tanımlamak için **yeterli değildir.**



Hareketi üç boyutlu uzayda eksiksiz bir biçimde tanımlamak için dört boyutlu bir sayı, yani dördey gereklidir.

Ayrıca bkz. Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Koordinatlar 144–51 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–83 ▪ Karmaşık düzlem 214–15



Cisimlerin hareketinin üç boyutta modellenmesini ve yönetilmesini sağlayan dördeyler, bu özellikleriyle sanal gerçeklik oyunları için son derece kullanışlıdır.

ğini, dört boyutlu bir sayıya (bir dördeye) ihtiyacı olduğunu anladı.

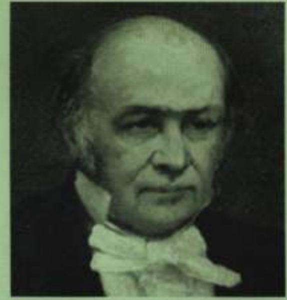
Hareketler ve dönmeler

Karmaşık sayılar iki boyutludur: Gerçel ve sanal kısımdan meydana gelirler, mesela $1 + 2i$. Sonuç olarak her karmaşık sayının iki kısmı da koordinat görevi görebilir ve sayı bir yüzeyde veya düzlemde işaretlenebilir. Gerçel sayıların sanal birimlerle birleştirilmesi suretiyle tek boyutlu sayı doğrusu genişleyip iki boyutlu karmaşık düzleme dönüşür. Karmaşık sayıların grafikte gösterilmesi böylelikle hareket ve dönüşün iki boyutta hesaplanmasını mümkün kılar. A noktasından B noktasına bir doğrusal hareket, iki karmaşık sayının toplanmasıyla ifade edilebilir. Daha fazla sayının toplanması, düzlemde üzerinde bir hareketler silsilesini meydana getirir. Dönmeyse, karmaşık sayılar birbirleriyle çarpılarak tanımlanır. i sanal birimiyle yapılan her çarpma işlemi 90° açıyla dönmeye sebep olur; başka herhangi bir açıyla dönme, i'nin belirli bir çarpanından veya kesrinden kaynaklanır. Karmaşık sayıları anladıktan sonra matematikçilerin karşısına çıkan bir sonraki sınav, üç boyutlu bir uzayda da aynı işleyişi sürdürecek bir sayıyı yaratmak oldu. Makul çözüm, üçüncü bir sayı doğrusunu (j) eklemekti. Bu doğru hem gerçel hem de sanal sayı doğrularına 90 derece dikti ama hiç kimse böyle bir sayının nasıl toplanacağını, çarpılacağını vb. bulamadı.

Dört boyut

Hamilton'ın çözümü, dördüncü bir gerçel olmayan birim (k) eklemekti. Böylece a, b, c ve d gerçel sayılar olmak üzere $a + bi + cj + dk$ temel yapısına sahip bir dördey meydana geliyordu. Eklenen iki dördey birimi olan j ve k, i ile benzer nitelikleri taşır ve sanaldır. Dördeyler üç boyuttaki doğruları ifade eden vektörleri belirtebilir, ayrıca vektörlerin etrafındaki dönüşün açısını ve yönünü de tanımlayabilir. Karmaşık düzlem gibi, basit dördey matematiği de temel trigonometri ile birleştirildiğinde üç boyutlu uzaydaki her tür hareketi tanımlamanın bir yolunu sunar. ■

> Zihnimde dönüp duran, su üstüne çıkmamış bir düşünce nihayet sonuç verdi. Bir elektrik devresi kapanır gibi oldu; sonra, çakan bir kıvılcım önümü aydınlattı, beni bekleyen uzun yılları.
>
> **William Rowan Hamilton**



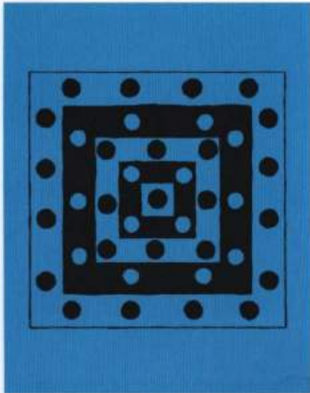
William Rowan Hamilton

1805'te Dublin'de dünyaya gelen Hamilton, gezerek matematik dehasını sergileyen Zerah Colburn adlı bir Amerikalı çocukla karşılaştıktan sonra, sekiz yaşında matematiğe ilgi duymaya başladı. 22 yaşında halen Dublin'deki Trinity Kolejinde okuduğu sırada, hem bu üniversitede astronomi öğretim üyesi hem de İrlanda Kraliyet Astronomu ilan edildi.

Hamilton, Newtoncı mekanik konusundaki uzmanlığı sayesinde gökcisimlerinin güzergâhlarını hesapladı. Daha sonra Newtoncı mekaniği güncelleştirip elektromanyetizma ve kuantum mekaniğinde daha çok ilerleme kaydedilmesini mümkün kılan bir sisteme dönüştürdü. 1856'da, yeteneklerinden para kazanmak maksadıyla Icosian oyununu piyasaya çıkardı. Oyuncular aynı noktaya ikinci kez dönmemek kaydıyla, bir onikiyüzlünün noktalarını birbirine bağlayan bir güzergâh bulmaya çalışıyordu. Hamilton oyunun haklarını 25 sterline sattı. Şiddetli bir gut atağı geçirip 1865'te hayata veda etti.

Önemli eserleri

1853 *Dördeyler Üzerine Dersler*
1866 *Dördeylerin Temel Unsurları*



SAYMA SAYILARININ KUVVETLERİ NEREDEYSE HİÇBİR ZAMAN ART ARDA GELMEZ

CATALAN KESTİRİMİ

KISACA

KİŞİ
Eugène Catalan (1814–94)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
y. 1320 Fransız filozof ve matematikçi Levi ben Gershon (Gersonides), 2 ve 3 sayılarının, $8 = 2^3$ ve $9 = 3^2$ kuvvetlerinden başka aralarında 1 fark olan kuvvetlerinin olmadığını gösterir.

1738 Leonhard Euler, 8 ve 9 sayılarının dışında, ardışık olan kare ya da küp sayıların olmadığını ispatlar.

SONRA
1976 Hollandalı sayı kuramcı Robert Tijdeman ardışık başka kuvvetler varsa bile bunların ancak sonlu sayıda olduğunu ispatlar.

2002 Preda Mihailescu, Catalan kestirimini, tasarlandığı 1844'ten 158 yıl sonra ispatlar.

Sayı kuramındaki çoğu problem kolaylıkla sunulabilmesine karşın ispatlanması son derece zordur. Örneğin Fermat'nın son teoremi 357 yıl boyunca kestirim (ispatlanmamış iddia) olarak kaldı. Konusu pozitif tamsayıların kuvvetleri olan Catalan kestirimi de Fermat'nın kestirimi gibi insanı aldatacak derecede basit ve ilk açıklanmasından çok uzun zaman sonra ispatlanan bir iddiadır

1844'te Eugène Catalan, x, y, m ve n sayma sayıları (pozitif tamsayılar) ve m ve n 1'den büyük olmak üzere, $x^m - y^n = 1$ denkleminin tek bir çözümü olduğunu iddia etti. Çözüm şöyledir: $x = 3$, $m = 2$, $y = 2$ ve $n = 3$ çünkü $3^2 - 2^3 = 1$.'dir. Başka bir ifadeyle, sayma sayılarının kareleri, küpleri ve daha büyük kuvvetleri neredeyse hiçbir zaman ardışık değildir. Beş yüz yıl önce Gersonides, iddianın özel bir durumunu ispatlamıştı. Sadece 2 ve 3'ün kuvvetlerini kullanıp $3^n - 2^m = 1$ ve $2^m - 3^n = 1$ denklemlerini çözmüştü. 1738'de Leonhard Euler, benzer bir şekilde, sadece kare ve küp kuvvetlere izin verilen bir durumu ispatladı. Euler bu ispatı $x^2 - y^3 = 1$ denklemini çözerek yaptı. Catalan kestirimine daha yakın olmasına rağ-

Pozitif tamsayılar kullanıldığında **iki kuvvetin arasındaki** en küçük **fark** 1'dir.

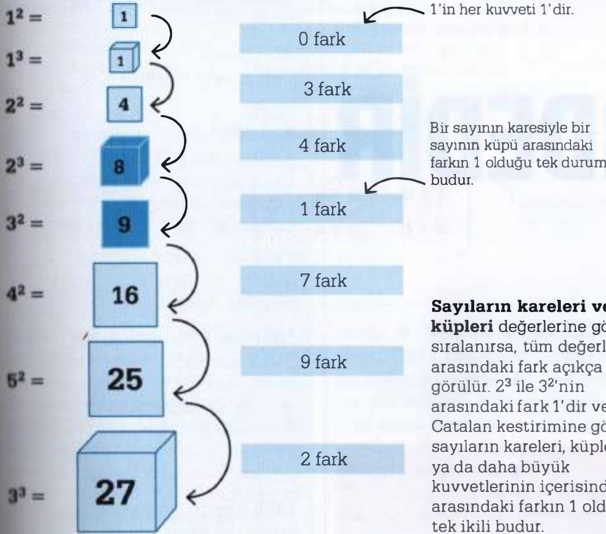
↓

Catalan bunu m ve n'nin **1'den** büyük olması gerektiği $x^m - y^n = 1$ **formülüyle** ifade etti.

↓

Pozitif tamsayılar kullanıldığında bu denklemin yalnızca bir çözümü vardır: $3^2 - 2^3 = 1$.

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Goldbach kestirimi 196 ▪ Taksi sayıları 276–77 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23



Sayıların kareleri ve küpleri değerlerine göre sıralanırsa, tüm değerlerin arasındaki fark açıkça görülür. 2^3 ile 3^2'nin arasındaki fark 1'dir ve Catalan kestirimine göre, sayıların kareleri, küpleri ya da daha büyük kuvvetlerinin içerisinde, arasındaki farkın 1 olduğu tek ikili budur.

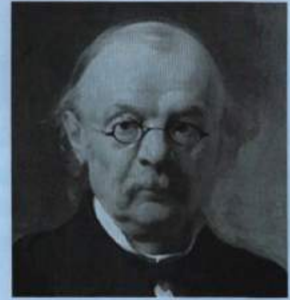
men bu çözüm, daha büyük kuvvet veya üs sayılarıyla sonuç olarak elde edilecek sayıların ardışık olması olanağını hesaba almıyordu.

Teorem haline gelmek

Catalan, kestirimini tam olarak ispatlayamadığını kendisi söyledi. Probleme başka matematikçiler de kafa yordu ama Romen matematikçi Preda Mihailescu'nun sürüncemede kalan meselelere çözüm getirip kestirimi teoreme dönüştürmesi 2002 yılını buldu.

Catalan kestirimi yarılış olmalıymış gibi gelebilir çünkü hemen hemen ardışık olan bazı kuvvetler basit hesaplamalarla çabucak elde edilebilir. $3^3 - 5^2 = 2$ ve $2^7 - 5^3 = 3$ bunlara birer örnektir. Diğer taraftan bu hemen-hemen-çözümler bile enderdir. Kestirimi ispatlamaya dönük yaklaşımlardan biri görünüşe göre çok sayıda hesaplama yapmayı gerektiriyordu: 1976'da Robert Tijdeman x, y, m ve n için bir üst sınır (maksimum büyüklük) buldu. Böylece ardışık olabilecek yalnızca sonlu sayıda kuvvet olduğu ispatlandı. Artık Catalan kestiriminin doğruluğu bu kuvvetlerin her biri yoklanarak test edilebilirdi. Ne yazık ki Tijdeman'ın üst sınırı astronomik büyüklükte olduğundan bu hesaplamayı modern bilgisayarlarla bile uygulamak olanaksızdır.

Mihailescu'nun Catalan kestirimi ispatında böylesi hesaplamalar yoktur. $x^m - y^n = 1$ denkleminin başka herhangi bir çözümü için m ve n'nin tek asal sayılar olması gerektiğinin ispatlandığı (Ke Zhao, J. W. S. Cassels ve diğerlerine ait) 20. yüzyıl atılımlarına Mihailescu bir yenisini daha ekledi. İspatı, Andrew Wiles'ın Fermat'nın son teoremine dair ispatı kadar hayranlık uyandırıcı olmasa da bir hayli tekniktir. ▪



Eugène Catalan

1814'te Belçika'nın Brugge şehrinde gözlerini dünyaya açan Eugène Catalan, Paris'teki École Polytechnique'te Fransız matematikçi Joseph Liouville'in derslerine girdi. Catalan, gençliğinden beri cumhuriyetçiydi ve 1848 devrimine katılanların arasında yer almıştı. Siyasi görüşleri nedeniyle birçok akademik makamdan ihraç edildi.

Catalan geometriye ve kombinatoriğe (sayma ve diziliş) büyük bir ilgi duyuyordu. Kaldı ki, onun anısını yaşatan, Catalan sayıları adlı bir dizisi vardır. Bu dizi (1, 2, 5, 14, 42…), çokgenlerin üçgenlere kaç yoldan bölünebildiğinin sayılması gibi birçok problemin yanıtını sağlar.

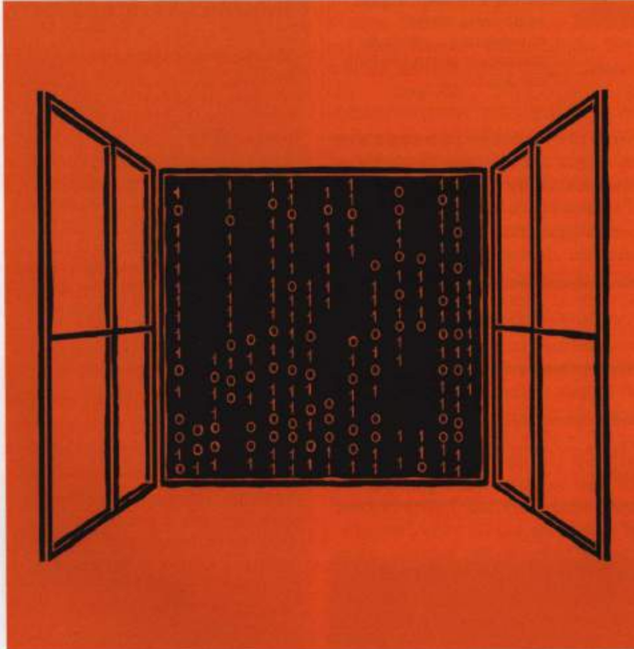
Catalan kendisini Fransız görüyordu ancak Belçika'da beğeni kazandı. Liège Üniversitesinde analiz öğretim üyesi olarak göreve başladığı 1865 yılından 1894'teki vefatına dek Belçika'da yaşadı.

Önemli eserleri

1860 *Traité élémentaire des séries* (*Seriler Üzerine Giriş Düzeyinde İnceleme*)
1890 *Intégrales eulériennes ou elliptiques* (*Euler İntegralleri veya Eliptik İntegraller*)

MATRİS HER YERDEDİR

MATRİSLER



KISACA

KİŞİ
James Joseph Sylvester
(1814–97)

ALANLAR
Cebir, sayı kuramı

ÖNCE
MÖ 200 *Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Bölüm* adlı kadim Çin metninde, matrislerden yararlanarak denklem çözmeye yarayan bir yöntem sergilenir.

1545 Gerolamo Cardano determinantların kullanıldığı teknikler yayımlar.

1801 Carl Friedrich Gauss, Pallas asteroidinin yörüngesini hesaplamak amacıyla, altı adet eşzamanlı denklemden meydana gelen bir matrisi kullanır.

SONRA
1858 Arthur Cayley matris cebrini biçimsel olarak tanımlayıp 2 × 2 ve 3 × 3 matrislerle ilgili sonuçların ispatlarını yapar.

Matrisler köşeli ayraç içindeki satırlar ve sütunlar halinde yerleştirilen bir elemanlar (sayı veya cebirsel ifadeler) dizilişidir (kafesidir). Satırlar ve sütunlar sonsuza dek uzatılabilir ve muazzam veri miktarları bu sayede matrisler vasıtasıyla derlitoplu bir şekilde saklanabilmektedir. Bir matris çok sayıda eleman içerse bile tek bir birim olarak ele alınır. Matrislerin matematik, fizik ve bilgisayar biliminde uygulamaları mevcuttur, örneğin bilgisayar grafiğinde ve bir akışkanın akışının açıklanmasında.

Bu tür dizilişlerin bilinen en eski delili Antik Maya uygarlığına aittir ve MÖ y. 2600'de Orta Amerika'da

Ayrıca bkz. Cebir 92–99 ▪ Koordinatlar 144–51 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Çizge kuramı 194–95 ▪ Grup kuramı 230–33 ▪ Kriptografi 314–17

Matrislerin boyutları önemlidir çünkü toplama ve çıkarma gibi işlemlerde matrislerin boyutlarının aynı olması gerekir. Aşağıdaki 2 × 2 matrisler kare matrislerdir, yani sütun sayıları ile satır sayıları aynıdır. Aşağıdaki grafikte, birbirine karşılık gelen konumlardaki elemanların toplanarak matrislerin birbirine eklenmesi gösterilmekte.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Sonuç da 2 × 2 matristir.

bulunmuştur. Kimi tarihçiler Maya halkının sayıları satır ve sütun düzeninde kullanmasındaki amacın denklem çözmek olduğuna inanıyor, anıtlarda ve papaz cübbelerinde görülen kafes benzeri süsleri buna delil olarak gösteriyorlar. Diğer tarihçilere göre bu desenlerin gerçek matrisleri simgelediği şüphelidir.

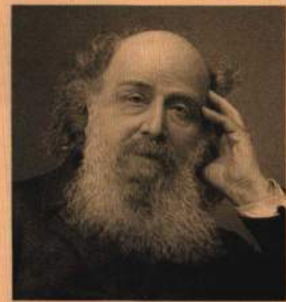
Matrislerin kullanımına dair doğrulanmış ilk örneğin kökeni Antik Çin'dedir. MÖ 2. yüzyılda, *Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Bölüm* başlıklı ders kitabında, sayma tablasının nasıl hazırlandığı ve birkaç bilinmeyen değer içeren eşzamanlı doğrusal denklemlerin çözümünde matris benzeri bir yöntemin nasıl kullanıldığı açıklanıyordu. Bu yöntem Alman matematikçi Carl Gauss'un duyurduğu, günümüzde eşzamanlı denklemlerin çözümünde hâlâ kullanılmakta olan eleme yöntemine benziyordu.



Mayalara ait kalıntılarda bulunan diziler, bazı tarihçiler açısından, Mayaların doğrusal denklemlerin çözümünde matrisleri kullandığına işaret etmektedir. Diğer tarihçilerse bunların, bir kaplumbağanın kabuğundaki gibi, doğadaki tekrarlayan örüntüler olduğuna inanmaktadır.

Matris aritmetiği

1850'de İngiliz matematikçi James Joseph Sylvester bir dizi sayıyı tarif etmek için "matrisler" terimini ilk defa kullandı. Sylvester bu terimi tanıttıktan kısa zaman sonra, arkadaşı ve meslektaşı Arthur Cayley, matrislerle işlem yapmanın kurallarını formüle etti. Cayley matris cebrinin kurallarının standart cebirdekilerden farklı olduğunu gösterdi. Aynı boyuttaki (kendi satır ve sütunlarında aynı sayıda elemanı olan) iki matrisin toplanması, birbirine karşılık gelen elemanlar birbirine eklenerek kolayca yapılır. Farklı boyutlara sahip matrisler toplanamaz. Bununla beraber, matrisleri çarpmak sayıları çarpmaktan



James Joseph Sylvester

1814'te dünyaya gelen James Joseph Sylvester yükseköğrenimine College London Üniversitesinde başladı ancak başka bir öğrenci onu bıçak taşımakla suçlayınca okulu bıraktı. Bunun üzerine Cambridge'e gidip üniversite sınavlarında ikinci olmasına karşın bir Yahudi olarak İngiliz Kilisesine bağlılık yemini etmediği için mezun olmasına izin verilmedi.

Sylvester kısa bir süreliğine ABD'de öğretmenlik yaptı ama benzer sıkıntıları orada da çekti. Londra'ya döndükten sonra hukuk okudu ve 1850'de baroya kabul edildi. Bir yandan matematikçi arkadaşı Arthur Cayley'le birlikte matrisler üzerinde çalışmaya başladı. Sylvester 1876'da ABD'ye dönüp Maryland'deki Johns Hopkins Üniversitesinde matematik öğretim üyesi oldu ve burada *American Journal of Mathematics*'i (*Amerikan Matematik Dergisi*) hayata geçirdi. Sylvester 1897'de Londra'da hayata gözlerini yumdu.

Önemli eserleri

1850 *Yeni Teoremler Sınıfı Üzerine*
1852 *Şekillerin Kalkülüsünün İlkeleri Üzerine*
1876 *Eliptik Fonksiyonlar Hakkında İnceleme*

İki matrisin çarpımına, ilk matristeki yatay doğrultudaki sayılar ile ikinci matristeki dikey doğrultudaki sayılar çarpılarak (ortadaki nokta çarpma işlemini belirtir), ardından çıkan sonuçlar birbirine eklenerek ulaşılır. İki kare matrisin (*A* ve *B*) buradaki çarpma işleminde gösterildiği gibi, matris cebrinde iki matrisin çarpılma sırası değiştirildiğinde farklı bir sonuç elde edilir.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \times \underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 8 \cdot 7 & 4 \cdot 9 + 8 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 9 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 36 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}} \times \underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 9 \cdot 1 & 2 \cdot 8 + 9 \cdot 3 \\ 7 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 7 \cdot 8 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 43 \\ 28 & 56 \end{bmatrix}$$

büyük ölçüde farklıdır. Tüm matrisler çarpılamaz; matrislerin çarpma işleminde, ***AB***'yi (bkz. yukarıda) hesaplamanın tek yolu, ***B***'nin satır sayısının ***A***'nın sütun sayısıyla aynı olmasıdır. Matris çarpımı değişmesizdir, yani ***A*** da ***B*** de kare matris olmasına rağmen ***AB***, ***BA***'ya eşit değildir.

Kare matrisler

Simetrilerinden dolayı kare matrislerin belli özellikleri vardır. Örneğin bir kare matris, kendisiyle tekrar tekrar çarpılabilir. Sol üst köşesinden çıkan köşegen üzerindeki değerlerin 1, diğer her yerdeki değerlerinse 0 olduğu $n \times n$ büyüklüğündeki bir kare matrise birim matris (I_n) adı verilir.

Her kare matrisin, o matrisin determinantı olarak adlandırılan ilişkili bir değeri vardır. Matrisin çoğu özelliğini saklayan determinantlar, matrisin elemanlarıyla yapılan aritmetik işlemlerle hesaplanabilir.

Elemanları karmaşık sayılar olup determinantları sıfır olmayan kare matrisler, grup adı verilen bir cebirsel yapıyı meydana getirir. Gruplar için doğru olan teoremler bu nedenle bu tür matrisler için de doğrudur ve grup kuramındaki buluşlar matrislere uygulanabilir. Gruplar matrislerle de gösterilebilir; böylelikle grup kuramındaki zor problemleri, daha kolay çözülen matris cebriyle ifade etmek mümkün hale gelir. Bu çalışma alanının adı temsil kuramıdır ve sayı kuramı ve analizinin yanı sıra fizikte uygulanır.

Determinantlar

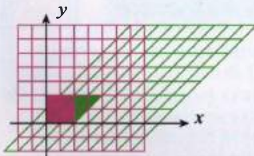
Gauss bir matrisin determinantına (belirtecine), matrisin temsil ettiği denklemler sisteminin çözümü olup olmadığını belirttiği için bu adı verdi. Determinant sıfır olmadığı sürece sistemin benzersiz bir çözümü vardır. Determinant sıfırsa sistemin ya hiç ya da birden çok çözümü vardır.

17. yüzyılda Japon matematikçi Seki Takakaze, 5 × 5 boyutuna kadar matrislerin determinantlarının hesaplanmasını göstermişti. Sonraki yüzyılda matematikçiler, gitgide daha büyük dizilerin determinantlarını bulmanın kurallarını

İki boyutlu doğrusal dönüşümde baş noktadan geçen doğrular baş noktadan geçen başka doğrulara, paralel doğrular da başka paralel doğrulara eşlenir. Dönme, yansıma, büyütme, germe ve kesme (doğruların, sabit bir doğruya paralel ve o sabit doğruya uzaklıklarıyla orantılı olarak kayması) dönüşümleri, doğrusal dönüşümlerdir. Herhangi bir (x, y) noktasının görüntüsü, matris, (x, y) noktasını temsil eden sütun vektörüyle çarpılarak bulunur. Aşağıdaki örneklerdeki asıl şekil, köşe noktaları (0,0), (2,0), (2,2) ve (0,2) olan pembe karedir; yeşil dörtgense görüntüdür.

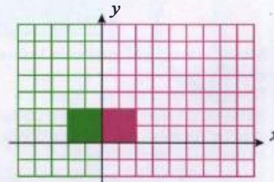
1 kırpma katsayılı **yatay kesme**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



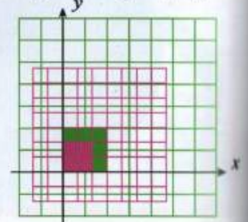
Dikey eksende **yansıma**

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



1,5 katsayısıyla **büyütme**

$$\begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Matrisler çok sayıda elemanı derli toplu bir biçimde saklayabilir.

Bilgisayarlar devasa matrislerde saklanan sayıları işlerler.

Bankalar, şifreleme için matrislerden yararlanır.

Kontrol kuramında, bir **elektronik sistemin girdisi ile çıktısı** arasında ilişki kurmak için **transfer matrisi** kullanılabilir.

Günümüzde kullandığımız çoğu teknoloji matrislere dayanır.

açığa çıkardılar. 1750'de İsviçreli matematikçi Gabriel Cramer, *m* satır ve *n* sütundan oluşan bir matrisin determinantı için genel bir kural (günümüzde bilinen adıyla Cramer kuralı) saptadıysa da bu kuralın ispatını sunamadı.

1812'de Fransız matematikçiler Augustin-Louis Cauchy ve Jacques Binet, aynı boyuta sahip iki kare matris çarpıldığında çarpımın determinantının, aslında, tekil determinantların çarpımına eşit olduğunu ispatladılar: $\det AB = (\det A) \times (\det B)$. Çok büyük bir matrisin determinantını bulma işlemi, bu kural sayesinde, büyük matrisin parçalanıp iki küçük matrisin determinantlarına ayrılmasıyla basitleştirilmiş oldu.

Dönüşüm matrisleri

Yansıma, dönme, öteleme ve ölçeklendirme gibi doğrusal geometrik dönüşümlerin temsilinde matrislerden yararlanılabilir (bkz. karşı sayfada). İki boyuttaki dönüşümler 2 × 2 matris koduyla işleme alınır, üç boyutlu dönüşümlerdeyse 3 × 3 matrisler kullanılır. Bir dönüşüm matrisinin determinantı dönüşüme uğrayan şeklin alan veya hacmi hakkındaki bilgileri barındırır. Günümüzde, bilgisayar destekli tasarım (CAD) yazılımlarında matrislerden bu amaç doğrultusunda geniş ölçüde faydalanılır.

Modern uygulamalar

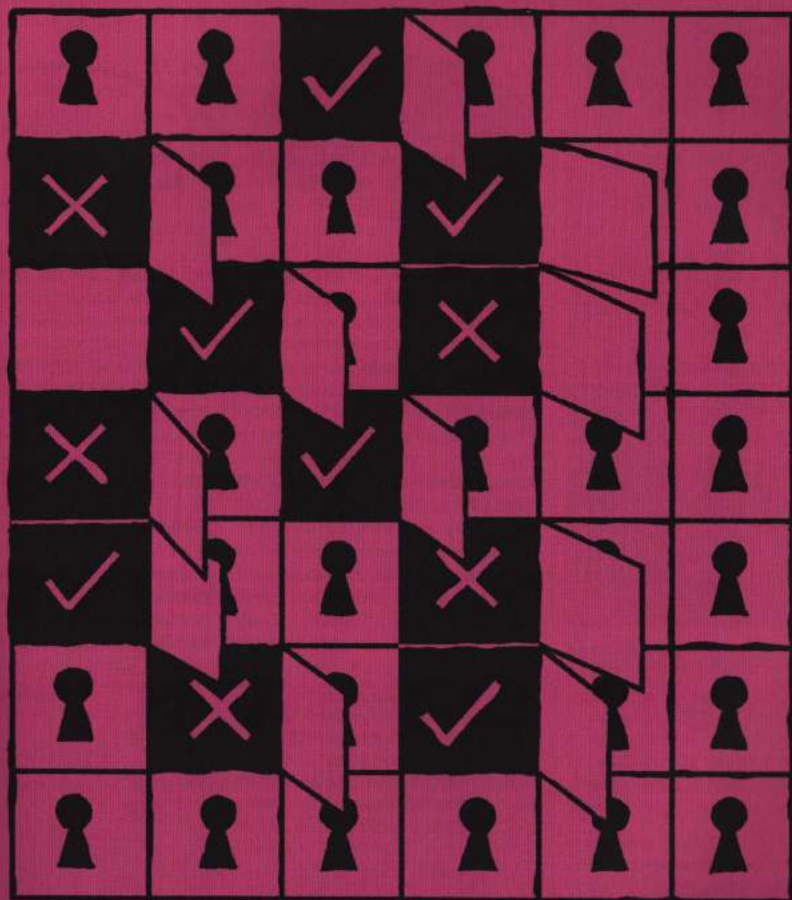
Matrisler muazzam veri miktarlarını yoğun halde saklayabildiklerinden matematik, fizik ve bilgisayarlar için vazgeçilmez olmuştur. Çizge kuramında, bir dizi köşenin (noktanın) ayrıtlarla (çizgilerle) birbirlerine bağlanışını simgelemek için matrislerden yardım alınır. Kuantum fiziğinin formüller üzeriden ifade edildiği matris mekaniğinde matris cebrinin kullanımına sıkça rastlanır. Fizikçiler ve kozmologlar dönüşüm matrislerini ve grup kuramını kullanarak evrenin simetrilerini araştırırlar.

Gerilim ve akımla ilgili problemlerin çözümünde elektrik devrelerini temsil etmek için matrisler kullanılır. Matrisler bilgisayar bilimi ve kriptografide de önemli yere sahiptir. Elemanları olasılıkları simgeleyen stokastik matrisler arama motoru algoritmalarınca web sayfalarının sıraya koyulmasında kullanılır. Bilgisayar programcıları ileti şifrelerken anahtar olarak matrisleri kullanırlar; harflere birer birer sayısal değer atar, ardından bu sayıları matristeki sayılarla çarparlar. Kullanılan matris büyüdükçe şifrelemenin güvenlik düzeyi de artar. ■

> Teoremin, bir matrisin her derecesinin ele alındığı genel durumu için biçimsel ispat yapmayı gerekli bulmadım.
>
> **Arthur Cayley**

DÜŞÜNME YASALARI ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

BOOLE CEBRİ



KISACA

KİŞİ
George Boole (1815–64)

ALAN
Mantık

ÖNCE
MÖ 350 Aristoteles'in felsefesinde tasımlar tartışılır.

1697 Gottfried Leibniz mantığı formüle dökmek için cebri kullanma denemesinde başarısız olur.

SONRA
1881 John Venn, Boole mantığının açıklamasında kullanacağı Venn diyagramlarını tanıtır

1893 Charles Sanders Peirce, Boole cebrinin sonuçlarını göstermek için doğruluk tablolarını kullanır.

1937 Claude Shannon, *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits* (*Röle ve Anahtarlama Devrelerinin Simgesel Analizi*) başlıklı eserinde Boole mantığını bilgisayar tasarımının dayanağı olarak kullanır.

Matematik onun için ikinci bir ilgi alanından fazlası asla olmadı, mantığı bile çoğu zaman önündeki engelleri kaldırmak için araç niyetine kullanıyordu.

Mary Everest Boole
İngiliz matematikçi ve George Boole'un eşi

Boole mantığının şartına göre, **Boole cebrindeki** her işlemin sonucu **ya doğru ya da yanlış** olabilir.

"Doğru" genellikle **1**'le, **"yanlış"** ise **0**'la simgelenir.

Boole cebrindeki her işlemin yalnızca iki adet olanaklı sonucu vardır: 1 veya 0.

Mantık matematiğin temelidir. Bize akıl yürütmenin kurallarını sağlar ve bir tezin ya da önermenin geçerliliği hakkında karar vermemiz için bize dayanak olur. Matematiksel bir tezde mantık kurallarından yararlanılmasındaki amaç, bir temel önerme doğruysa, o önermeden inşa edilecek tüm ifadelerin de doğru olacağından emin olmaktır.

Mantığın ilkelerini ayrıntılı bir şekilde açıklamaya ilk girişen kişi, aşağı yukarı MÖ 350'de bu amaçla kolları sıvayan Yunan filozof Aristoteles'ti. Mantığın başlı başına bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmasını sağlayan, onun çeşitli tez kalıpları üzerine analiziydi. Aritoteles bir tez türüyle özel olarak ilgilendi; bu tez türü, üç önermeden meydana gelen tasımdır. Üçüncü önerme, yani vargı, öncüller olarak tabir edilen ilk iki önermenin mantıksal açıdan zorunlu sonucudur. 2000 yıldan uzun bir süre boyunca Aristoteles'in mantık hakkındaki fikirlerinin Batı düşününde ne bir emsali görüldü ne de tartışma götürdü.

Aristoteles mantığa felsefenin bir dalı olarak yaklaşıyordu, gelgelelim 1800'lerde bilginler mantık çalışmalarını matematiğin kapsamına soktu. Sonuç olarak, sözcüklerle ifade edilen tezlerden, tezlerin soyut simgelerle ifade edilebildiği simgesel mantığa yönelindi. Matematiksel mantığa geçişe öncülük edenlerden biri, gelişim sürecindeki bir alan olan simgesel cebrin yöntemlerini mantığa uygulama arayışındaki İngiliz matematikçi George Boole'du.

Cebirsel mantık

Boole'un mantık incelemelerine başlaması, alışılmışın dışında bir şekilde olmuştu. 1847'de, arkadaşlarından İngiliz mantıkçı Augustus De Morgan, belli bir fikrin kime ait olduğu konusunda bir filozofla anlaşmazlığa düşmüştü. Boole anlaşmazlığa bizzat dâhil olmasa da, olay onu, *Mathematical Analysis of Logic* (*Mantığın Matematiksel Analizi*) başlığını taşıyan 1847 tarihli makalesinde, mantığın matematikle nasıl formülleştirilebileceğine dair fikirlerini yazmaya teşvik etti.

Boole'un arzusu, mantıksal tezleri, matematikle yön verilip çözülebilecekleri bir düzene sokmanın yolunu bulmaktı. Bu amaçla, bir nevi sözel bir cebir geliştirip, sıradan cebirdeki toplama ve çarpma gibi işlemlerin yerine mantıkta kullanılan bağlayıcıları koydu.

Ayrıca bkz. Tasım mantığı 50–51 ▪ İkili sayılar 176–77 ▪ Denklemlerin cebirsel çözümü 200–01 ▪ Venn diyagramları 254 ▪ Turing makinesi 284–89 ▪ Bilgi kuramı 291 ▪ Bulanık mantık 300–01

Boole'un kullandığı simge ve bağlaçlar, cebirdeki gibi, mantıksal ifadelerin basitleştirilmesine olanak sağlıyordu. Boole cebrindeki üç ana işlem VE, VEYA ve DEĞİL'di. Boole'a göre, kümelerin karşılaştırılmasının yanı sıra temel matematiksel fonksiyonlar için gereken işlemler sadece bunlardan ibaretti. Mesela mantıkta iki ifade, "bu hayvan kıllarla kaplıdır" VE "bu hayvan yavrusunu sütle besler" örneğindeki gibi VE ile ya da "bu hayvan yüzebilir" VEYA "bu hayvanın tüyleri vardır" örneğindeki gibi VEYA ile bağlanabilir. "*A* VE *B*" ifadesi hem *A* hem *B* doğru olduğu zaman doğrudur, "*A* VEYA *B*" ifadesiyse *A* ve *B*'nin biri veya her ikisi de doğru olduğu takdirde doğrudur. Bu tür ifadeler Boolecu dilde şöyle verilebilir: (*A* VEYA *B*) = (*B* VEYA *A*); (*A* DEĞİL) = *A*, hatta (*A* VEYA *B*) DEĞİL = (*A* DEĞİL) VE (*B* DEĞİL).

Boole'un ikilileri

Boole 1854'te en önemli eserini yayımladı: *An Investigation into the laws of thought* (*Düşünme Yasaları Üzerine Bir Araştırma*). Boole, sayıların cebirsel özelliklerini incelemiş ve {0, 1} kümesinin, toplama ve çarpma gibi işlemlerle birlikte, tutarlı bir cebirsel dilin şekillendirilmesinde kullanılabileceğini fark etmişti. Boole'un iddiasına göre, mantıksal önermelerin yalnızca iki değeri olabilir (doğru veya yanlış), ikisinin arasında bir şey olamazdı.

Boole'un mantıksal cebrinde doğruluk ve yanlışlık ikili değerlere indirgeniyordu: doğru için 1, yanlış için 0. Doğru ya da yanlış olan bir başlangıç ifadesiyle yola çıktıktan sonra Boole, başka ifadeler oluşturabilecek ve bu başka ifadelerin doğru olup olmadığını belirlemek için VE, VEYA ve DEĞİL işlemlerini kullanabilecekti.

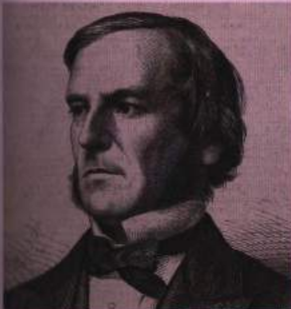
Bir artı bir, bir eder

Aradaki benzerliğe karşın Boole'un doğru ve yanlış ikilisi olan 1 ve 0, ikili sayılar ile aynı şey değildir. Boole sayıları gerçel sayıların matematiğinden tamamen farklıdır. Boole cebrinin "yasaları" cebrin diğer biçimlerinin elvermediği

> Boole cebri, mantıksal ifadelerin cebirsel hesaplamalarla ispat edilmesini olanaklı kılar.
> **Ian Stewart**
> **İngiliz matematikçi**

ifadelere elverir. Boole cebrinde her nicelik için yalnızca iki değer olanağı vardır: ya 1 ya da 0. Boole cebrinde çıkarma işlemi diye bir şey de yoktur. Örneğin "köpeğim kıllıdır" şeklindeki *A* ifadesi doğruysa, değeri 1'dir; "köpeğim kahverengidir" şeklindeki *B* ifadesi doğruysa, değeri yine 1'dir. *A* ve *B* "köpeğim kıllıdır VEYA köpeğim kahverengidir" ifadesiyle birleştirilebilir ve o ifade de doğru ve değeri yine 1 olur. Boole cebrinde VEYA'nın işle-

George Boole



1815'te Lincoln'da dünyaya gelen George Boole'un bilime ve matematiğe sevgisini ona ayakkabıcı babası aktardı. Babasının işletmesi iflas edince 16 yaşındaki George, ailesine destek olmak için öğretmen yardımcılığı yapmaya başladı. Yoğun bir şekilde matematik çalışmaya başladı ve ilk olarak bir kalkülüs kitabı okudu. Daha sonra, *Cambridge Matematik Dergisi*'nde (*Cambridge Mathematical Journal*) bir çalışmasını yayımlatmasına rağmen hâlâ ihtisas yapacak parası yoktu.

1849'da, Augustus De Morgan'la yazışmasının sonucunda Boole, İrlanda'nın Cork şehrinde yeni kurulan Queen's Kolejinde matematik öğretim üyesi olarak işe başladı. 49 yaşında gelen vakitsiz ölümüne kadar bu okulda kaldı.

Önemli eserleri

1847 *Mantığın Matematiksel Analizi*
1854 *Düşünme Yasaları Üzerine Bir Araştırma*
1859 *Diferansiyel Denklemler Üzerine İnceleme*
1860 *Sonlu Farklılıkların Kalkülüsü Üzerine İnceleme*

> Zihnimin beni ulaştırdığı en uç nokta, [mantık ve cebir arasında] yapay bir benzerlik kurma amacı doğrultusunda harcadığım emeklerdi.
>
> **Gottlob Frege**

yişi + işlecininki (1 + 1 = 1 dışında), VE'nin işleyişiyse × işlecininki gibidir (bkz. s. 247'deki tablo).

Sonuçların görselleştirilmesi

Boole cebrini görselleştirmenin bir yolunu İngiliz mantıkçı John Venn'in icat ettiği diyagram biçimi sağlar. *Symbolic Logic* (*Simgesel Mantık*) eserinde Venn, Venn diyagramları adıyla tanınacak diyagramları kullanarak Boole'un kuramlarını geliştirdi. Bu diyagramlar, kümeler arasındaki içerme (VE) ve dışlama (DEĞİL) ilişkilerini anlatır. Her biri ayrı bir kümeyi temsil eden kesişen dairelerden oluşurlar. İki daireli bir Venn diyagramı "Tüm ***A***'lar ***B***'dir" gibi önermeleri temsil ederken üç daire, üç kümeyi içeren önermeleri temsil eder (aşağıdaki ***X***, ***Y*** ve ***Z*** gibi).

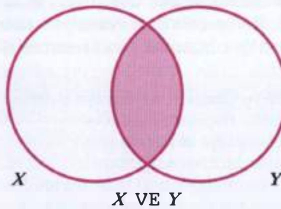
Boole cebrinde bir ifadenin sonuçları, tüm girdi birleşimi olanaklarının denenip yazıldığı bir doğruluk tablosuyla (bkz. karşı sayfada) da incelenebilir. Bu doğruluk tablolarını ilk defa 1893 yılında, Boole'un ölümünden yaklaşık 30 yıl sonra, Amerikalı mantıkçı Charles Saunders Peirce kullandı. Örneğin ***A*** VE ***B*** ifadesi ancak hem ***A*** hem ***B*** doğru olduğu takdirde doğru sayılabilir. ***A*** ve ***B***'nin biri veya her ikisi de yanlışsa o zaman ***A*** VE ***B*** yanlıştır. Dolayısıyla ***A*** ve ***B***'nin dört birleşim olanağından yalnızca biri sonuçta doğru yanıtı verir. Öte yandan ***A*** VEYA ***B*** için bu ifadenin doğru olduğu üç birleşim olanağı vardır çünkü ancak hem ***A*** hem ***B*** yanlış olduğu takdirde yanlıştır. Daha karmaşık ifadeler de doğruluk tablosu çizilerek gözden geçirilebilir. Örneğin ***A*** VE (***B*** VEYA ***C*** DEĞİL), hem ***A*** hem ***B*** doğru ve ***C*** yanlış olduğu zaman doğrudur, ***A*** yanlış ve hem ***B*** hem ***C*** doğru olduğu zamansa yanlıştır. Doğru ve yanlışların sekiz birleşim olanağı içinde, ifadenin doğru olduğu üç, yanlış olduğu beş birleşim vardır.

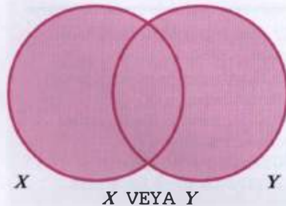
Kısıtlamalar

Boole'un cebir sisteminin olumsuz bir yönü hiç nicelleştirme yöntemi içermemesiydi: Örneğin "Tüm ***X*** için" gibi bir ifadeyi belirtmenin basit bir yolu yoktu. Nicelemeli ilk simgesel mantığı 1879 yılında, Boole'un mantığı cebre dönüştürme girişimlerine karşı çıkan Alman mantıkçı Gottlob Frege üretti. Frege'nin eserinin ardından, Charles Sanders Peirce ve başka bir Alman mantıkçı Ernst Schröder de nicellemeyi Boole'un cebrine kattı-

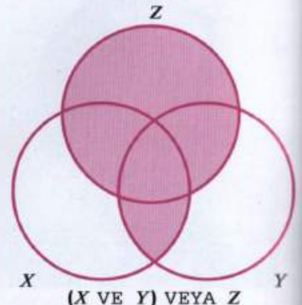
Bu Venn diyagramları Boole cebrindeki en temel işlevlerin üçünü temsil etmekte: VE, VEYA ve DEĞİL'in işlevleri. Üç daireli diyagram, iki işlevin bir birleşimini temsil etmekte: (***X*** VE ***Y***) VEYA ***Z***.

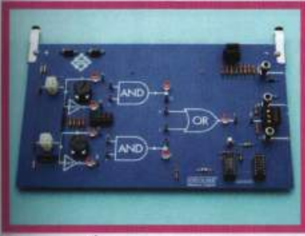
İşlevin sonucunu gösteren bölge











Bu mantık modülü, elektronik devrelerdeki mantık kapılarının işleyişini öğretmek için kullanılır. Kapılar, sonuca göre açılıp kapanan ışık veya sesli ikaz cihazlarına bağlanabilir.

Kapı	Simge	Doğruluk tablosu		
DEĞİL DEĞİL kapısının çıktısı, girdisinin tersidir.	A, X	GİRDİ		ÇIKTI
		1		0
		0		1
VE VE kapısının çıktısı ancak her iki girdisi de 1'se, 1'dir.	A, B, X	GİRDİ		ÇIKTI
		A	B	A VE B
		0	0	0
		0	1	0
		1	0	0
		1	1	1
VEYA VEYA kapısının çıktısı ancak her iki girdisi de 0'sa, 0'dır.	A, B, X	GİRDİ		ÇIKTI
		A	B	A VE B
		0	0	0
		0	1	1
		1	0	1
		1	1	1
VE DEĞİL VE DEĞİL kapısı, bir VE kapısı ve hemen sonrasındaki bir DEĞİL kapısından oluşur.	A, B, X	GİRDİ		ÇIKTI
		A	B	A VE B
		0	0	1
		0	1	1
		1	0	1
		1	1	0
VEYA DEĞİL VEYA DEĞİL kapısı, bir VEYA kapısı ve hemen sonrasındaki bir DEĞİL kapısından oluşur.	A, B, X	GİRDİ		ÇIKTI
		A	B	A VE B
		0	0	1
		0	1	0
		1	0	0
		1	1	0

Mantık kapıları, Boole işlevlerini uygulayan fiziki elektronik aygıtlardır ve bilgisayar devrelerinin önemli bir bölümünü meydana getirir. Bu tabloda, her türden mantık kapısına özgü çeşitli simgeler gösterilmekte. Doğruluk tablolarında, kapıya uygulanan çeşitli girdilerin olanaklı sonuçları gösterilmekte.

lar ve Boole'un sistemini kullanarak işler ortaya koydular.

Boole'un mirası

Boole'un kavramlarının potansiyelinin bütünüyle kavranması için ölümünün üzerinden 70 yıl kadar geçmesi gerekti. Amerikalı mühendis Claude Shannon, Boole'un *Mantığın Matematiksel Analizi*'nden faydalanarak modern çağın dijital bilgisayar devrelerinin altyapısını kurdu. Dünyanın ilk bilgisayarlarından biri için elektrik devre sistemi üzerinde çalışmakta olan Shannon, Boole'un iki değerli ikili sisteminin, devre sistemindeki mantık kapılarına (Boole işlevlerine göre hareket eden fiziki aygıtlar) dayanak oluşturabileceğini fark etti. Shannon daha 21 yaşındayken geleceğin bilgisayar tasarımı için esas olacak kavramlarını 1937 yılında *Röle ve Anahtarlama Devrelerinin Simgesel Analizi*'yle yayımladı.

Günümüzde bilgisayar yazılımlarını programlamada kullanılan kodların yapıtaşları, Boole'un biçimlendirdiği mantığa dayanır. İnternet arama motorlarının işleyişi de Boole mantığını merkez alır. İnternetin ilk dönemlerinde, aranan belirli şeyleri bulmak üzere sonuçların filtrelemesinde genelde VE, VEYA ve DEĞİL komutları kullanılıyordu, gelgelelim teknolojideki ilerlemeler günümüzde insanların daha doğal bir dil kullanarak arama yapmasına olanak tanımakta. Boole komutları düpedüz sessizleşmiş durumda: Örneğin "George Boole" aramasında iki sözcüğün arasında görünmez bir VE iması vardır; sonuçlarda yalnızca iki adı da içeren web sayfalarının çıkması bunun sayesindedir. ■



SADECE TEK KENARI OLAN BİR ŞEKİL

MÖBİUS ŞERİDİ

KISACA

KİŞİ
August Möbius (1790–1868)

ALAN
Uygulamalı geometri

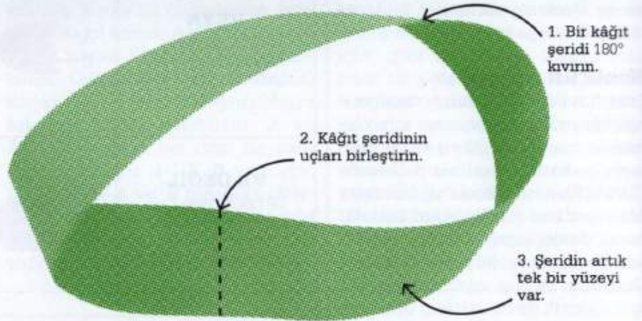
ÖNCE
MS 3. yüzyıl Yunanların sonsuzluk tanrısı Aion'un resmedildiği bir Roma mozaiğinde Möbius şeridinin şekline benzeyen bir burçlar kuşağı yer alır.

1847 Johann Listing, *Vorstudien zur Topologie* (*Topoloji İçin Ön Çalışma*) yapıtını yayımlar.

SONRA
1882 Felix Klein iki Möbius şeridinden meydana gelen bir şekil olan Kleinsche Flasche'nin (Klein şişesi) tanımını yapar.

1957 ABD'de B. F. Goodrich Company adlı şirket Möbius şeridini esas alan bir taşıma bandının patentini üretir

2015 Lazer ışını araştırmalarında kullanılan Möbius şeritleri için nanoteknolojide uygulanma potansiyeli doğar.



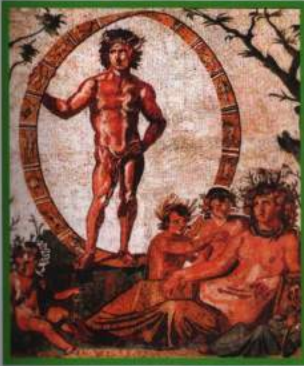
Bir Möbius şeridi, boyu eninden uzun basit bir kâğıtla yapılabilir. Şeridi boya kalemiyle, kalemi kâğıttan çekmeden aralıksız tek bir harekette boyamak mümkündür. Şeklin tek bir yüzeyi vardır; bu, şeklin yüzeyi gözle takip edilerek test edilebilir.

19. yüzyılda yaşamış Alman matematikçi August Möbius'un adı verilen Möbius şeridi, bir kâğıt şeridini 180° kıvırdıktan sonra iki ucunu birleştirerek saniyeler içerisinde yaratılabilir. Ortaya çıkan şeklin beklenmedik birtakım özellikleri vardır. Topoloji adlı bilim dalı kapsamında incelediğimiz bu özellikler karmaşık geometrik şekillere dair anlayışımızı ileriye taşımıştır.

19. yüzyıl matematik açısından yaratıcılığın ön planda olduğu bir yüzyıldı; heyecan yaratan yeni topoloji alanı çok sayıda yeni geometrik şekli doğurdu. Bu ivmelenmede büyük pay, aralarında Möbius ve Johann Listing'in de bulunduğu Alman matematikçilere aitti. 1858'de bu iki bilim insanının birbirinden habersiz araştırmaya koyulduğu burulmuş şeridi daha önce Listing'in keşfettiği söylenir.

Geometride, "yönlendirilemeyen" bir yüzeyin klasik bir örneği sayılır bu. Parmağınızı şeridin tamamı boyunca sürüdüğünüzde

Ayrıca bkz. Çizge kuramı 194–95 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Minkowski uzayı 274–75 ▪ Fraktaller 306–11



MS y. 200'e tarihlendirilen bu Roma mozaiği, Möbius şeridinin belki de ilk tasvirini barındırır. Tasvirin zamanın sonsuzluğunu temsil ettiği düşünülmekte.

kâğıdın sol kenarıyla sağ kenarının yer değiştirmesi anlamına gelir. Üç boyutlu uzayda yaratılabilecek, yönlendirilemeyen, iki boyutlu en basit yüzey Möbius şerididir.

Möbius şeridiyle deney yapmak, beklenmedik daha başka sonuçlar doğurur. Örneğin şerit boyunca tam ortadan bir çizgi çeker ve şeridi o çizgiden keserseniz şekil ikiye bölünmez. Aksine daha uzun, kesintisiz, kıvrılmış bir ilmek ortaya çıkar. Başka bir deney olarak, şeridin eninin üçte biri kadar kesik açıp makası 90° döndürün ve şeridi boydan boya kesin. Sonuç olarak, biri diğerinin iki katı uzunluğunda ve daha ince olan, birbirine bağlı iki kıvrılmış ilmek ortaya çıkar.

Uzay, sanayi ve sanat

Möbius şeridi kimi zaman doğal yollarla ortaya çıkar. Örneğin dünyayı çevreleyen Van Allen ışınım kuşaklarındaki manyetik yüklü parçacıkların hareketinde ve bazı proteinlerin molekül yapısında görülür. Şeridin niteliklerinden günlük uygulamalarda da kullanılır. 20. yüzyılın başlarında, sürekli döngüsel kayıt yapan ses bantlarında, kayıttan çalma süresini ikiye katlamak amacıyla Möbius şeridinin şeklinden yararlanılıyordu. Kuzey İngiltere'deki Blackpool Pleasure Beach eğlence parkının Grand National hız treni gibi, rayları Möbius şeridi şeklinde olan hız trenleri de vardır.

Sanatçılar ve mimarlar da Möbius şeridinin şeklinin etkisi altında kalmıştır. Hollandalı sanatçı Maurits Escher'in ağaç baskı tekniğiyle yaptığı, şeklin üzerinde sürgit dolanan karıncalar konulu eseri dikkat çekicidir. Güneş ışınlarının etkisini en aza indirmek maksadıyla Möbius şeridi şeklinde inşa edilen binalar mevcut. Şeklin kullanıldığı evrensel geri dönüşüm simgesi ve şekli çağrıştıran matematiksel sonsuzluk simgesi (∞), Antik Roma mozaiğindeki (yukarıda) sonsuzluk imgesinin birer yansımasıdır. ■



Hayatlarımız Möbius şeridi gibidir, aynı anda hem ıstırap çekiyoruz hem merak içindeyiz. Kaderlerimiz sonsuzdur ve sonsuz bir şekilde tekerrür eder.

Joyce Carol Oates
Amerikalı yazar





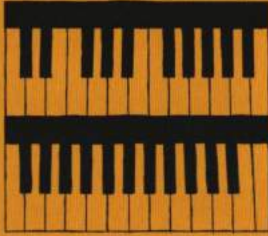
August Möbius

1790 yılında Almanya'nın Saksonya eyaletine bağlı Naumberg civarında dünyaya gelen August Ferdinand Möbius, bir dans öğretmeninin oğluydu. Matematik, fizik ve astronomi okumak üzere 18 yaşında Leipzig Üniversitesine girdi, sonraları öğrenim gördüğü Göttingen'de büyük Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss'un derslerine girdi. 1816'da Möbius Leipzig'de astronomi öğretim üyesi oldu ve orada geçirdiği hayatının kalan yıllarında Halley Kuyrukluyıldızı ve astronominin daha başka yönleri üzerine incelemeler yazdı.

Möbius'un adı birçok matematiksel kavramla birlikte anılır; Möbius dönüşümleri, Möbius fonksiyonu, Möbius düzlemi ve Möbius ters çevirme formülü bu kavramlar arasındadır. Bunlara ilaveten Möbius ağı adlı bir geometrik izdüşüm kestirimini ortaya koydu. Möbius 1868'de Leipzig'de hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

1827 *Ağırlık Merkezlerinin Kalkülüsü*
1837 *Statik Kitabı*
1843 *Gök Mekaniğinin Öğeleri*



ASAL SAYILARIN MÜZİĞİ

RIEMANN VARSAYIMI

KISACA

KİŞİ
Bernhard Riemann
(1826–66)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1748 Leonhard Euler asal sayılar dizisi ile sonralarının zeta fonksiyonunun bir versiyonu arasında bağ kurarak Euler çarpımının tanımını yapar.

1848 Rus matematikçi Pafnuty Chebyshev, $\pi(n)$ ile gösterilen asal sayıları sayma fonksiyonu üzerine ilk kayda değer araştırma sonucunu takdim eder.

SONRA
1901 İsveçli matematikçi Helge von Koch asal sayıları sayma fonksiyonunun mümkün olan en iyi versiyonunun, Riemann varsayımına dayandığını ispatlar.

2004 İlk 10 trilyon "önemsiz olmayan sıfırın" kritik doğru üzerinde olduğunu ispatlamak için dağıtılmış işlem kullanılır.

Bir **sayı çiftinin** arasındaki asal sayıların sayısı hakkında **tahmin yürütmek çok zordur.**

Riemann varsayımına göre, iki değer arasındaki asal sayıların sayısı için en **hassas tahmini değeri zeta fonksiyonu** (sayı kuramında bir fonksiyon) verir.

Varsayım **henüz ispatlanmamıştır.**

1900 yılında David Hilbert, çözülmemiş matematik problemlerinin 23'ünün bir listesini çıkardı. Halen matematiğin çözülmemiş en önemli problemlerinden olduğu kabul edilen Rieman varsayımı da listede yer alıyordu. Varsayım sadece kendilerine veya 1'e bölünebilen sayılar anlamına gelen eden asal sayılarla ilgilidir. Riemann varsayımının ispat edilmesiyle başka birçok teorem çözüme kavuşacaktı.

Asal sayıların en dikkat çekici yanı, büyüdükçe birbirlerinden gitgide uzaklaşmalarıdır. 1 ile 100 arasındaki sayıların 25'i asaldır (4'te 1); 1 ile 100.000 arasındaki sayıların 9592'si asaldır (aşağı yukarı 10'da 1). Bu değerler, $\pi(n)$ ile gösterilen asal sayıları sayma fonksiyonu aracılığıyla gösterilir ancak buradaki π'nin, matematik sabiti olan Pi'yle alakası yoktur. π'nin yerine n koyulduğunda, 1 ile n'nin arasındaki asal sayıların sayısı elde edilir. Örneğin 100'e kadar olan asal sayıların sayısı için, $\pi(100) = 25$ elde edilir.

Örüntüyü bulmak

Matematikçiler, asal sayılara duydukları merakla, bu fonksiyonun değerle-

Ayrıca bkz. ▪ Mersenne asal sayıları 124 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Karmaşık düzlem 214–15 ▪ Asal sayılar teoremi 260–61

> Riemann varsayımının başarısızlığa uğraması asal sayıların dağılımında kargaşaya yol açacaktır.
>
> **Enrico Bombieri**
> **İtalyan matematikçi**

rini tahmin etmelerini sağlayacak bir formülü yüzyıllarca aradılar. Carl Gauss daha 14 yaşındayken yaklaşık bir yanıta ulaştı ve bundan kısa bir süre sonra, asal sayıları sayma fonksiyonunun geliştirilmiş bir versiyonunu bulup 1 ile 1.000.000 arasındaki asal sayıların sayısını yüzde 0,2 hassasiyetle 78.628 olarak tahmin etti.

Yeni bir formül

1859'da Bernhard Riemann $\pi(n)$ için mümkün olan en hassas tahmini değerleri veren yeni bir formül tasarladı. Bu formül için gereken girdilerden biri, karmaşık sayıların serisini tanımlayan ve günümüzde adı Riemann zeta fonksiyonu $\zeta(s)$ şeklinde simgelenir) olarak geçen fonkiyondur.

Riemann'ın $\pi(n)$ formülünün doğrulanması içi gereken sayılar, $\pi(n) = 0$ eşitliğini sağlayan karmaşık sayılardır (s). Bunların bazılarını ("önemsiz" sıfırlar) bulmak kolaydır: negatif çift sayıların hepsi −2, −4, −6 vb.). Diğerlerini bulmak ("önemsiz olmayan" sıfırlar; $\zeta(s) = 0$ eşitliğini sağlayan diğer tüm değerler) daha güçtür. Riemann bunların sadece üçünü hesaplayabildi. Önemsiz olmayan sıfırların ortak bir yönü olduğuna inanıyordu: Karmaşık düzlemde işaretlendiklerinde, tamamı, sayının gerçel kısmının 0,5 olduğu "kritik doğru" üzerinde yer alıyordu. Bu inanışa Riemann varsayımı denir.

Bir çözüm

2018'de o sırada 89 yaşında olan İngiliz matematikçi Michael Atiyah, Riemann varsayımının basit bir ispatını bulduğunu söyledi. Bundan birkaç ay sonra, ispatı doğrulanamadan öldü.

Riemann varsayımının ispatlanması, zeta fonksiyonunun "asal sayıların dağılımının en iyi tahmincisi" unvanını meşru kılacaktı kılmasına ama asal sayıların tamamının tahmin edilmesini yine sağlamayacaktı. Asal sayıların dağılımı bir ölçüde kaotiktir. Varsayım, asal sayıların tabi olduğu tahmin edilebilirlik ve rasgelelik karışımını buna rağmen belirginleştirir. Kuantum kuramına göre, ağır atomların çekirdeklerinde bu karışımın tamı tamına aynısı gözlenir. Bu derin bağlantı, Riemann varsayımını günün birinde bir matematikçinin yerine fizikçinin ispatlayabileceği anlamına gelir. ▪



Uranyum atomu ağır atomlara bir örnektir. Ağır atomların çekirdeklerinin izlediği istatistiksel davranış asal sayılarınkiyle aynıdır ve bundan dolayı öngörülmesi son derece zordur.



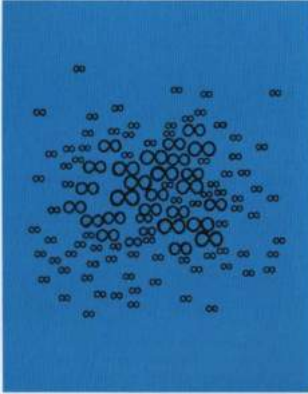
Bernhard Riemann

Bir vaizin oğlu olan Bernhard Reimann 1826'da Almanya'da doğdu. İlkin teolojiye merak sarmasına karşın, o sırada Göttingen Üniversitesinde öğretmeni olan Carl Gauss bölümünü değiştirip matematiğe geçmesi için onu ikna etti. Bu gelişmenin sonucunda, etkilerini günümüzde halen koruyan peşi sıra atılımlar geldi.

Riemann asal sayılar araştırmasının yanında kalkülüsün karmaşık fonksiyonlara (karmaşık sayıların kullanıldığı fonksiyonlar) uygulanmasına ilişkin kuralların koyulmasında da rol aldı. Einstein görelilik kuramını geliştirirken onun devrimci uzay anlayışından yararlandı. Riemann başarılı olmasına karşın mali sıkıntılarla boğuştu. 1862'de Göttingen Üniversitesinden profesörlük unvanı alınca nihayet yeterli maddi güce erişip evlenebildi. Yalnızca bir ay sonra hastalandı, sağlığı kötüye gitti ve 1866'da vereme yenik düştü.

Önemli eseri

1868 *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Geometrinin Temelindeki Varsayımlar Üzerine)*



BAZI SONSUZLUKLAR DİĞERLERİNDEN BÜYÜKTÜR

SONLUÖTESİ SAYILAR

KISACA

KİŞİ
Georg Cantor (1845–1918)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
MÖ 450 Elealı Zenon sonsuzluğun içyüzünü araştırmak için bir dizi paradokstan yararlanır.

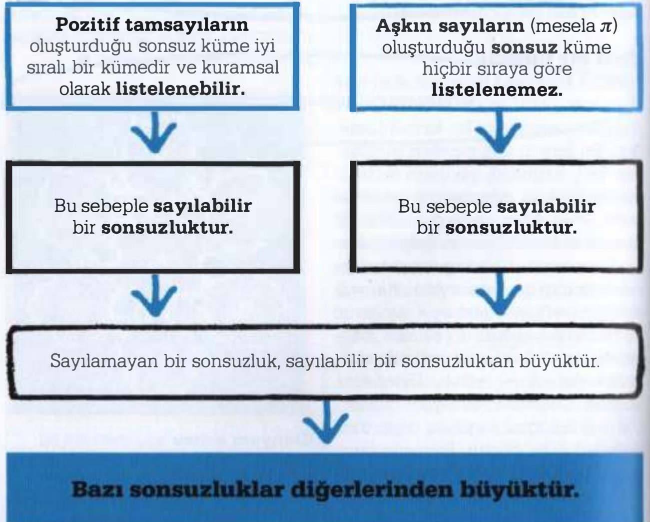
1844 Fransız matematikçi Joseph Liouville sayıların aşkın olabileceğini (tekrarlayan örüntüsü ve cebirsel kökü olmayacak şekilde dizilmiş sonsuz sayıda basamaktan oluşabileceğini) ispatlar.

SONRA
1901 Bertrand Russell'ın berber paradoksu kümeler kuramının sayıları tanımlamadaki zaafını açığa çıkarır.

1913 Sonsuz maymun teoreminde, sürenin sonsuz olması halinde, gelişigüzel girdilerin olanaklı tüm sonuçları önünde sonunda sağlayacağı açıklanır.

Sonsuzluk kavramı, matematikçilerin, şüpheli olduğunu uzun zamandır sezinlediği bir kavramdı. Sonsuzluğu ancak 19. yüzyılın sonlarında Georg Cantor matematiksel bir kesinlikle açıklayabildi. Cantor sonsuzluğun birden fazla çeşidi (hatta sonsuz çeşidi) olduğunu ve bunların bazılarının öbürlerinden büyük olduğunu keşfetti. Bu farklı sonsuzlukları tanımlamak için "sonluötesi" sayıları tanıttı. Cantor kümeler kuramını araştırırken sonsuza kadar her sayı için birer tanım bulmayı amaçladı.

Bunu gerekli kılan, irrasyonel, sonsuz uzunlukta ve cebirsel kök olamayan π ve e gibi aşkın sayılardı.



Ayrıca bkz. İrrasyonel sayılar 44–45 ▪ Zenon'un hareket paradoksları 46–47 ▪ Negatif sayılar 76–79 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Matematiğin mantığı 272–73 ▪ Sonsuz maymun teoremi 278–79

Tamsayıları, kesirleri ve belli irrasyonel sayıları ($\sqrt{2}$ gibi) kapsayan cebirsel sayıların herhangi ikisi arasında, sonsuz miktarda aşkın sayı vardır.

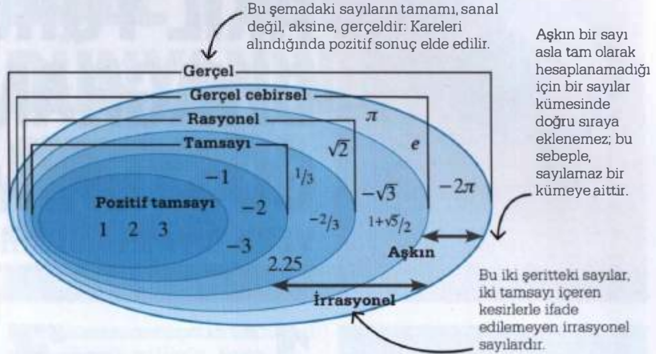
Sonsuzlukları saymak

Cantor sayıların konumunu tespit etmesine yardımcı olması için iki sayı türünü birbirinden ayırdı: bir kümenin büyüklüğünü simgeleyen sayma sayıları (1, 2, 3...) yani kardinaller ve 1'inci, 2'nci veya 3'üncü gibi, bir sıradaki yeri belirten ordinaller.

Cantor sonsuz sayıda eleman içeren bir kümeyi simgelemesi için yeni bir sonluötesi kardinal sayı (İbrani alfabesinin ilk harfi: alef [ℵ] sayısı) yarattı. Pozitif tamsayıları, negatif tamsayıları ve sıfırı kapsayan tamsayılar kümesine, her ne kadar kuramsal olarak sayılabilir sayılar olsa da baştan sona sayılmaları gerçekte imkânsız olması sebebiyle en küçük sonluötesi kardinal olan, $\aleph_0$ kardinalitesi atandı. Kardinalitesi $\aleph_0$ olan bir küme, birinci öğesinden başlar ve bir ω (omega) öğesiyle (bir sonluötesi ordinal sayı) biter. Kardinalitesi $\aleph_0$ olan bir kümedeki öğelerin sayısı ω'dır.

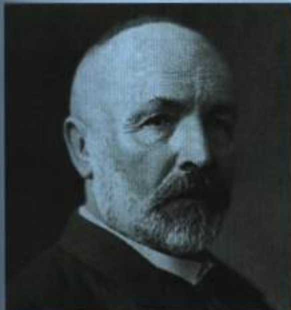
Bu kümeye ekleme yapıldığında yeni bir $\omega + 1$ kümesi oluşur. $\omega + 1$, $\omega + 1 + 2$, $\omega + 1 + 2 + 3$... gibi tüm sayılabilir ordinallerin kümesi, ω_1 öğe içerecektir. Bu küme sayılamaz, sayılamadığı için bu sonsuzluk, sayılabilir olanlardan büyüktür, dolayısıyla da kardinalitesi $\aleph_1$ ile ifade edilir.

Tüm $\aleph_1$ kümelerinin meydana getirdiği küme, kardinalitesi ω_2 olan $\aleph_2$ öğe içerir. Cantor'un kümeler kuramı bu şekilde, daima genişleyen, birbirleriyle iç içe geçen sonsuzluklar yaratır. ▪



Bu iç içe halkalarda, farklı sonsuzluk türlerine karşılık gelen farklı sayı türleri gösterilmektedir. Her bir halka, bir sayılar kümesini ifade eder. Örneğin pozitif tamsayılar kümesi, rasyonel sayıların küçük bir alt kümesidir. Rasyonel sayılar kümesi de irrasyonel sayılar kümesiyle birleştirildiğinde gerçel sayılar kümesinin tamamını meydana getirir.

Georg Cantor



Gözünü 1845'te Rusya'nın St. Petersburg şehrinde dünyaya açan Georg Cantor 1856'da ailesiyle birlikte Almanya'ya taşındı. Burslu okuyan seçkin bir öğrenciydi (ve keman çalıyordu), Berlin ve Göttingen'de okudu. Sonraları Halle Üniversitesinde matematik öğretim üyesi oldu.

Günümüz matematikçileri ona hayranlık beslese de Cantor çağdaşları arasında âdeta bir paryaydı. Sonluötesi sayılar kuramı, matematiğe ilişkin geleneksel inançlarla uyuşmadı ve önde gelen matematikçilerin eleştirileri kariyerine zarar verdi. Çalışmalarını ruhban sınıfı da eleştiriyordu ama son derece dindar olan Cantor araştırmalarıyla Tanrı'ya hamdettiğini ve taptığını düşünüyordu.

Cantor girdiği bunalımı kaldıramayınca kalan yaşamının büyük bölümünü akıl hastanesinde geçirdi. 20. yüzyılın başlarında takdir toplamaya başlamasına rağmen yaşlılığı boyunca yoksulluk çekti. 1918'de kalp krizinden hayatını kaybetti.

Önemli eseri

1915 *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers (Sonluötesi Sayılar Kuramına Katkılar)*



AKIL YÜRÜTMENİN DİYAGRAMLARLA GÖSTERİMİ

VENN DİYAGRAMLARI

KISACA

KİŞİ
John Venn (1834–1923)

ALAN
İstatistik

ÖNCE
y. 1290 Katalan gizemci Ramon Llull ağaçlar, merdivenler ve tekerlekler gibi araçları kullanarak sınıflama sistemleri tasarlar.

y. 1690 Gottfried Leibniz sınıflama diyagramlarını yaratır.

1762 Leonhard Euler günümüzde "Euler diyagramları" ifadesiyle anılan mantık diyagramlarını açıklar.

SONRA
1963 Amerikalı matematikçi David W. Henderson simetrik Venn diyagramları ile asal sayıların arasındaki bağlantıyı ana hatlarıyla anlatır.

2003 ABD'de Jerrold Griggs, Charles Killian, Carla Savage tüm asal sayılar için simetrik Venn diyagramlarının var olduğunu gösterirler.

1880'de İngiliz matematikçi John Venn "On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings" ("Önerme ve Akıl Yürütmenin Diyagramlarla ve Mekanik Yoldan Gösterilmesi") başlığını taşıyan makalesinde Venn diyagramı fikrini duyurdu. Venn diyagramı üst üste binen çemberlerle (ya da başka eğri şekillerle), aralarındaki ilişkileri göstermek amacıyla şeyleri gruplara ayırmanın bir yoludur.

Üst üste binen çemberler

Venn diyagramında tüm canlılar ya da güneş sistemindeki tüm gezegenler gibi, birtakım ortak özellikler barındıran şeylerin meydana getirdiği iki veya üç farklı küme veya grup ele alınır. Her kümeye özel bir çember atanır ve çemberler üst üste bindirilir. Bunun üzerine her kümedeki nesnelerin çemberlere yerleştirilmesi, birden fazla kümeye ait olanlar çemberlerin üst üste bindiği yerlere koyulacak şekilde yapılır.

İki çemberli Venn diyagramları "Tüm A'lar B'dir", "Hiçbir A, B değildir", "Bazı A'lar B'dir" ve "Bazı A'lar B'değildir" gibi kategorik önermeleri temsil edebilir. Üç çemberli diyagramlar da iki kategorik öncül bir de kategorik vargı içeren tasımları temsil edebilir. Örneğin: "Tüm Fransızlar Avrupalıdır. Bazı Fransızlar peynir yer. Dolayısıyla bazı Avrupalılar peynir yer."

Günlük hayatta gerek okul derslikleri gerekse toplantı odaları gibi çeşitli bağlamlarda yaygın olarak kullanılan bir araç olmanın yanı sıra Venn diyagramları, ilişkileri ifade edebilmesi sayesinde kümeler kuramının ayrılmaz bir parçasıdır. ■

> Büyük fikirler, "iyi bir fikir" ve "kötü bir fikre benziyor" Venn diyagramının kesişim bölgesinde yer alan fikirlerdir.
>
> **Sam Altman**
> **Amerikalı girişimci**

Ayrıca bkz. Tasım mantığı 50–51 ■ Olasılık 162–65 ■ Kalkülüs 168–75 ■ Euler sayısı 186–91 ■ Matematiğin mantığı 272–73

KULE YIKILACAK, DÜNYANIN SONU GELECEK

HANOI KULESİ

KISACA

KİŞİ
Édouard Lucas (1842–91)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1876 Lucas'ın eğlence amaçlı matematiği konusunu işlediği çalışması, ölümünün ardından dört cilt halinde yayımlanır.

SONRA
1894 Lucas'ın matematik eğlenceleri üzerine çalışmaları ölümünden sonra dört cilt halinde yayımlanmıştır.

1959 Amerikalı yazar Erik Frank Russell idamından önce Hanoi Kulesi oyununun bir uyarlamasını oynamasına izin verilen bir uzaylının anlatıldığı "Now Inhale" ("Şimdi Nefes Al") başlıklı kısa hikâyesini yayımlar.

1966 BBC'nin *Doctor Who* yapımının bir bölümünde, kötü karakter The Celestial Toymaker, oyunun bir uyarlamasını Doktor'a zorla oynatır.

Fransız matematikçi Édouard Lucas'ın Hanoi Kulesi oyununu 1883'te icat ettiği sanılır. Yapbozun amacı basittir. Oyuncuya üç adet direk verilir. Direklerden birine üç adet disk, en büyüğü en altta olmak üzere büyüklük sırasına göre dizilmiştir. Her hamlede bir disk hareket ettirmek suretiyle üç diskin başlangıçtaki dizilişinin aynısını farklı bir direkte, olabildiğince az hamlede oluşturmak hedeflenir. Oyuncular bir diski ya daha büyük bir diskin üstüne ya da boş bir direğe koyabilir.

Yapbozu çözmek

Sadece üç disk barındıran Hanoi Kulesi sadece yedi hamlede çözmek mümkün. Herhangi bir disk sayısı için, $2^n - 1$ formülü en düşük hamle sayısını verir (*n*, disk sayısına eşittir). Yapbozun çözümlerinden birinde ikili sayılar (0 ve 1) kullanılır. Her disk bir ikili rakamla, yani bit'le, temsil edilir. 0 değeri, bir diskin başlangıç direğinde olduğunu belirtir; 1'se son direkte olduğunu gösterir. Her hamlede bit'lerin dizilimi değişir.



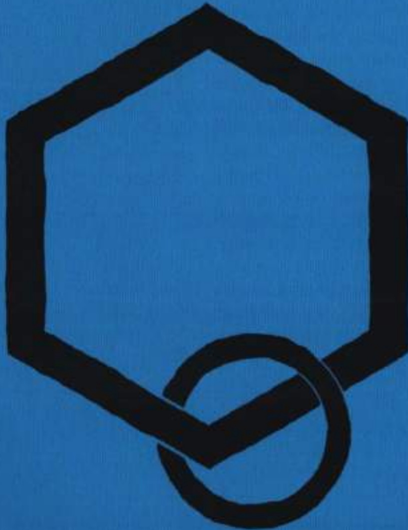
Hanoi Kulesinin bir çeşidi, küçük çocuklara yönelik meşhur bir oyuncaktır. Sekiz diskli uyarlamaları genellikle daha büyük çocukların gelişimsel becerilerinin test edilmesinde kullanılır.

Efsaneye göre, Hindistan veya Vientam'ın (rivayetin hangi uyarlaması olduğuna bağlı olarak) bir tapınağındaki keşişler 64 adet diski bir direkten diğerine kuralların dışına çıkmadan taşımayı başarırsa, dünyanın sonu gelecektir. Gelgelelim, en iyi stratejiyi uygulayarak ve her saniyede tek bir disk hareket ettirseler dahi, oyunu tamamlamaları 585 milyar yıl sürerdi. ■

Ayrıca bkz. Satranç tahtasındaki buğday 112–13 ▪ Mersenne asal sayıları 124 ▪ İkili sayılar 176–77

ÖNEMLİ OLAN BÜYÜKLÜK VE ŞEKİL DEĞİL, YALNIZCA BAĞLANTILARDIR

TOPOLOJİ



KISACA

KİŞİ
Henri Poincaré (1854–1912)

ALAN
Geometri

ÖNCE
1736 Leonhard Euler "Königsberg'in Yedi Köprüsü" adlı tarihi topoloji problemini çözer.

1847 Johann Listing bir matematik konusu olarak "topoloji" terimini uydurur.

SONRA
1925 Rus matematikçi Pavel Aleksandrov topolojik uzayların esas niteliklerinin incelenmesi için gerekli altyapıyı kurar.

2006 Grigori Perelman'ın Poincaré kestirimi ispatı doğrulanır.

Topoloji basit bir ifadeyle, ölçüleri olmayan şekillerin bilimidir. Klasik geometride, iki şekil, birbirine karşılık gelen eşit uzunluk ve açılara sahipse ve şekillerden birini kaydırarak, yansıtarak ya da döndürerek diğer şekli elde edebiliyorsanız o iki şekil eşleşiktir (matematik diliyle, özdeş). Oysa bir topoloji uzmanına göre sürekli germe, burma veya bükme yoluyla ama diğer yandan da kesmeden, delmeden ya da birbirine yapıştırmadan bir şekil başka bir şeklin biçimine sokulabiliyorsa o iki şekil özdeştir (veya topoloji terimcesine göre invaryanttır). Topolojiye bu sebeple "lastik levha geometrisi" denir.

Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Koordinatlar 144–51 ▪ Möbius şeridi 248–49 ▪ Minkowski uzayı 274–75 ▪ Poincaré kestirimini ispatlamak 324–25

Topoloji, ölçüleri olmayan **soyut şekillerin incelenmesidir.**

↓

Topolojik olarak özdeş şekiller germe, burma veya bükme yoluyla **birbirlerinin biçimlerine sokulabilir.**

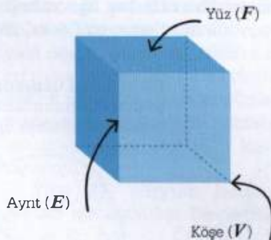
↓

Önemli olan şekil ve büyüklük değil, yalnızca bağlantılardır (deliklerin sayısıdır).

MÖ y. 300'e kadar eskiye dayanan Öklit'in döneminden itibaren 2000 yıldan uzun bir süre boyunca geometriciler şekilleri uzunluk ve açılarına göre sınıflamakla ilgilendi. 18. yüzyılda ve 19. yüzyılın başlarında bazı matematikçiler geometrik nesnelere farklı açıdan bakmaya, çizgi ve açılarla kısıtlı kalmayıp şekillerin bütün özelliklerini dikkate almaya başladı. Matematiksel bir alan olarak böylece vücut bulan topoloji 20. yüzyılın başlarına gelindiğinde "şekil" kavramından uzaklaşmış, soyut cebirsel yapıları içine almıştı. Bu atılımın en arzulusu ve en etkili sembolü, evrenin ta kendisinin "şekline" farklı bir açıdan ışık tutmak için karmaşık topolojiye başvuran Fransız matematikçi Henri Poincaré'ydi.

Yeni bir geometrinin doğuşu

1750'de Leonhard Euler çokyüzlüler (küp veya piramit gibi dört veya daha fazla düzlemi olan üç boyutlu şekiller) için yeni bir formülün üzerinde çalışmakta olduğunu açıkladı. Şekillerin çizgileri ve açılarındansa köşe noktalarını, ayrıtlarını ve yüzlerini formüle dahil ediyordu. Öne sürdüğü tez, Euler'in çokyüzlü for-



Euler'in formülü ($V + F - E = 2$) küp de dahil çoğu çokyüzlü için geçerlidir. Küpün değerleri ($V = 8$, $F = 6$ ve $E = 12$) formüle yerleştirildiğinde elde edilen $8 + 6 - 12$ hesaplamasının sonucu 2'dir.



Henri Poincaré

1854'te Fransa'nın Nancy şehrinde dünyaya gelen Henri Poincaré'nin küçük yaşında büyük umut vadeden zekâsından dolayı bir öğretmeni onu "matematik canavarı" olarak tarif etmişti. Poincaré, Paris École Polytechnique'ten matematik diplomasıyla mezun oldu, doktorasını Paris Üniversitesinde tamamladı. 1886'da Paris'teki Sorbonne Üniversitesinde matematiksel fizik ve olasılık bölümünün başkanlığına getirildi ve kariyerinin sonuna dek bu görevde kaldı.

Poincaré üç gezegenin birbirleri etrafındaki kararlı yörüngelerinin belirlenmesinde kullanılan çok sayıdaki değişkene yönelik kısmi çözümüyle 1887 yılında İsveç Kralı II. Oscar'dan ödül aldı. Bir yerde hata yapmış olduğunu itiraf edince kararlı yörünge hesaplamaları şüphe uyandırdı. Ama onun sunduğu bu kısmi çözüm, öte yandan, "kaos kuramı" araştırmalarına zemin hazırladı. 1912'de hayata veda etti.

Önemli eserleri

1892–99 *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Gök Mekaniğinde Yeni Yöntemler*
1895 *Analysis Situs (Konum Analizi)*
1903 *La Science et l'hypothèse (Bilim ve Varsayım)*

> Cebirsel topoloji, nitel biçimleri ve onların dönüşümlerini okumamıza imkân tanır.
>
> **Stephanie Strickland**
> **Amerikalı şair**

mülü olarak tanındı: V, köşe noktalarının sayısı; F, yüzlerin sayısı; E, ayrıtların sayısı olmak üzere $V + F - E = 2$. Fomül, tüm çokyüzlülerin aynı temel özellikleri taşıdığını ima ediyordu.

Gelgelelim 1813'te bir başka İsviçreli matematikçi Simone L'Huilier, Euler'in formülünün tüm çokyüzlüler için doğru olmadığını, delikli çokyüzlülerde ve dışbükey olmayan çokyüzlülerde ([köşe noktalarına bağlı] bazı köşegenleri şeklin içerisinde veya yüzeyinde bulunmayan şekiller) geçersiz olduğunu belirtti. L'Huilier'in kendisi de bir sistem tasarladı. Bu sistemde her şeklin kendi "Euler özellikleri" ($V - E + F$) vardı ve Euler özellikleri aynı olan şekiller ne kadar değişime uğratıldıklarına bakılmaksızın birbirleriyle ilişkililerdi.

"Topoloji" (Yunanca "*topos*" yani "bir yer", sözcüğünden türemiştir) terimini matematik camiasıyla tanıştıran, Alman matematikçi Johann Listing'in 1847'de yazdığı *Topoloji İçin Ön Çalışma*'sıydı; gerçi Listing en az on yıl önceki yazışmalarında da bu terimi kullanmıştı. Listing bilhassa Euler'in formülüne uymayan veya belirgin "dış" ve "iç" yüzeyleri olmayan olağan dışı şekillere merak duyuyordu. Hatta August Möbius'tan birkaç ay önce başka türde bir Möbius şeridini (yalnızca bir yüzeyi ve bir ayrıtı olan bir şekil) tasarlamıştı.

Aşağı yukarı aynı dönemde, bir başka Alman matematikçi Bernhard Riemann, René Descartes'ın tasarladığı iki ve üç boyutlu sistemlerin sınırlarını aşan yeni geometrik koordinat sistemleri tasarladı. Riemann kurduğu yeni çerçeve sayesinde matematikçiler şekilleri dört veya daha fazla boyutta inceleme imkânına sahip oldu; bunlara görünüşte "imkânsız" olan şekiller de dahildi.

1882'de Alman matematikçi Felix Klein'ın tasarladığı "Klein şişesi" bu tür bir şekildi. İki Möbius şeridini birleştirip tek bir yüzeye sahip, yönlendirilemeyen ("solu" ya da "sağı" olmayan) ve Möbius şeridinden farklı olarak ne ayrıtı ne de sınır eğrisi bulunan bir şekil yarattığını hayal etti. Hiç kesişim yeri olmadığından bu şekil gerçek anlamda dört boyutlu uzayda var olabilir. Şekil üç boyutta tasvir edilirse mecburen kendisiyle kesişir ve bu aşamada şişeye benzemeye başlar. Topoloji uzmanları Möbius şeridi ve Klein şişesi gibi şekillerin yüzeylerini tarif etmek için "2-çokkatlı" terimini uygun gördüler. Bu tür yüzeyler boyut sayısı ikiden fazla olan bir uzaya gömülü, iki boyutlu yüzeylerdir (Möbius şeridi üç boyutlu uzayda var olabilir, Klein şişesiyse yalnızca dört boyutlu uzayda gereğince var olabilir).

Evrensel bir kestirim

Evrenin şekli hakkında çok uzun zamandır tahmin yürütülüyor. Üç boyutlu bir evrende yaşıyoruz gibi görünse de, şeklinin anlamını biraz olsun kavramak için evrenin dışına çıkmamız, dört boyuta geçmemiz gerekiyor. Aynı şekilde, iki boyutlu bir yüzeyin şeklinin bize anlam ifade etmesi için ona üç boyuta çıkıp bakmamız gerekiyor. Dört boyutlu uzaya gömülü üç boyutlu bir yüzey olan bir evrende yaşadığımızı hayal etmek, uygun bir başlangıç noktası. Sonraki adımda, bu üç



Bir topoloji uzmanının gözünde kahve kupası ile tatlı çörek, şekilleri bakımından özdeştir çünkü bunların birini çekerek, gererek ve bükerek diğerinin biçimine sokabilirsiniz.

The BlackDog™ robotu engebeli arazide yük taşıyacak şekilde tasarlanmıştır. Cebirsel topoloji aracılığıyla çevredeki "uzay" öngörülüp modellenerek robotun hareketleri hesaplanır.



boyutlu yüzeyin aslında "3-küre" olarak da anılan dört boyutlu bir uzaya gömülü bir küre olduğunu düşünebilirsiniz. Bir "2-küre" ise üç boyutlu uzaydaki "normal" bir küreye (mesela top) denktir.

1904'te Henri Poincaré çıtayı daha da yükseltip evrenin şekline dair anlayışımıza topolojik bir zeminin hazırlanmasına yardımcı olacak bir kuramı üretti. Poincaré kestirimi olarak tanınan tezi ileri sürdü: "Basit bağlantılı, kapalı her 3-çokkatlı, 3-küreyle eşyapılıdır (homeomorf)." Bir "3-çokkatlı," yüzeyi büyütüldüğünde üç boyutlu olarak görünmesine karşın daha yüksek boyutlarda var olur. "Basit bağlantılı" ifadesi, hiç delik içermediği (tatlı çörek değil de portakal) anlamına gelir. "Kapalı" bir şekil sonludur ama sınırı yoktur (küre gibi). Son olarak, "eşyapılı", kahve kupası ve tatlı çörek gibi birbirlerinin biçimine sokulabilen şekilleri (bkz. karşı sayfada) tarif eden bir terimdir. Bununla birlikte, tatlı çörek ile portakal, tatlı çörekteki delik nedeniyle eşyapılı değildir.

Poincaré'ye göre evren, delik içermediği gösterilebilse, "3-küre" olarak modellenebilirdi. Delik içerip içermediğini saptamak için kuramsal boyutta, iple bir deney yapabilirsiniz. Bir referans noktasından yola çıkmış, ilerledikçe elindeki ip yumağını aça aça evrende gezinen bir kâşif olduğunuzu hayal edin. Başlangıç noktasına döndüğünüzde ipin başlangıç anındaki ucunu görürsünüz. Her iki uçtan tutup çekerek ipi toplamaya başlarsınız. Evren "basit bağlantılıysa" o zaman bir kürenin pürüzsüz dış yüzeyinde sürünen bir ilmek gibi ipin tamamını toplayabilirsiniz. Buna karşılık, delik veya boşluklardan geçmişseniz iplik "takılmış olabilir". Örneğin evren bir tatlı çöreğin şeklinde olsaydı ve siz yolculuğunuz sırasında ipinizi halkanın çevresine dolamış olsaydınız ip takılırdı. İpi evrenin ötesinden çekmeden toplayamazdınız.

Geleceği şekillendirmek

Topolojideki ilerlemeler 20. yüzyılda hâlâ devam ediyordu. 1905'te Fransız matematikçi Maurice Fréchet bir metrik uzay (bir noktalar kümesi ve noktaların arasındaki uzaklıkları tanımlayan bir "metrik") kavramı tasarladı.

Yine 20. yüzyılın başlarında, Alman matematikçi David Hilbert iki ve üç boyutlu Öklit uzaylarını alıp sonsuz boyutta genelleştirmek suretiyle bir uzay kavramı icat etti. Bundan böyle matematik her boyutta, üç boyutlu bir koordinat sistemindekiyle neredeyse aynı şekilde uygulanabilecekti. Topolojik matematiğin bu alanı "sonsuz boyutlu topolojidir".

Günümüzde topoloji alanı basit bir "şekil" kavramıyla arasında uçurumlar olan soyut cebirsel yapıları içine alacak denli uçsuz bucaksızdır. Genetik ve moleküler biyoloji gibi alanlarda çok çeşitli uygulamaları mevcuttur, örneğin bazı enzimlerin DNA çevresinde oluşturduğu "düğümlerin" çözülmesinde yardımcı rol oynar. ■

> Muhtemelen matematiğin hiçbir dalında daha şaşırtıcı bir büyüme görülmemiştir.
>
> **Raymond Louis Wilder**
> **Amerikalı matematikçi**



O DURGUN, TEKDÜZE UZAYDA ATIL VAZİYETTEDİR

ASAL SAYI TEOREMİ

KISACA

KİŞİ
Jacques Hadamard
(1865–1963)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1798 Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre verilen bir değerden küçük veya eşit kaç asal sayı olduğunu belirlemek için bir yaklaşma formülü sunar.

1859 Bernhard Riemann asal sayı teoremi için muhtemel bir ispatı ana hatlarıyla açıklar ama ispatın tamamlanması için gerekli matematik düzeyine henüz ulaşılmamıştır.

SONRA
1903 Alman matematikçi Edmund Landau asal sayı teoreminin Hadamard'a ait ispatını sadeleştirir.

1949 Macaristan'daki Paul Erdös ve Norveç'teki Atle Selberg'in her ikisi de yalnızca sayı kuramını kullanarak teoremin bir ispatını bulur.

Asal sayılar (kendileri ve 1 olmak üzere yalnızca iki çarpanı olan pozitif tamsayılar) çok uzun bir süredir matematikçiler için merak konusudur. Asal sayıları bulmak ilk adımsa (ki küçük sayılar arasında sık bulunurlar) dağılımlarını açıklayacak bir örüntüyü teşhis etmek bir sonraki adımdı. Öklit sonsuz miktarda asal sayı olduğunu 2000 yıldan uzun bir süre önce ispatlamış ama Legendre'ın kendisine ait kesitirimini beyan etmesi 18. yüzyılın sonunu bulmuştu. Asal sayıların dağılımını açıklamaya yönelik bu formül, asal sayı teoremi olarak ilan edildi. 1896'da Fransa'daki Jacques Hadamard ve Belçika'daki Charles-Jean de la Vallée Poussin birbirinden tamamen habersizce teoremi ispatladılar.

Sayılar büyüdükçe asal sayıların sıklığının azaldığı ortadadır. İlk 20 pozitif tamsayının sekizi asaldır: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ve 19. 1000'den 1020'ye kadar sayıların içinde yalnızca üç asal sayı vardır (1009, 1013, 1019) 1.000.000 ile 1.000.020 arasındaki tek asal sayı 1.000.003'tür.



Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Mersenne asal sayıları 124 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–31 ▪ Riemann varsayımı 250–51

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Asal sayıların sıklığı, sayılar büyüdükçe azalma eğilimindedir. 30 ile 40 arasında iki adet, 40'la 50 arasında üç adet asal sayı olsa da, daha büyük sayılarda asal sayı teoremi hassaslaşır.

■ **Asal sayılar**

Akla yatkın gibidir bu; sayı büyüdükçe böleni olabilecek daha çok sayı olur.

Asal sayıların dağılımı konusuna birçok önemli matematikçi kafa yormuştur. 1859'da Alman matematikçi Bernhard Riemann, *On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude* (*Verilen Bir Büyüklükten Küçük Asal Sayıların Sayısı Üzerine*) makalesinde bir ispat üzerinde çalışıyordu. Karmaşık sayılara (1 gibi gerçel sayılarla $\sqrt{-1}$ gibi sanal sayıların birleşimleri) fonksiyon kavramlarının uygulandığı matematik dalı olan karmaşık analizle bir çözüme ulaşacağına inanıyordu. Haklı da çıktı; karmaşık analiz alanındaki buluşlar Hadamard ve Poussin'ın ispatlarına destek sağladı.

Teorem ne diyor?

Asal sayı teoremi, bir x gerçel sayısından küçük veya eşit kaç asal sayı olduğunu hesaplayacak şekilde tasarlanmıştır. Teoremdeki tespit şöyle: x büyüdükçe ve sonsuzluğa yöneldikçe, $\pi(x)$, $x \div ln(x)$'e yaklaşık olarak eşit olur. Buradaki $\pi(x)$ asal sayıları sayma fonksiyonunun (asal sayıların miktarı) simgesidir ve Pi sayısıyla alakası yoktur; $ln(x)$ ise x'in doğal logaritmasıdır. Bu teoremi biraz farklı bir şekilde anlatmak gerekirse, büyük bir x sayısı için, 1'den x'e kadar asal sayıların arasındaki mesafe yaklaşık olarak $ln(x)$'tir. Başka bir açıdan, 1 ile x arasındaki herhangi bir sayının asal sayı olması olasılığı yaklaşık olarak $x \div ln(x)$'tir.

Nasıl ki kimyadaki bileşiklerin yapıtaşları elementlerdir, aynı biçimde matematikteki sayıların yapıtaşları da asal sayılardır. Bunun anlaşılması için Riemann varsayımı (çözülmemiş bir kestirim) elzemdir. Kaldı ki bu varsayım doğruysa asal sayılar hakkında çok daha fazla şey açıklığa kavuşturulabilir. ■

> Asal sayılar sayma sayılarının arasında, görünüşte şanstan başka hiçbir yasaya riayet etmeden, yabani otlar gibi biter.
>
> **Don Zagier**
> **Amerikalı matematikçi**



Jacques Hadamard

1865'te Fransa'nın Versay şehrinde dünyaya gelen Jacques-Salomon Hadamard ona ilham veren bir öğretmeni sayesinde matematiğe merak saldı. Doktor unvanını 1892'de Paris'te aldı. Aynı yıl içerisinde asal sayılar araştırması ona Grand Prix des Sciences Mathématiques Ödülü'nü getirdi. Şehirdeki üniversitede ders vermek üzere Bordeaux'ya taşındı ve asal sayılar teoremini orada ispatladı.

1894'te Hadamard'ın eşinin Yahudi bir arkadaşı olan Alfred Dreyfus devlet sırrı satmakla haksız yere suçlanıp ömür boyu hapse mahkûm edildi. Kendisi de Yahudi olan Hadamard'ın yorgunluk nedir bilmeden arkadaşı adına ortaya koyduğu emeğin sonucunda Dreyfus serbest bırakıldı. Hadamard'ın yaşadığı kayıplar parlak kariyerine zarar verdi; oğullarından ikisi I. Dünya Savaşında, biri de II. Dünya Savaşında hayatını kaybetti. Torunu Étienne'in 1962'deki vefatı son darbeydi. Bir yıl sonra da Hadamard hayata veda etti.

Önemli eserleri

1892 *Verilen Bir Sayıdan Küçük Asal Sayıların Belirlenmesi*
1910 *Varyasyonlar Hesabı Dersi*

MODER
MATEM
1900–GÜNÜM

N

ATİK

UZ

1900
David Hilbert, matematik araştırmalarının **çözülmemiş en önemli 23 problemini** belirleyerek ilerideki yüzyılın **zeminini hazırlar.**

1900
Karl Pearson **ki-kare testini** duyurarak **istatistik alanında** devrim yaratır.

1903
Bertrand Russell **berber paradoksunu** kullanarak, **kümeler kuramındaki çelişkileri,** ispatlarıyla birlikte gözler önüne serer.

1904
Neredeyse bir yüzyıl ispatlanamayacak olan **Poincaré kestirimi** ortaya atılır.

1907
Einstein'ın **özel görelilik kuramından** esinlenen Hermann Minkowski **görünmez dördüncü boyut olarak uzayzaman kavramını** önerir.

1921
Emmy Noether **soyut cebrin** geliştirilmesinde önemli bir yere sahip olan *Ideal Theory in Rings*'i (*Halkalarda İdealler Kuramı*) yayımlar.

1934
Bir grup Fransız matematikçi **Nicolas Bourbaki takma adıyla yazmaya** başlar; çalışmaları **Fermat'nın son teoreminin** nihai çözümünün önünü açacaktır.

1937
Alan Turing **bilgisayarların ortaya çıkışında** etkili olan **matematiksel makine** kavramını tanıtır.

1900 yılında, I. Dünya Savaşına yol açacak silahlanma yarışının kızıştığı sıralarda Alman matematikçi David Hilbert matematiğin 20. yüzyıldaki yönünü tayin etmek için bir girişimde bulundu. Çözülmemiş problemlerin içinden kendisince en can alıcı 23'ünün listesini çıkardı ve bu liste sayesinde matematikçilerin verimli keşiflere çıkabileceği matematik alanlarının belirlenişine etki etti.

Yeni yüzyıl, yeni alanlar

Keşfe çıkılan alanlardan biri, matematiğin temelleriydi. Matematiğin mantıksal altyapısını kurma arayışındaki Bertrand Russell tanımladığı bir paradoks aracılığıyla Georg Cantor'un saf küme kuramındaki bir çelişkiye dikkat çekip konunun tekrar masaya yatırılmasına sebep oldu. Nicolas Bourbaki takma adını kullanan André Weil ve arkadaşları bu fikirleri bırakıldıkları yerden aldılar. Matematiğin kökünden yola çıkarak 1930'lu ve 1940'lı yıllardaki toplantılarında matematiğin tüm dallarını kümeler kuramına göre kesinlikten taviz vermeden şekillendirdiler.

Aralarında Henri Poincaré'nin başı çektiği diğer matematikçiler, geometrinin bir uzantısı olarak yeni kurulan, yüzeyler ve uzayın ele alındığı topoloji alanını araştırdılar. Poincaré'nin ünlü kestirimi üç boyutlu bir kürenin iki boyutlu yüzeyiyle ilgilidir. 20. yüzyıldaki çoğu meslektaşından farklı olarak, soyut matematiğin yanı sıra kuramsal fizikte de, örneğin teklif olarak sunduğu görelilik ilkesi gibi, önemli keşiflere imza attı. Benzer şekilde, başta geometriyle ve sayı kuramındaki problemlere uygulanan geometrik yöntemlerle ilgilenen Hermann Minkowski çoklu boyutlar kavramını araştırdı ve muhtemel bir dördüncü boyut olarak uzayzamanı önerdi. Modern çağın tanınan ilk kadın matematikçilerinden Emmy Noether'se ayak bastığı kuramsal fizik alanına soyut cebri esas alan bir bakış açısıyla yöneldi.

Bilgisayar çağı

Probleme ilk el atanlardan biri Alan Turing'di. Turing bununla yetinmeyip II. Dünya Savaşı sırasında, modern bilgisayarların atası olan, kod kırma makinelerini geliştridi. Sonraları, bir yapay zekâ testini önerdi. Elektronik bilgisayarların gelişiyle bil-

1963



Edward Lorenz **kaos kuramı** hakkındaki eserini yayımlar. Bu kuram sonraları **"kelebek etkisi"** örneğiyle **birlikte anılacaktır.**

1965



Lütfi Zade bulanık mantığı biçimlendirir; bulanık mantık çok geçmeden **çeşitli teknolojilerde** ve ağırlıklı olarak Japonya'da kullanılmaya başlar.

1977



ABD'de üç matematikçi asal sayılar aracılığıyla **bilgi şifreleyen RSA algoritmasını** geliştirir.

1977



Dört renk teoreminin çözümü bilgisayar tarafından ispatlanan ilk matematik teoremi olur.

1980



"Fraktal" terimini belirlemiş olan Benoit Mandelbrot, **Mandelbrot kümesini** yaratır.

1989



Tim Berners-Lee'nin icat ettiği World Wide Web, matematik hakkındakiler de dahil, fikirlerin hızla yayılmasını kolaylaştırır.

1995



İngiliz matematikçi Andrew Wiles ilk ispatındaki **bir hatayı düzelttikten** sonra nihayet **Fermat'nın son teoreminin çözüldüğü** ilan edilir.

2006



Grigori Perelman'ın **Poincaré kestirimi** ispatı matematik camiasından tam kabul alır.

gisayar sistemlerin tasarım ve programlanmasına yönelik yöntemler matematikten talep edildi. Öte yandan bilgisayarlar da matematikçiler için etkili bir araçtı. Dört renk teoremi gibi o zamana dek çözülmemiş problemler genellikle uzayıp giden hesaplamaları gerektiriyordu ama artık bilgisayarlar çabucak ve hata yapmadan bunların üstesinden gelebilecekti. Poincaré kaos kuramının temelini atmıştı atmasına ama kuramın temel ilkelerini bilgisayar modellerinin yardımıyla daha sağlam dayanaklara oturtmayı başaran, Edward Lorenz'di. Onun görselleştirdiği çekici ve salıngaç imgeleri, Benoit Mandelbrot'nun fraktalleriyle birlikte, bu yeni inceleme alanlarının simgeleri oldu.

Bilgisayarların gelişi verilerin güvenli bir şekilde aktarılması meselesini gündeme taşıdı. Bu gelişmenin üzerine matematikçiler büyük sayıları asal çarpanlarına ayırma işleminin kullanıldığı karmaşık şifreleme sistemlerini tasarladılar. 1989'da kullanıma açılan World Wide Web bilgilerin daha hızlı iletilmesini sağladı ve bilgisayarlar, özellikle bilgi teknolojisi alanında, günlük yaşamın parçası haline geldi.

Yeni mantık, yeni binyıl

Elektronik bilgisayarlar sayesinde hemen hemen tüm problemlere yanıt bulunabileceği hissi veren geçici bir izlenim oluştu. Halbuki bilgisayar bilimi ilk olarak George Boole'un 19. yüzyılda ileri sürdüğü ikili mantık sistemine ve açık-kapalı, doğru-yanlış, 0-1 vb. kutupsal karşıtlara dayanıyordu ve gerçek dünyadaki şeyleri açıklayamazdı. Buna bir çare bulmak için kolları sıvayan Lütfi Zade, "bulanık mantık" denen, ifadelerin 0 (kesinlikle yanlış) ile 1 (kesinlike doğru) aralığında kademeli olarak kısmen doğru veya yanlış olabildiği bir sistem önerisinde bulundu.

2000 yılında, Clay Matematik Enstitüsünün ödüllü yedi Milenyum Problemini ve bunların herhangi birinin çözümü karşılığında 1 milyon ABD doları değerinde ödül belirlediğini duyurmasıyla beraber 21. yüzyıl matematiğinin coşkulu karşılanışı 20. yüzyılınkini aratmadı. Şimdiye dek yalnızca Poincaré kestirimi çözüldü; Griori Perelman'ın ispatı 2006'da onaylandı. ■



GELECEĞİ ÖRTEN PERDE

20. YÜZYIL İÇİN 23 PROBLEM

1900'de **David Hilbert**, önlerindeki yüzyılda **matematikçileri meşgul edeceğini** düşündüğü **23 problemi** tespit etti.



Bu problemlerin çözülmesiyle sayı kuramı, cebir, geometri ve kalkülüs gibi birçok farklı alanı daha iyi anlayacağımızı düşündü.









10 problem **çözüme kavuşturuldu.**

Yedisi için önerilen çözümler **evrensel olarak kabul edilmemiş durumda.**

Dördü henüz **çözüme kavuşturulmadı.**

İkisi asla **çözüme kavuşturulamayacak** kadar çapraşık.

KISACA

KİŞİ
David Hilbert (1862–1943)

ALANLAR
Mantık, geometri

ÖNCE
1859 Bernhard Riemann, Riemann varsayımını ortaya atar. Ünlü problem daha sonra Hilbert'in listesine 8. sıradan girecek ve günümüze dek çözülemeyecektir.

1878 Georg Cantor sonraları Hilbert'in listesinde 1. sırada ilan edilen süreklilik varsayımını ileri sürer.

SONRA
2000 Clay Enstitüsü, Milenyum Ödüllü yedi matematik probleminin listesini yayınlar ve çözülecek problem başına bir milyon dolar teklif eder.

2008 Matematikte büyük çaplı yeni buluşları teşvik etmeyi amaçlayan ABD Savunma Bakanlığına bağlı Gelişmiş Savunma Araştırma Projeleri Ajansı (DARPA) 23 çözülmemiş probleme yer verdiği listesini ilan eder.

Sonraki yüzyıla hangi problemlerin uygun düşeceğini tahmin etmek özel bir bilim dehası ve özgüven ister, ama Alman matematikçi David Hilbert'in 1900 yılında yaptığı tam olarak buydu. David Hilbert matematiğin çoğu alanına önemli ölçüde hakimdi. 1900'de Paris'te düzenlenen Uluslararası Matematik Kongresi'nde matematikçilerin gelecek on yıllarda kafa yorması gerektiğini düşündüğü 23 soruyu kendinden emin bir şekilde duyurdu. Bu öngörüsü haklı çıktı ve matematik camiası da bu zorluğun üstesinden gelmeyi bildi.

Problemlerin çeşitliliği

Hilbert'in çoğu sorusu büyük ölçüde teknik olsa da bazılarının anlaşılması nispeten daha kolaydır. Örneğin 3. sıradaki soruda, aynı hacme sahip her hangi iki çokyüzlüden birinin sonlu sayıda parçaya bölüp, bu parçaları yeniden bir araya getirerek diğer çokyüzlüyü oluşturmanın her zaman mümkün olup olmadığı sorulur. Kısa

Ayrıca bkz. Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Goldbach kestirimi 196 ▪ Riemann varsayımı 250–51 ▪ Sonluötesi sayılar 252–53

> Şu sonsuzluk! Başka hiçbir soru insanoğlunu bu kadar derinden etkilememiştir.
> **David Hilbert**

bir süre sonra, 1900'de Almanya doğumlu Amerikalı matematikçi Max Dehn çıkardığı şu sonuçla soruyu çözüme kavuşturdu: Problem çözüme kavuşturulamazdı.

Hilbert'in listesindeki ilk problem olan süreklilik varsayımında, pozitif tamsayılar kümesinin sonsuz olduğu, buna karşılık 0 ile 1 arasındaki gerçel sayılar kümesinin de sonsuz olduğuna dikkat çekiliyordu. Alman matematikçi Georg Cantor'un sunduğu çalışmanın sonucunda, ilk sonsuzluğun ikincisinden "daha küçük" olduğu kabul edildi.

Süreklilik varsayımına göre, bu iki sonsuzluğun arasında kalan bir sonsuzluk da yoktu. Cantor'un kendisi bunun doğru olduğuna emindi ama ispatlayamadı. 1940'ta Avusturyalı-Amerikalı mantıkçı Kurt Gödel böylesi bir sonsuzluğun var olduğunun ispatlanamayacağını gösterdi. 1963'te Amerikalı matematikçi Paul Cohen bu kez böylesi bir sonsuzluğun var olmadığının ispatlanamayacağını gösterdi. Hilbert'in problemi esas itibariyle çözüme kavuşturulmuş durumda olsa da, kümeler kuramı (kümelerin özelliklerinin incelendiği bilim dalı) karmaşık bir konu ve daha yürütülmesi gereken çok araştırma var. Hilbert'in 23 probleminin 10'u çözüme kavuşturulmuş addediliyor; yedisi kısmen çözülmüş durumda; ikisi, kesin çözümü asla bulunamayacak kadar çapraşık sayılıyor; üçü henüz çözüme kavuşturulmadı; biriyse (yine çözülmemiş) aslında bir fizik problemi. Diğer yandan, Riemann varsayımı çözümü bulunamayanlardan biri; üstelik bazı gözlemciler yakın bir tarihte de çözüme kavuşturulamayacağı düşüncesinde.

Gelecek için meydan okunacak problemler

Hilbert'in üstün başarısı matematikçileri 20. yüzyıl ve sonrasında nelerin alakadar edeceğini doğru tahmin etmesiydi. Amerikalı matematikçi ve Fields Madalyası sahibi Steve Smale'ın 1998'de takdim ettiği 18 soruluk listesinde Hilbert'in 8. ve 16. problemleri de vardı. İki yıl sonra Riemann varsayımına Clay Enstitüsünün Milenyum Ödüllü problemlerinin arasında da yer verildi. Günümüz matematikçilerin önünde her ne kadar başka mücadeleler de olsa, Hilbert'in problemleri, özellikle de hâlâ çözülmemiş olanlar, güncelliğini korumaya devam ediyor. ■

> Problem çözmek ile kuram inşa etmek arasında yakın bir ilişki vardır. Hilbert yeni yöntemler veya sonuçlar sunmak yerine çözülmemiş problemlerden oluşan bir liste sunmayı bu sebeple göze aldı.
> **Rüdiger Thiele**
> **Alman matematikçi**



David Hilbert

1862 yılında Alman bir karı kocanın çocuğu olarak Prusya'da dünyaya gelen David Hilbert 1880'de Königsberg Üniversitesine girdi, sonraki dönemlerde burada ders de verdi ve ardından 1895'te Göttingen Üniversitesinde matematik öğretim üyesi oldu. Görevini sürdürdüğü sırada Göttingen'i matematik merkezlerinden birine dönüştürdü ve sonraları adından söz ettirecek birçok genç matematikçiyi yetiştirdi.

Hilbert matematiğin birçok alanına vâkıf olmasıyla ünlüydü, ayrıca matematiksel fiziğe de büyük bir ilgi duyuyordu. Kansızlık hastalığından bitkin düşünce 1930'da emekliye ayrıldı ve Göttingen Üniversitesinin matematik fakültesi kısa bir süre sonra Yahudi çalışanlarının Nazilerce tasfiye edilmesinin ardından düşüşe geçti. Matematiğe verdiği büyük katkıya karşın, Hilbert'in II. Dünya Savaşının sürmekte olduğu 1943 yılındaki ölümü, büyük bir çoğunluğun dikkatini çekmedi.

Önemli eserleri

1897 *Sayılar Üzerine*
1900 "Matematiğin Problemleri" (Paris semineri)
1932–35 *Toplu Eserleri*
1934–39 *Matematiğin Temelleri (Paul Bernays ile)*

İSTATİSTİK, BİLİMİN GRAMERİDİR

MODERN İSTATİSTİĞİN DOĞUŞU



KISACA

KİŞİ
Francis Galton (1822–1911)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1774 Pierre-Simon Laplace norm etrafındaki beklenen dağılım örüntüsünü göz önüne serer.

1809 Carl Friedrich Gauss bir veri saçılımı için en iyi uyum çizgisini bulmaya yönelik olarak en küçük kareler yöntemini geliştirir.

1835 Adolphe Quetelet toplumsal verilerin modellenmesinde çan eğrisinin kullanılması gerektiğini savunur.

SONRA
1900 Karl Pearson beklenen ile gözlenen sıklıkların arasındaki farkların anlamlılığını belirlemeye yarayan ki-kare testini öne sürer.

İstatistik büyük veri miktarlarının analiz edilmesi ve yorumlanmasıyla ilgilenen matematik dalıdır. 19. yüzyılın sonunda istatistiğin temelinin atılmasında en büyük pay, çokyönlü İngiliz bilim insanları Francis Galton ve Karl Pearson'a aittir.

İstatistik, kaydedilen verilerin örüntüsünün anlamlı mı gelişigüzel mi olduğunu araştırır. Kökeni Pierre-Simon Laplace gibi 18. yüzyıl matematikçilerinin, astronomideki gözlem hatalarını teşhis etme çabalarına dayanır. Genellikle herhangi bir bilimsel veri kümesindeki hataların çoğu çok küçük, sadece küçük bir kısmıysa çok büyük olur. Dolayısıyla gözlemler grafikte gösterildiğinde ortaya çan şeklinde bir eğri çıkar ve bu eğrinin ortasındaki tepe noktası, en olası sonuç (yani "norm")

Ayrıca bkz. Negatif sayılar 76–79 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Normal dağılım 192–93 ▪ Cebrin temel teoremi 204–09 ▪ Laplace'ın şeytanı 218–19 ▪ Poisson dağılımı 220–21

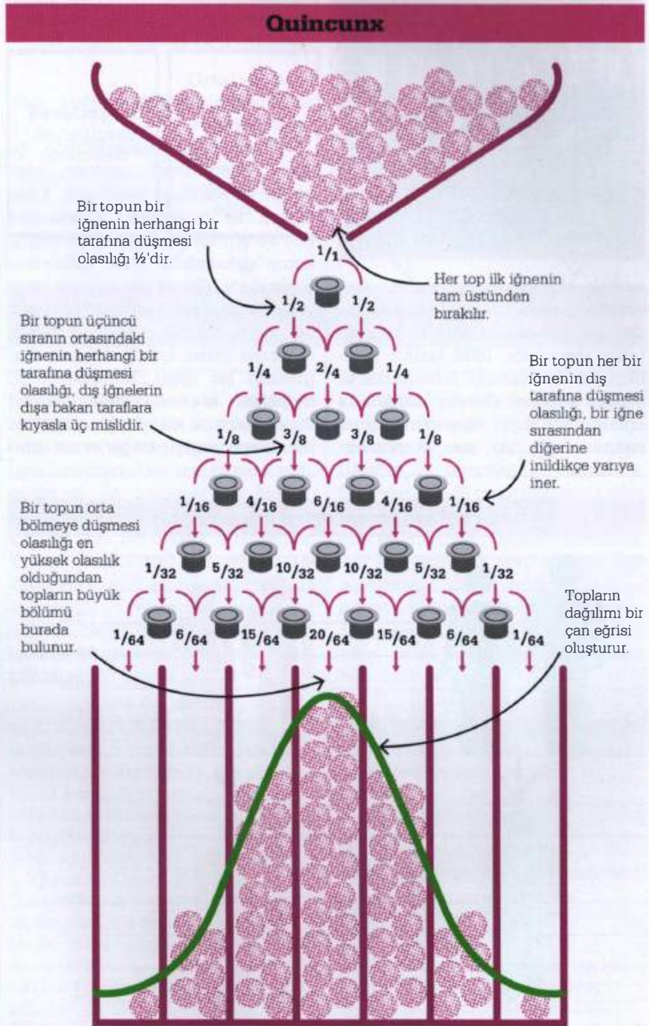
olur. Belçikalı matematikçi Adolphe Quetelet'nin 1835 tarihinde ileri sürdüğü tezine göre, insan nüfusundaki vücut kitlesi gibi ayırt edici özellikler bir çan eğrisi örüntüsüne uyar; ortalamanın etrafındaki değerler en sık değerlerdir. Daha yüksek ve düşük değerlerse sıklığı daha düşük değerlerdir. Vücut kitlesini ifade eden Quetelet İndeksini de (günümüzdeki adıyla BMI) Quetelet icat etmiştir.

Boy ve yaş gibi iki değişkeni grafikte göstermek çoğu zaman düzgün bir çizgiyle bağlanamayan, darmadağınık bir veri saçılımını meydana getirir. Ancak 1809'da Carl Friedrich Gauss değişkenler arasındaki ilişkiyi gösterecek bir "en iyi uyum" çizgisini veren denklemi buldu. Gauss istatistikçilerin halen kullandığı, "en küçük kareler" diye tabir edilen, verilerin karelerini toplama yöntemini kullanıyordu. 1840'lara gelindiğinde, Auguste Brevais gibi matematikçiler bu çizgi için kabul edilebilecek hata düzeyini incelediler ve bir veri kümesinin orta noktasının, yani "ortancasının" (medyan), anlamlılığını saptamaya çalıştılar.

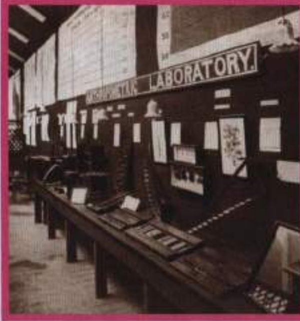
Korelasyon ve regresyon

Hikayenin bu parçalarını ilk olarak Galton, ardından Pearson bir araya getirmeye başladı. Galton, kuzeni Charles Darwin'in evrim üzerine çalışmasından ilham almıştı ve boy, fizyonomi, hatta zeka ve suça yatkınlık gibi etkenlerin nesilden nesile aktarılmasının ne kadar muhtemel olduğunu göstermeyi amaçlıyordu. Galton ve Pearson'ın fikirleri, soyarıtımı ve ırk iyileştirmeciliği öğretisinin lekesini taşıyordu ama geliştirdikleri tekniklere yine de başka sahalarda uygulamalar bulundu. Galton, verileri analiz

Quincunx



Francis Galton'ın *quincunx*'u (bazen Galton kutusu da denir) icat etmesindeki amaç, çan eğrisini modellemekti. Asıl tasarımında bilyeler çivilerin üzerine düşüyordu.

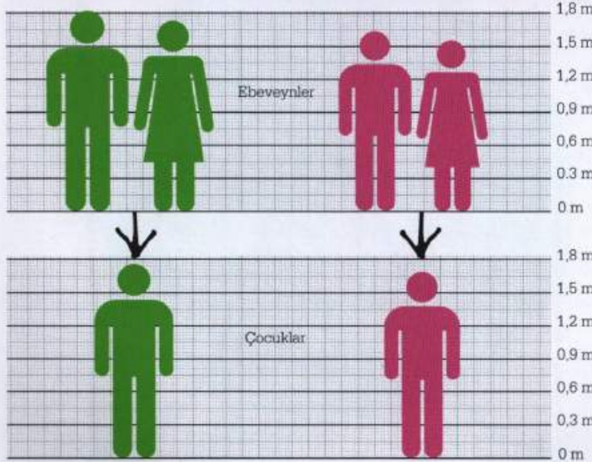


Galton, bir "antropometrik laboratuvar" inşa ederek insanların kafa büyüklüğü ve görüş kalitesi gibi ayırt edici özellikleri hakkında bilgi topladı. Laboratuvarın ürettiği verilerin miktarı öylesine büyüktü ki Galton istatistiksel analiz yürütmek zorunda kaldı.

ederek sonuçların ne kadar olası olduğunu matematiksel olarak göstermek konusunda kararlı, katı bir bilim insanıydı. 1888 tarihli yenilikçi kitabı *Natural Inheritance*'ta (*Doğal Kalıtım*) Galton, aralarında anlamlı bir ilişki olup olmadığına bakmak için iki veri kümesinin nasıl karşılaştırılabileceğini gösterdi.

Benimsediği yaklaşımında, şu anda istatistiksel analizin esas aldığı iki kavramı tespit etti: Korelasyon ve regresyon. Korelasyon, boy ve ağırlık gibi iki rassal değişkenin arasındaki ilişki düzeyinin ölçümüdür. Genellikle aranan, doğrusal bir ilişkidir; yani grafikte basit bir doğruyu veren ve bir değişkenin diğeriyle uyum içinde değişim sergilediği bir ilişki. Korelasyon iki değişken arasında nedensel bir ilişki olduğuna işaret etmez; sadece, beraberce değişik değerler aldıkları anlamına gelir. Regresyondaki amaç, iki değişkenin grafik çizgisi için en iyi denklemi bulup birindeki değişimleri diğerindekiler üzerinden tahmin edebilmektir.

Ortalamaya doğru regresyon



Galton'ın dikkatini çeken şuydu: Çok uzun boylu ebeveynlerin çocukları, ebeveynlerinden daha kısa olma eğilimi gösterirken diğer taraftan çok kısa ebeveynlerin çocukları, ebeveynlerinden biraz daha uzun olma eğilimi gösterir. Ortalamaya doğru regresyona bir örnek olarak, ikinci nesildeki boylar ilkine kıyasla birbirine daha yakın olur.

Standart sapma

Galton'ın başlıca ilgi alanı insan kalıtımıydı ama o yine de envaiçeşit veri kümesi meydana getirdi. Yedi farklı tohum kümesinden yetişen ıtırşahi bitkilerinin ürettiği tohumların büyüklüğünü ölçtü. Ünlü deneyinde Galton en küçük ıtırşahi tohumlarının daha büyük döl verdiğini, en büyük tohumlarınsa daha küçük döl verdiğini gördü. Keşfettiği şey, ölçümlerin eşitleşme eğilimiyle zaman içinde daima ortalama değere doğru çekilmesini ifade eden "ortalamaya doğru regresyondu".

Galton'ın araştırmasından etkilenen Pearson, korelasyon ve regresyonun matematiksel çerçevesini geliştirmek için kolları sıvadı. Yazı tura atışları ve piyango çekilişleriyle enine boyuna yapılan testlerin ardından Pearson, gözlenen değerlerin beklenenden ortalamada ne kadar farklı olduğunu gösteren "standart sapma" adlı ana kavramı ortaya attı. Bu sayıya ulaşabilmek için, tüm değerlerin toplamının değerlerin sayısına bölünmesiyle

> Daha çok veriyle çözülemeyecek gözlemsel problem yoktur.
>
> **Vera Rubin**
> **Amerikalı gök bilimci**

elde edilen ortalamayı değeri buldu. Pearson bunun üzerine, ortalama değere göre alınan farkların karelerinin aritmetik ortalaması anlamına gelen varyansı buldu. Farkların karesi, negatif sayıların yol açacağı problemlerden kaçınmak için alınır, standart sapma da varyasyonun kareköküdür. Pearson ortalama değer ile standart sapmayı bir araya getirdiğinde Galton'ın regresyonunu kesin olarak hesaplayabildiğini fark etti.



Ki-kare testi

1900'de Pearson, Monte Carlo'nun kumar masalarından elde edilen bahis verilerini enine boyuna inceledikten sonra istatistiğin günümüzdeki köşetaşlarından ki-kare testini açıkladı. Pearson'ın amacı, gözlenen değerlerlerle beklenen değerlerin arasındaki farkın anlamlı olup olmadığını ya da basit bir ifadeyle, şansın sonucunu, belirlemekti.

Pearson elindeki kumar verilerini kullanarak hesapladığı olasılık değerlerinin ki-kare (χ^2) adlı tablosunu hazırladı. Tablodaki 0, beklenenden anlamlı bir fark olmadığını (sıfır hipotezi) belirtir, daha büyük değerlerse anlamlı farka işaret eder.

Pearson tabloyu eliyle hazırlama zahmetine katlandı ancak ki-kare tabloları artık bilgisayar yazılımlarıyla üretiliyor. Her veri kümesi için, gözlenen ile beklenen değerlerin arasındaki tüm farkların toplamından bir ki-kare değeri bulunabilir. Ki-kare değerlerini tabloyla kıyaslama yoluyla ve araştırmacının belirlediği "serbestlik derecesi" adlı limitlerin arasında kalan verilerdeki varyasyonların anlamlılığı bulunur.

Galton'ın korelasyonu ve regresyonu ile Pearson'ın standart sapması ve ki-kare testi modern istatistiğin temelini oluşturdu. Sonraları elden geçirilip geliştirilen bu kavramlar halen veri analizinin ana unsurlarıdır. İktisadi davranışları kavramaktan yeni ulaşım bağlantılarının planlanmasına ve kamu sağlığı hizmetlerini iyileştirmeye kadar, modern yaşamın çoğu yönü için bunun taşıdığı önem büyüktür. ■

Karl Pearson



Karl Pearson, 1857'de Londra'da doğdu. Ateist, özgür düşünür ve sosyalist kimlikleriyle 20. yüzyılın en büyük istatistik uzmanlarından biri oldu ama aynı zamanda kınanan soyarıtımı biliminin savunucularındandı.

Pearson, Cambridge Üniversitesinden matematik diplomasını alıp mezun olduktan sonra, öğretmenlik yaptı, ardından da istatistik dalına damgasını vurdu. 1901'de Francis Galton ve evrim bilimcisi Walter F. R. Weldon'la birlikte *Biometrika* istatistik dergisini kurdu, arkasından 1911'de, bir üniversite bünyesinde kurulan dünyanın ilk istatistik bölümünü College London Üniversitesine kazandırdı. Görüşleri yüzünden kendisini sık sık çekişmelerin ortasında buldu. 1936'da hayata veda etti.

Önemli eserleri

1892 *Bilimin Grameri*
1896 *Evrim Teoresine Matematik Katkılar*
1900 *Ölçüt: Değişkenlerin ilişkili olduğu bir durumda, verili bir olası değerden sapmanın rassal örneklemeden kaynaklanmasının makul göründüğü verili bir sistem*



DAHA ÖZGÜR BİR MANTIK BİZİ ÖZGÜRLÜĞÜMÜZE KAVUŞTURUR

MATEMATİĞİN MANTIĞI

KISACA

KİŞİ
Bertrand Russell
(1872–1970)

ALAN
Mantık

ÖNCE
MÖ y. 300 Öklit, *Öğeler*'inde aksiyomatik bir geometri yaklaşımına yer verir.

1820'ler Fransız matematikçi Augustin Cauchy kalkülüsün kurallarını netleştirip matematiğe yeni bir kesinlik kıstası getirir

SONRA
1936 Alan Turing matematikte hangi problemlerin karar verilebilir hangilerinin karar verilemez olduğunu analiz etmek amacıyla matematiksel fonksiyonların bilgisayarla hesaplanabilirliğini araştırır.

1975 Amerikalı mantıkçı Harvey Friedman teoremlerden başlayıp gerisin geriye aksiyomlar yönünde işleyen "tersine matematik" programını geliştirir.

Berber paradoksu tüm erkeklerin **sinekkaydı tıraşlı** olmasının mecbur olduğu hayali bir kasabadır.



Sakalını **kendisi** kesmeyen her erkek, **kasabanın berberinde** tıraş olmalıdır.



Öyleyse berberi kim tıraş eder?



Berber **sakalını kendisi kesiyorsa berberde tıraş olmak** zorunda olan erkeklerin **kategorisinde değildir: çelişki**.

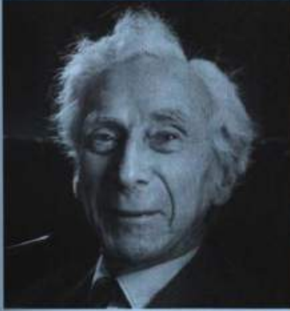


Berber **sakalını kendisi kesmiyorsa berberde tıraş olmak** zorunda olan erkeklerin **kategorisindedir: bir çelişki daha.**

Matematiğin mantığa dayalı ve sabit kurallara tabi olduğu yönündeki genel görüş binyıllar içinde gelişerek şekillenmiştir ve geçmişi Platon, Aristoteles ve Öklit'in eserlerini ürettikleri Antik Yunan dönemine dayanır. George Boole, Gottlob Frege, Georg Cantor, Giuseppe Peano'nun araştırmaları ve David Hilbert'in 1899 tarihli *Foundations of Geometry* (*Geometrinin Temelleri*) yapıtıyla birlikte 19. yüzyılda aritmetik ve geometri yasalarının kesin tanımları yapılmış durumdaydı. Diğer taraftan, Bertrand Russell 1903'te yayımladığı *The Principles of Mathematics*'te (*Matematiğin İlkeleri*), bir matematik alanındaki mantık kusurunu açığa çıkardı. Kitabında Russell paradoksu adıyla bilinen (bir diğer adı, 1899'da benzer bir keşifte bulunan Alman matematikçi Ernst

Ayrıca bkz. Platonik katılar 48–49 ▪ Tasım mantığı 50–51 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Goldbach kestirimi 196 ▪ Turing makinesei 284–89

Bertrand Russell



Bertrand Russell 1872 yılında Galler'deki Monmouthshire kontluğunda bir lordun oğlu olarak dünyaya geldi. Cambridge Üniversitesinde matematik ve felsefe okudu ancak savaş karşıtı etkinlikleri yüzünden 1916'da oradaki akademik görevinden uzaklaştırıldı. Barış yanlılığıyla ünlü bir toplum eleştirmeni olan Russell 1918'de altı ay hapis yattı, bu zaman zarfında *Introduction to Mathematical Philosophy* (*Matematik Felsefesine Giriş*) yapıtını kaleme aldı.

Russell 1930'lu yıllarda ABD'de öğretmenlik yapıyordu ancak düşünceleri yüzünden ahlaken uygunsuz bulunduğu yönündeki bir mahkeme kararı nedeniyle New York'taki bir koleje tayini iptal oldu. 1950'de Nobel Edebiyat Ödülüne layık görüldü, 1955'te Albert Einstein'la birlikte nükleer silahların yasaklanması çağrısında bulundukları ortak bir bildiri yayınladılar. Russell daha sonra Vietnam Savaşına da karşı çıktı. 1970'te hayatını kaybetti.

Önemli eserleri

1903 *Matematiğin İlkeleri*
1908 *Tipler Kuramına Dayalı Matematiksel Mantık*
1910–13 *Principia Mathematica* (Alfred North Whitehead ile birlikte)

Zermelo'nun adını taşıyan Zermelo paradoksudur) bir paradoksu masaya yatırıyordu.

Paradoks, kümeler kuramının bir çelişki barındırdığına işaret ediyordu; sayı ya da fonksiyon kümelerinin nitelikleriyle ilgilenen kümeler kuramı o sıralarda matematiğin esasını oluşturma yolunda hızla ilerlemekteydi. Probleme açıklık getirmek için Russell berber paradoksu olarak bilinen bir analojiyi kullandı. Paradoksta, kasabada sakalını kendisi kesenler hariç her erkek bir berbere tıraş oluyor ve böylece ortaya iki insan kümesi çıkıyordu: Sakalını kendisi kesenler ve berbere tıraş olanlar. Bu durum akla şöyle bir soruyu getirir: Berber sakalını kendisi kesiyorsa iki kümeden hangisine ait olmalıdır?

Russell'ın berber paradoksu, Frege'nin matematiğin mantığı konusuna eğildiği *Basic Laws of Arithmetics*'le (*Aritmetiğin Temel Yasaları*) çelişiyordu. Russell'ın bu çelişkiye dikkat çektiği 1902 tarihli mektubunu aldığında "yıldırım çarpmışa döndüğünü" ifade eden Frege, paradoksun uygun bir çözümünü bir türlü bulamadı.

Tipler kuramı

Bunun üstüne, paradoks için kendi yanıtını üretmeyi amaçlayan Russell bir "tipler kuramı" geliştirdi. Bu kuramda "Tüm kümelerin kümesinin" onu meydana getiren küçük kümelerden farklı olarak ele alındığı bir hiyerarşiyi yaratarak kümeler kuramının ("saf küme kuramı" olarak bilinen) yerleşikleşmiş modeline birtakım kısıtlamalar getirdi. Russell bu sayede paradoksu tamamen atlatmayı başardı. Alfred North Whitehead'le kaleme aldığı, 1910 ile 1913 arasında üç ciltte yayımlanan *Principia Mathematica* başlıklı önemli yapıtta bu yeni mantıksal ilkelerden faydalandı.

Mantıksal boşluklar

1931'de Avusturyalı matematikçi ve filozof Kurt Gödel eksiklik teoremini (birkaç yıl öncesindeki bütünlük teoreminin ardından) yayımladı. 1931 tarihli teoremde varılan sonuç, sayılarla ilgili ifadelerin arasında, doğru olabilse de asla ispatlanamayacak birtakım ifadelerin daima bulunacağı yönündeydi. Dahası, düpedüz daha fazla aksiyom katmak suretiyle matematiğin hacmini büyütmek daha fazla "eksikliğe" yol açacaktır. Bu demekti ki Russell, Hilbert, Frege ve Peano'nun matematik uğrunda eksiksiz mantıksal çerçeveler geliştirmek üzere ürettikleri eserler, onlar ne kadar sıkı tutmaya çabalarsa çabalasın kaçınılmaz olarak mantısal boşluklar içerecekti.

Gödel'in teoremi, matematikte Goldbach kestirimi gibi henüz ispatlanmamış bazı teoremlerin asla ispatlanamayabileceği imasını da taşıyordu. Gelgelelim bunun caydıramadığı matematikçiler Gödel'i haksız çıkarmak için emek harcamaya kararlılıkla devam ettiler. ■

> Her iyi matematikçi en azından yarı yarıya filozoftur, her iyi filozof da en azından yarı yarıya matematikçidir.
> **Gottlob Frege**



EVREN DÖRT BOYUTLUDUR

MINKOWSKI UZAYI

KISACA

KİŞİ
Hermann Minkowski
(1864–1909)

ALAN
Geometri

ÖNCE
MÖ y. 300 *Öğeler* kitabında Öklit, üç boyutlu uzay geometrisini tanıtır.

1904 *The Fourth Dimension* (*Dördüncü Boyut*) kitabında Charles Hinton dört boyutlu bir küpe "hiperküp" (tesseract) terimini yakıştırır.

1905 Fransiz bilim insanı Henri Poincaré'nin aklına, zamanı uzaydaki dördüncü boyut yapma düşüncesi gelir.

1905 Albert Einstein özel görelilik kuramını açıklar.

SONRA
1916 Einstein genel görelilik kuramını anahatlarıyla anlattığı başlıca makalesinde, kütleçekimini uzayzamandaki bir eğrilik olarak açıklar.

Dünyanın bizim alıştığımız görünümünde üç boyut vardır (uzunluk, genişlik ve yükseklik) ve bunlar Öklit'in geometrisiyle matematiksel olarak büyük oranda açıklanabilirler. Gelgelim Alman matematikçi Hermann Minkowski 1907'deki bir konuşmasında, görünmez dördüncü boyut olarak zamanı ekleme yoluyla yarattığı uzayzaman kavramını açıkladı. Evrenin içyüzünün anlaşılmasında bu kavramın rolü büyüktür. Einstein'ın görelilik kuramının matematik çerevesini uzayzaman kavramı sağlamış, bilim insanlarının sonradan bu kuramı geliştirip kapsamını büyütmesine olanak vermiştir.

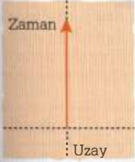
Bilim insanları, üç boyutlu Öklitçi geometriyle evrenin tamamının açıklanıp açıklanamayacağını ilk olarak 18. yüzyılda sorgulamaya başladı. Matematikçiler Öklitçi olmayan geometri çerçeveleri geliştirmeye başlıyor, kimileri de potansiyel bir boyut olarak zamanı dikkate alıyordu. Matematiği harekete geçiren, ışık oldu.

Uzayzaman, eğriliği sonsuza ulaşacak kadar büküldüğü zaman bir kara delik oluşur. Eğiriliğin sonsuza ulaştığı yer, deliğin merkezi olur. Işık bile deliğin muazzam kütleçekiminden kaynaklanan çekişten kaçmaya yetecek kadar hızlı değildir.



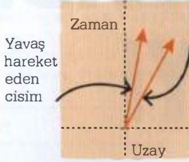
Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–83 ▪ Laplace'ın şeytanı 218–19 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Poincaré kestirimini ispatlamak 324–25

Hareketsiz cisim



Hareketsiz bir cismin hayat çizgisi, uzayda hareket etmediği için dikeydir.

Hareketli cisimler



Yavaş olan cismin hayat çizgisi, uzayın ekseni boyunca daha yavaş ilerlediği için daha diktir.

Işık hızıyla hareket eden cisim



Bu hayat çizgisinin açısı 45°'dir; zaman ekseni ile uzay ekseni 1:1 oranındadır.

1860'lı yıllarda İskoç bilim insanı James Clerk Maxwell, ışığın kaynağının hızı ne olursa olsun, ışığın hızının aynı olduğunu buldu. Bunun üzerine matematikçiler ışığın sonlu hızının uzay ve zamanın koordinat sistemindeki yerini anlamaya çalışmak maksadıyla Maxwell'in denklemlerini geliştirdiler.

Göreliliğin matematiği

1904'te Hollandalı matematikçi Henrik Lorentz uzaysal bir cisim ışık hızına yaklaştıkça kütle, uzunluk ve zamanın nasıl değiştiğini açığa çıkarmak amacıyla "dönüşümler" adlı bir dizi denklem geliştirdi. Bir yıl sonra Albert Einstein özel görelilik kuramını geliştirerek ışık hızının evrenin her yerinde aynı olduğunu ispatladı. Zaman mutlak değil, göreli bir nicelik olarak farklı yerlerde farklı hızlarda ilerler ve uzayla birlikte bir dokuyu oluşturur.

Minkowski, Einstein'ın kuramını matematiğe dönüştürdü. Uzay ve zamanın dört boyutlu bir uzayzamanın bileşeni olduğunu, uzay ve zamandaki her noktanın bir konumu olduğunu gösterdi. Konumlar arasındaki hareketi kuramsal bir çizgiyle simgeledi. Eksenleri uzay ve zaman olarak belirlenen bir grafikte gösterilebilen bu çizgiye "hayat çizgisi" denir. Durağan bir cisim dikey bir hayat çizgisi meydana getirir, hareket eden bir cismin hayat çizgisiyse belli bir açıya sahiptir (bkz. yukarıda). Işık hızıyla hareket eden bir cismin hayat çizgisinin açısı 45°'dir. Minkowski'ye göre hiçbir hayat çizgisi bu açıyı aşamaz; ama gerçekte, üç uzay ekseni ve bir de zaman ekseni vardır, dolayısıyla 45° açılı hayat çizgisi aslında, dört boyutlu bir şekil olan bir "hiperkonidir". Hiçbir şey ışıktan hızlı ilerleyemeyediği için bütün fiziksel gerçeklik onun içerisinde tutulur. ■

> Bundan böyle uzay da zaman da başlı başına gölgede kalmıştır, yalnızca ikisinin bir nevi birliği bağımsız bir gerçekliği muhafaza edecektir.
> **Hermann Minkowski**



Hermann Minkowski

1864 yılında Aleksotas'ta (günümüzde Litvanya'dadır) doğan Minkowski 1872'de ailesiyle birlikte Prusya'nın Königsberg şehrine taşındı. Çocukken matematiğe yeteneği olduğunu belli etti ve Könisgberg Üniversitesindeki öğrenimine 15 yaşında başladı. 19 yaşına geldiğinde matematik alanında Paris Büyük Ödülü'nü kazanmıştı. Bonn Üniversitesinde öğretim üyesi olduğundaysa 23 yaşındaydı. 1897'de Zürih'te genç Albert Einstein'a ders verdi.

1902'de Göttingen'e taşındıktan sonra Minkowski fiziğin matematiğine, özellikle de ışık ve maddenin etkileşimine merak sardı. Einstein'ın 1905'te özel görelilik kuramını açıklaması, Minkowski'yi, uzay ve zamanın dört boyutlu bir gerçekliğin bileşenleri haline getirip kendi kuramını geliştirmeye teşvik etti. Onun bu düşüncesinden ilham bulan Einstein 1915'te genel görelilik kuramını üretti, ama Minkowski bu tarihte hayatta değildi, apandisit yırtılması nedeniyle 44 yaşında vefat etmişti.

Önemli eseri

1907 *Raum und Zeit (Uzay ve Zaman)*



NE ALELADE BİR SAYI

TAKSİ SAYILARI

KISACA

KİŞİ
Srinivasa Ramanujan
(1887–1920)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1657 Fransa'da matematikçi Bernard Frénicle de Bessy ilk "taksi" sayısı (*taxicab number*) olan 1729'un özelliklerinden söz eder.

1700'ler İsviçreli matematikçi Leonhard Euler dördüncü kuvvetten (üssü dört olan) iki sayının toplamı olduğu iki ayrı yoldan gösterilebilen en küçük sayının 635.318.657 olduğunu hesaplar.

SONRA
1978 Belçikalı matematikçi Pierre Deligne sayı kuramı hakkındaki yapıtıyla Fields Madalyasını kazanır; ilk olarak Ramanujan'ın öne sürdüğü modüler formlar kuramındaki bir kestirimin ispatı da bu yapıtta yer alır.

Bir "taksi" sayısı, yani Ta(*n*), küpü alınmış iki pozitif tamsayının toplamı olduğu *n* (adet) farklı yoldan gösterilebilen en küçük sayıdır. Adını 1919'da yaşanmış bir anıdan alır: İngiliz matematikçi G. H. Hardy yetiştirmekte olduğu Srinivasa Ramanujan'ı hastalığı sebebiyle ziyaret etmek için Londra'daki Putney'e gitmektedir. 1729 sayılı bir taksiden inen Hardy, "Ne alelade bir sayı, değil mi?" diye sorar. Ramanujan aynı fikirde değildir ve 1729'un, iki pozitif küpün toplamı olduğu iki farklı yoldan gösterilebilen en küçük sayı olduğunu anlatır. Hardy'in bu hikâyeyi sık sık anlatması 1729'u matematikteki en ünlü sayılardan bir haline getirdi. Bu sayıya özgü niteliği ilk not eden, Ramanujan değildi: Fransız matematikçi Bernard Frénicle de Bessy de 17. yüzyılda aynı konuyu yazılarında işlemişti.

Kavramı genişletmek

Taksi hikâyesi sonraki matematikçileri Ramanujan'ın fark ettiği niteliği incelemeye ve daha çeşitli şekillerde uygulamaya teşvik etti. İki pozitif küpün toplamı olarak üç, dört veya daha çok yoldan gösterilebilecek en küçük sayının peşine düşüldü. *n*'nin tüm değerleri için Ta(*n*)'nin var olup olmadığı da

1729, iki pozitif küpün toplamına iki farklı şekilde eşit olan **en küçük sayıdır.**

$10^3 + 9^3 = 1729$

$1^3 + 12^3 = 1729$

Alelade bir sayı değil.

Ayrıca bkz. Üçüncü derece denklemler 102–05 ▪ Eliptik fonksiyonlar 226–27 ▪ Catalan kestirimi 236–37 ▪ Asal sayı teoremi 260–61

Her değer için Ta(n) var mıdır?

Ta(*n*)'nin *n*'nin her değeri için var olduğu, 1938 yılında kuramsal olarak ispatlandı, ama yine de daha büyük taksi sayıları için arayış sürüyor. Matematikçiler bilgisayar hesaplamalarının sunduğu olanaklara karşın Uwe Hollwebach'a ait Ta(6) keşfini geride bırakabilmiş değil.

Tarih	Sayı	Değer	Keşfeden
N/A	Ta(1)	2	N/A
1657	Ta(2)	1729	de Bessy
1957	Ta(3)	87.539.319	Leech
1989	Ta(4)	6.963.472.309.248	Rosenstiel, Dardis, Rosenstiel
1994	Ta(5)	48.988.659.276.962.496	Dardis
2008	Ta(6)	24.153.319.581.254.312.065.344	Hollerbach

başka bir soruydu; Hardy ve İngiliz matematikçi Edward Wright, var olduğunu 1938'de ispatladı (bir varlık ispatı) ama öte yandan Ta(*n*)'nin her durumda bulunmasını sağlayan bir yöntemi geliştirmenin güç olduğu anlaşıldı.

Kavramın genişletilmesiyle belirlenen Ta(*j*, *k*, *n*) ifadesiyle aranan sayıysa şudur: farklı herhangi sayıda pozitif tamsayının (*j*) her birinin herhangi bir kuvvetinin (*k*) *n* ayrı şekilde toplamı olan en küçük pozitif sayı. Örneğin Ta(4, 2, 2) ile, dört karenin iki farklı şekilde toplamı olan en küçük sayının bulunmasını istenir: 635.318.657.

Süregelen güncellik

Taksi sayıları Hardy ve Ramanujan'ın araştırma konularından sadece biriydi. Eğildikleri başlıca konu asal sayılardı. Ramanujan'ın *x*'ten küçük kaç asal sayı olduğunu tamı tamına yansıtan bir *x* fonksiyonu bulduğu yönündeki iddiası Hardy'yi heyecanlandırmasına rağmen, Ramanujan gerekli ispatı sunamadı.

Taksi sayılarının uygulamalı bir kullanımı neredeyse hiç yoktur ama bilginleri yine de acayiplikleriyle etkilerler. Matematikçiler günümüzde taksi (*taxicab*) formülüyle aynı temele dayanan ve hem pozitif hem de negatif küplerle hesaplama olanağı sunan bir uyarlamayla *cab-taxi* sayılarını aramaktalar. ■

> Tanrı'ya dair bir düşünce ifade etmeyen bir denklemin benim gözümde hiçbir anlamı yoktur.
> **Srinivasa Ramanujan**



Srinivasa Ramanujan

1887'de Hindistan'ın Madras şehrinde dünyaya gelen Ramanujan olağanüstü matematik kabiliyetini daha küçük yaşta belli ediyordu. Ülkesinde layığınca takdir görmesinin zor olduğunu fark edince cesaret isteyen bir hamle yapıp o sırada Cambridge Üniversitesine bağlı Trinity Kolejinde öğretim üyesi olan G. H. Hardy'ye bulduğu birtakım sonuçları gönderdi. Hardy eline geçen notlarla ilgili fikrini açıkladı: Sonuçların "birinci sınıf" bir matematikçinin işi olduğu kesindi ve de doğru olmalılardı çünkü uydurulmalarına imkân yoktu. 1913'te Hardy, Ramanujan'ı Cambridge'de onunla birlikte çalışmaya davet etti. Kurdukları işbirliği son derece verimli oldu: Taksi sayılarına ek olarak, Ramanujan pi değerinin yüksek bir hassasiyetle elde edilmesini sağlayan bir formülü de geliştirdi.

Ancak Ramanujan sağlık sorunlarıyla boğuşuyordu. 1919'da Hindistan'a döndü ve bir yıl sonra vefat etti (muhtemelen yıllar önce yakalandığı amipli dizanteri yüzünden). Ondan geriye kalan birçok not defterinden günümüzdeki matematikçiler halen faydalanmaktadır.

Önemli eseri

1927 *Srinivasa Ramanujan'ın Toplu Makaleleri*



BİR MİLYON DAKTİLOYA PAT KÜT VURAN BİR MİLYON MAYMUN

SONSUZ MAYMUN TEOREMİ

KISACA

KİŞİ
Émile Borel (1871–1956)

ALAN
Olasılık

ÖNCE
MÖ 45 Romalı filozof Cicero dünyanın atomların gelişigüzel bir birleşiminden oluşması ihtimalinin son derece düşük olduğunu iddia eder.

1843 Antoine Augustin Cournot fiziksel ile kılgısal (pratikteki) kesinliği birbirinden ayırır.

SONRA
1928 İngiliz Fizikçi Arthur Eddington olasılıksızın (*improbable*) olanaksız olduğu yönündeki görüşünü geliştirir.

2003 İngiltere'nin Plymouth Üniversitesindeki bilim insanları Borel'in kuramını gerçek maymunlar ve bir bilgisayar klavyesiyle test ederler.

2011 Amerikalı bilgisayar programcısı Jesse Anderson'ın bir milyon sanal maymun yazılımı Shakespeare'in eserlerinin tamamını üretir.

20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi Émile Borel olasılıksızlığı (olayların meydana gelme şansının çok küçük olduğu durumları) araştırdı. Borel'in vardığı sonuç, yeterince küçük bir olasılığın asla gerçekleşmeyeceği yönündeydi. Muhtemel olmayan olayların olasılığını ilk inceleyen o değildi. MÖ 4. yüzyılda Antik Yunan filozofu Aristoteles *Metafizik*'te, dünyayı tamamen şans eseri bir araya gelen atomların oluşturduğunu önerdi. Ondan üç yüzyıl sonra Romalı filozof Cicero'un tezine göre, bu o kadar düşük bir ihtimaldi ki esasen olanaksızdı.

Olanaksızlığı tanımlamak

Olasılıksızlık ile olanaksızlık arasındaki denge son iki binyılda muhtelif düşünürlerce irdelendi. 1760'lı yıllarda Fransız matematikçi Jean d'Alembert bir olayın

Sonsuz bir zaman zarfında, sonsuz sayıda **olay** yaşanacaktır.



Sonsuz süreyle tuşlara basan bir maymun her harfi, her **olanaklı birleşimiyle, sonsuz** defa üretecektir



Dolayısıyla **maymun her sonlu metni sonsuz** defa üretecektir.



Matematiksel olasılık gereğince, sonsuz süreyle tuşlara basan bir maymun önünde sonunda Shakespeare'in eserlerinin tamamını yazacaktır.

Ayrıca bkz. Olasılık 162–65 ▪ Büyük sayılar yasası 184–85 ▪ Normal dağılım 192–93 ▪ Laplace'ın şeytanı 218–19 ▪ Sonluötesi sayılar 252–53

> Fiziksel olarak olanaksız olay, haliyle, olasılığı sonsuz küçük olaydır. Matematiksel olasılık kuramını geçerli kılacak biricik söz budur.
>
> **Antoine Augustin Cournot**

meydana gelmesiyle meydana gelmemesi ihtimallerinin eşit olduğu bir deneme silsilesinde, olayın arka arkaya defalarca meydana gelmesinin mümkün olup olmadığını (örneğin yazı tura atan birin arka arkaya iki milyon kez "tura" atıp atamayacağını) araştırdı. Fransız matematikçi Antoine Augustin Cournot'ysa 1843'te bir koniyi ucunun üzerinde dengede tutma ihtimalini araştırdı. Bunun olanaklı olmakla beraber ihtimalinin çok küçük olduğunu ileri sürdü ve fiziksel bir kesinlik (koninin dengede durması gibi, fiziksel olarak gerçekleşebilecek bir olay) ile kılgısal kesinlik (kılgısal bakımdan olanaksız sayılacak denli küçük ihtimal) arasındaki ayırımı yaptı. Cournot yer yer Cournot ilkesi olarak anılan tezinde, olasılığı çok küçük olan bir olayın gerçekleşmeyeceğini vurguluyordu.

Sonsuz maymun

Borel şansın tek yasası adını verdiği yasasında kılgısal kesinlik için bir ölçek belirledi. İnsan ölçeğindeki olaylar için, olasılığı 10^{-6}'dan (yani 0,000001'den) küçük olayları olanaksız saydı. Olanaksızlığı tarif etmek için bir de ünlü örnek buldu: Daktilo tuşlarına gelişigüzel basan maymunlar önünde sonunda Shakespeare'in eserlerinin tamamını yazacaktır. Bu sonuç büyük ölçüde olasılıksızdır ancak matematiksel olarak sonsuz bir zaman zarfında (veya sonsuz sayıda maymunla) gerçekleşmek zorundadır. Borel maymunların Shakespeare'in tüm eserlerini yazmasının olanaksızlığı matematiksel olarak ispat edilemese bile, matematikçilerin bunu olanaksız sayması ihtimalinin çok küçük olacağını belirtti. Maymunların Shakespeare'in eserlerini yazdığı düşüncesi insanların merakını uyandırınca, Borel'in yasası sonsuz maymun teoremi olarak meşhur oldu. ▪



Mevcut kaos düzeyinden dolayı rasgele seçimlerin bazı durumlarda geleneksel ekonomi kuramlarından daha iyi sonuç verdiği borsalarda Borel'in kuramı sık sık uygulanır.

Émile Borel



Fransa'nın Saint-Affrique kasabasında dünyaya gelen Émile Borel bir matematik dehasıydı, 1893 yılında École Normale Supérieure'den birincilikle mezun oldu. Dört yıl Lille'de ders verdikten sonra döndüğü École'de arka arkaya yayımladığı parlak makaleleriyle diğer matematikçileri hayran etti.

Borel'in en çok tanınan ürünü sonsuz maymun teoremiydi ama kalıcı başarısı, modern dönemdeki karmaşık fonksiyon anlayışına (belirli bir çıktıyı elde etmek için bir değişkenin hangi oranda değiştirilmesi gerektiğini göstermek) zemin hazırlamaktı. Borel I. Dünya Savaşında Savaş Bakanlığında çalıştı, daha sonra donanma bakanı oldu. Almanlar'ın II. Dünya Savaşındaki Fransa işgalinde hapse atıldı, serbest bırakıldıktan sonra Direniş safında çarpıştığı için Croix de Guerre kahramanlık nişanına layık görüldü. 1956'da Paris'te hayata veda etti.

Önemli eserleri

1913 *Le Hasard (Şans)*
1914 *Principes et formules classiques du calcul des probabilités (Olasılığın ilkeleri ve klasik formülleri)*



CEBRİN ÇEHRESİNİ O DEĞİŞTİRDİ

EMMY NOETHER VE SOYUT CEBİR

KISACA

KİŞİ
Emmy Noether (1882–1935)

ALAN
Cebir

ÖNCE
1843 Alman matematikçi Ernst Kummer ideal sayılar (tamsayılar halkasındaki idealler) kavramını geliştirir.

1871 Richard Dedekind, Kummer'in halkalar ve idealler için daha genel tanımlar yapma fikrini ilke edinir.

1890 David Hilbert halka kavramını elden geçirip geliştirir.

SONRA
1930 Hollandalı matematikçi Bartel Leendert Van der Waerden soyut cebrin ayrıntılı olarak işlendiği ilk makaleyi yazar

1958 İngiliz matematikçi Alfred Goldie, Noether halkalarının daha basit halka türleri üzerinden anlaşılıp analiz edilebileceğini ispatlar.

Analiz ve geometrinin matematiğin önde gelen alanları olduğu 19. yüzyılda cebrin gördüğü rağbet hatırı sayılır ölçüde düşmüştü. Sanayi Devrimi boyunca kuramsal araştırma alanlarından ziyade uygulamalı matematiğe öncelik verildi. 20. yüzyılın başlarında "soyut" cebrin yükselişe geçmesi her şeyi değiştirdi ve büyük oranda Alman matematikçi Emmy Noether'in yenilikleri sayesinde matematiğin başlıca alanlarından biri oldu.

Cebre eğilen ilk kişi Noether değildi. Joseph-Louis Lagrange, Carl Friedrich Gauss ve İngiliz matematikçi Arthur Cayley gibi cebir kuramı üzerine yapıtlar üretmiş matematikçiler vardı ama konunun ilgi görmesini sağlayan, Alman matematikçi Richard Dedekind'in cebirsel yapıları incelemeye başlaması oldu. Toplama ve çarpma gibi iki işlem içeren eleman kümelerini ifade eden halka kavramını tasarladı. Halka, "idealler" (bir elemenlar altkümesi) denen parçalara ayrılabilir. Örneğin tek tamsayılar kümesi, tamsayılar halkasındaki bir idealdir.

> Benim yöntemlerim aslında çalışma ve düşünme yöntemleridir; her yerde bir isim belirtilmeden kullanılmalarının sebebi de bu.
> **Emmy Noether**

Önemli yapıtlar

Noether soyut cebir çalışmalarına I. Dünya Savaşından kısa bir süre önce, bazı cebirsel ifadelerin diğer nicelikler değişirken nasıl aynı kaldığını açıklayan değişkenler kuramını araştırmasıyla başladı. Bu çalışması sayesinde 1915 yılında fiziğe büyük katkı verdi; enerjinin ve kütlenin korunumu yasalarının her birinin farklı bir simetri türüne karşılık geldiğini ispatladı. Örneğin elektrik yükünün korunumu, dönel simetriyle ilintilidir. Şimdi Noether'in teoremi olarak anılan bu ispat, genel görelilik kuramını ele alış tarzından dolayı Einstein'dan övgü aldı.

Ayrıca bkz. Cebir 92–99 ▪ Binom teoremi 100–01 ▪ Denklemlerin cebirsel çözümü 200–01 ▪ Cebrin temel teoremi 204–09 ▪ Grup kuramı 230–33 ▪ Matrisler 238–41 ▪ Topoloji 256–59

Matematikçiler, matematiksel nesneleri ve **onlarla yapılan işlemleri** genelleştirmek maksadıyla **soyut cebir** denen bir sistemi yarattılar.

↓

Küme, bir araya getirilmiş **nesnelerin** veya **elemanların** bütünüdür (örneğin tamsayılar).

↓

Grup, bir işlem içeren (toplama gibi) ve belirli aksiyomlara uyan bir tür kümedir.

↓

Halka, çoğu zaman çarpma olan **ikinci bir işlem** içeren **bir grup türüdür. Birleşmelilik aksiyomunu** da içerir, bu sebeple her işlem herhangi bir sırayla, sonuca etki etmeden yapılabilir.

↓

Noether'in halka kuramına katkıları, cebirsel yapılara yönelik anlayışımızı ilerletmiştir.

1920'li yılların başında Noether, çalışmalarında halkalar ve idealler üzerinde yoğunlaştı. 1921 tarihli ve *Halkalarda İdealler Kuramı* başlığını taşıyan önemli bir makalede, çarpma işleminde sayıların sonucu etkilemeksizin yer değiştirebildiği özel bir "değişmeli halkalar" kümesindeki idealleri inceledi. 1924 tarihli bir makalede, bu değişmeli halkalardaki her idealin, asal ideallerin benzersiz birer çarpımı olduğunu ispatladı. Zamanının en parlak matematikçilerinden biri olan Noether, halka kuramına sunduğu katkılarla soyut cebir alanının büsbütün geliştirilmesi için gerekli zemini hazırladı. ■

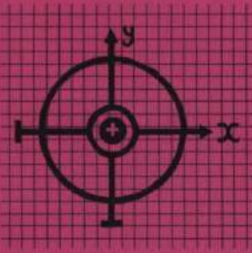


Emmy Noether

1882'de dünyaya gelen Emmy Noether, Almanya'da Yahudi bir kadın olarak 20. yüzyıl akademisinde eğitime erişmekte, kabul görmekte, hatta temel düzeyde bir iş olanağı bulmakta bile zorlandı. Babasının da öğretmenlik yaptığı Erlangen Üniversitesinde matematik becerileri sayesinde 1908'de işe girmeyi başardı, ama öte yandan 1923 yılında işten ayrılana kadar hiç ücret almadı. Daha sonra Göttingen'de de benzer şekilde ayrımcılığa maruz kaldığında çalışma arkadaşlarının verdiği mücadele sayesinde fakülteye resmen dahil edilebildi. Nazilerin güçlenmesinin sonucunda 1933'te işten çıkarıldı. Bunun üzerine ABD'ye taşınıp Bryn Mawr Kolejinde ve İleri Araştırmalar Enstitüsünde çalıştı. 1935'te hayata veda etti.

Önemli eserleri

1921 *Halkalarda İdealler Kuramı*
1924 *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie im algebraischen Zahlkörper (Cebirsel Oyutlarda İdeal Kuramının Soyut İnşası)*



YAPILAR MATEMATİKÇİLERİN SİLAHIDIR

BOURBAKI GRUBU

KISACA

KİŞİLER
André Weil (1906–1998), **Henri Cartan** (1904–2008)

ALANLAR
Sayı kuramı, cebir

ÖNCE
1637 René Descartes düz bir yüzeydeki noktaların tanımlanmasına olanak tanıyan koordinat geometrisini meydana getirir.

1874 Georg Cantor kümeler ve onların altkümelerinin birbirleriyle ilişkilerini açıklayan kümeler kuramını meydana getirir.

1895 Henri Poincaré, *Konum Analizi*'nde cebirsel topolojinin zeminini hazırlar

SONRA
1960'lar Kümeler kuramına odaklanan Yeni Matematik hareketinin ünü Amerika ve Avrupa'daki okullara yayılır.

1995 Andrew Wiles, Fermat'nın son teoremine ilişkin nihai ispatını yayımlar.

Rus matematik dehası Nicolas Bourbaki 20. yüzyılın en üretken ve etkili matematikçilerinden biriydi. *Éléments de Mathématique* (*Matematiğin Öğeleri*, 1960) başlıklı muhteşem yapıtı, üniversite kütüphanelerinin olmazsa olmazıdır ve sayısız matematik öğrencisi alanının gerektirdiği donanımını onun bu yapıtından öğrenmiştir.

Ne var ki Bourbaki hiç var olmamıştı. I. Dünya Savaşının yıkımından geriye kalan boşluğu doldurmaya çabalayan genç Fransız matematikçilerin 1930'lu yıllarda uydurduğu bir karakterdi. Diğer ülkeler akademis-

Fransız matematikçilerden oluşan bir grup, mevcut durumundan dolayı **Fransız matematiğinden ümidi kesince...**

...matematiğe **yaklaşımlarındaki kesinliği artırmak** istediler.

...yaratıcılığa dayalı tahmini sonuçlara bir son vermek istediler.

...cebri, geometrik şekiller üzerinden düşünmek istediler.

Ancak, **misillemeye** maruz kalmaktan çekiniyorlardı ve **gizlice çalışmak** istediler. Bu sebeple...

...yazılarını **Nicolas Bourbaki** takma adıyla **yayımladılar.**

Ayrıca bkz. Koordinatlar 144–51 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Kelebek etkisi 294–99 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23 ▪ Poincaré kestirimini ispatlamak 324–25



Bourbaki grubu, Temmuz 1935'teki ilk Bourbaki toplantısında fotoğraf çekilirken poz veriyor. Aralarında, Henri Cartan (ayakta, en solda) ve André Weil (ayakta, soldan dördüncü) var.

yenlerini evlerinden çıkarmamış, diğer taraftaysa Fransız matematikçiler siperlerindeki yurttaşlarına katılmış ve bir nesil öğretmen canından olmuştu. Fransız matematiği köhneleşmiş ders kitaplarına ve öğretmenlere mahkûm kalmıştı.

Matematiği yenilemek

Bazı genç öğretmenlerin düşüncesine göre, Fransız matematiği kesinlikten ve kurallılıktan yoksun olduğu için bu hale düşmüştü. Üst nesil matematikçilerin yaratıcı tahminlerle sonuca gittiğini düşünüyor, mesela Henri Poincaré'nin kaos kuramını ve matematiksel fiziği geliştirirken benimseğini düşündükleri bu yaklaşıma şüpheyle bakıyorlardı.

André Weil ve Henri Cartan, Strasbourg Üniversitesinin iki genç öğretim üyesi olarak meseleye 1934'te el attılar. Geçmişte École Normale Supérieur'de okumuş altı öğrenciyi, iddialı bir projede (matematikte devrim yapacak yeni bir bilimsel eseri yazmak) yer almaları için ikna etmek ümidiyle Paris'te öğle yemeğine davet ettiler.

Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné ve René de Possel'in de içinde yer aldığı grup, matematiğin tüm alanlarının bir bütün halinde işlendiği bir araştırma ürünü yaratmak üzere anlaştılar. Dieudonné'nin yöneticiliğinde düzenli aralıklarla toplanan grup, aralarında *Éléments de Mathématique*'in başı çektiği kitaplarını peş peşe çıkarmaya başladı. Çalışmaları muhtemelen tartışmalara yol açacağı için de Nicolas Bourbaki takma adını kullandılar.

Grubun amacı, matematiği arındırıp özüne döndürmek ve üzerinde yükselebileceği bir temele oturtmaktı. Çalışmaları 1960'lı yıllarda gelip geçici bir merak uyandırmakla beraber, sonradan anlaşıldı ki öğretmenler için de öğrenciler için de fazlasıyla radikaldi. Grup, matematik ve fizikteki yeni buluşlarla sık sık ters düşüyor, bütün dikkatlerini soyut matematiğe verdiklerinden uygulamalı matematikle hemen hiç ilgilenmiyorlardı. Belirsizlik içeren konulara, mesela olasılığa, Bourbaki'nin araştırmalarında yer yoktu.

Grup bütün bunlara rağmen çok çeşitli matematik konularına, özellikle de kümeler kuramına ve cebirsel geometriye katkıda bulundu. Gizlilik içinde hareket eden ve 50'nci yaşına basan üyelerinin istifa etmek zorunda olduğu grup halen faal ancak Bourbaki artık nadiren eser yayımlıyor. Son iki sayıları, 1998 ve 2012 yıllarında yayımlandı. ▪

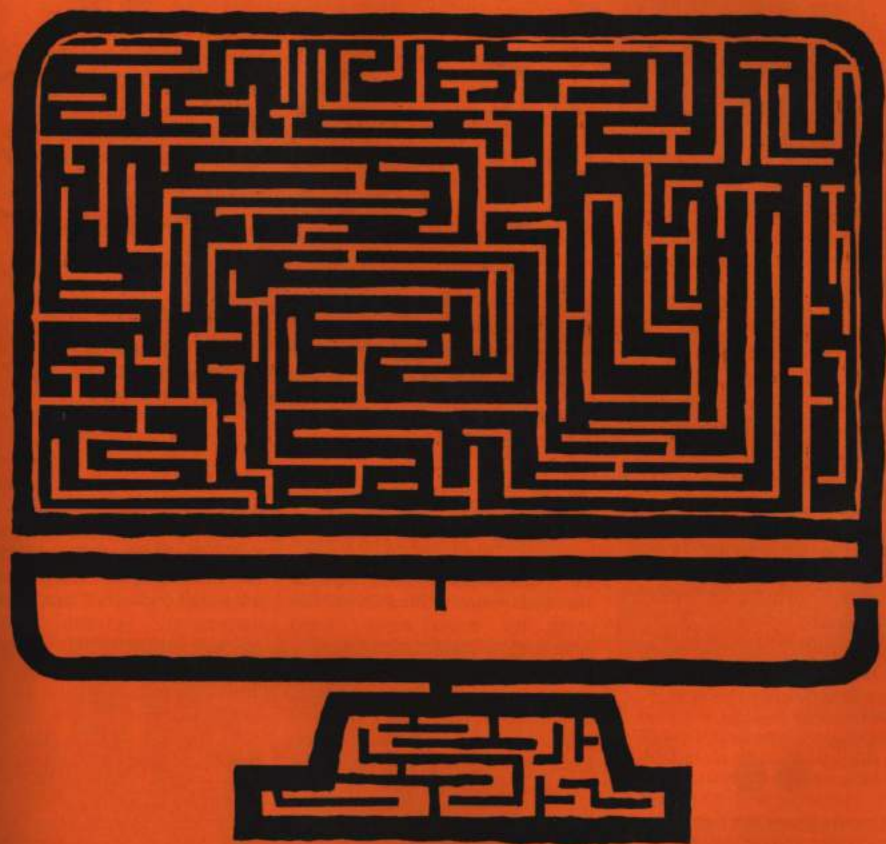
Bourbaki'nin mirası

Topoloji ve kümeler kuramı, başka bir ifadeyle sayılarla şekillerin buluşması, Bourbaki'nin gözünde matematiğin kökünü temsil ediyor ve grubun çalışmalarının merkezinde bulunuyordu. Şekillerle sayıların arasındaki bağlantıyı ilk defa 17. yüzyılda René Descartes koordinat geometrisiyle, geometriyi cebre dönüştürerek kurmuştu. Bourbaki'yse bağlantının kurulmasına, Descartes'ın izlediği yolun tersinden gidip cebri geometriye dönüştürmek suretiyle, belki de kalıcı mirasları olan cebirsel geometriyi yaratarak yardımcı oldu. Fermat'nın son teoremini nihayet İngiliz matematikçi Andrew Wiles'ın ispat etmesinin (Wiles ispatını 1995'te yayımladı) önünü açan, tamamen olmasa bile kısmen Bourbaki'nin cebirsel geometri konulu çalışmasıydı.

Kimi matematikçiler cebirsel geometrinin gelecek vadeden, büyük ve henüz açığa çıkarılmamış bir potansiyel taşıdığına inanıyor. Hatta akıllı kart ve cep telefonlarındaki kodların programlanması gibi gerçek dünya uygulamaları halihazırda mevcuttur.

HESAPLANABİLİR HER DİZİYİ HESAPLAYACAK TEK BİR MAKİNE

TURING MAKİNESİ



KISACA

KİŞİ
Alan Turing (1912–54)

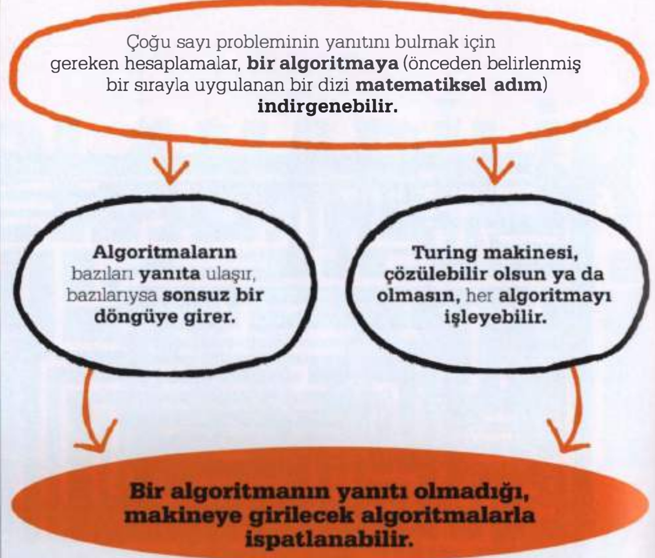
ALAN
Bilgisayar bilimi

ÖNCE
1837 Birleşik Krallık'ta Charles Babbage ondalık sistemin kullanıldığı mekanik bir bilgisayar olan Analitik Makineyi tasarlar. Üretilseydi ilk "Turing-bütün" (*"Turing complete"*) aygıt olacaktı.

SONRA
1937 Claude Shannon mantık kurallarıyla işleyen dijital devreler oluşturmak amacıyla Boole cebrinin kullanıldığı elektrik anahtarlama devrelerini tasarlar.

1971 Amerikalı matematikçi Stephen Cook, P ile NP'nin ilişkisi hakkındaki problemi ortaya atar. Problemle amaçlanan, çabucak doğrulanabilen matematik problemlerinin bazılarını ispatlamanın, bilgisayarların muazzam hesap gücüyle dahi neden milyarlarca yıl gerektirdiğini anlamaktır.

"Hiç yanılmaması beklenen bir makine aynı zamanda zeki olamaz."
Alan Turing



Her ne kadar Alan Turing'den sık sık "dijital bilgisayarın babası" diye söz edilse de bu unvana uygun görülmesini sağlayan Turing makinesi fiziki değil varsayımsal bir aygıttı. Bir ilkörnek bilgisayar inşa etmek yerine Turing, Alman matematikçi David Hilbert'in 1928'de ortaya attığı *Entscheidungsproblem*'i (karar verme problemi) çözmek üzere bir düşünce deneyine başvurdu. Nasıl ki aritmetik, geometri ve diğer matematik alanlarının basitleştirilebilmesi o dönemde mümkün addediliyorsa, mantığın da bir dizi kural ya da aksiyom biçiminde basitleştirilmek suretiyle kesinlik düzeyinin artırılması olasılığı Hilbert'in ilgisini çekmişti. Hilbert bir algoritmanın (verili bir sırayla kullanılan verili bir dizi talimat aracılığıyla belirli bir matematik problemini çözmeye yarayan bir yöntem), problemin bir çözümüne ulaşıp ulaşamayacağını önceden belirlemenin bir yolu var mı yok mu öğrenmek istedi.

1931'de Avusturyalı matematikçi Kurt Gödel biçimsel aksiyomları esas alan matematiğin, o aksiyomlar uyarınca doğru olan her şeyi ispatlayamayacağını kanıtladı. Gödel'in "eksiklik teoremi" adını verdiği teorem, matematiksel doğruluk ile matematiksel ispat arasında bir uyuşmazlık olduğunu meydana çıkardı.

Antik köken

Algoritmaların geçmişi ilkçağa dayanır. Yunan geometrici Öklit'in, iki sayının en büyük ortak bölenini (iki sayıyı da kalansız bölen en büyük sayıyı) hesaplamak için kullandığı yöntem, ilk örneklerinden biridir. İlk örneklerden bir diğeri, MÖ 3. yüzyılda yaşamış Yunan matematikçi Eratosthenes'e mal edilen Eratosthenes kalburudur. Asal sayıları bileşik (asal olmayan) sayılardan ayırmaya yara-

Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Eratosthenes kalburu 66–67 ▪ 23 . yüzyıl için 23 problem 266–67 ▪ Bilgi kuramı 291 ▪ Kriptografi 314–17

> Kâğıt, kalem ve silgi temin edilip katı disipline tabi tutulan bir adam aslında evrensel bir makinedir.
> **Alan Turing**

yan bir algoritmadır bu. Eratosthenes ve Öklit'in algoritmaları kusursuz bir şekilde işler, her zaman işleyeceği de ispatlanabilir; gelgelelim bu algoritmalar biçimsel bir tanıma uymuyorlardı. Turing'i "sanal makinesini" yaratmaya iten, bu gereksinimdi.

1937'de Turing ilk makalesini, "On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*" ("Hesaplanabilir Sayılar Üzerine: *Entscheidungsproblem*'e Uygulanması") başlığını atıp Cambridge Üniversitesine bağlı King's Kolejinin bir mensubu olarak yayımladı. Makalede, Hilbert'in karar verme probleminin çözümü olmadığı gösteriliyordu: Bazı algoritmalar hesaplanabilir değildir ama bunları denemeden belirleyebilecek evrensel bir düzenek yoktur.

Turing bu sonuca iki kısımdan oluşan varsayımsal makinesini kullanarak ulaştı. Makinenin ilk kısmında, gerektiği kadar uzun, göz göz bölünmüş bir şerit vardı ve her gözde bir karakter kodu yer alıyordu. Bu karakter herhangi bir şey olabilirdi ama en basiti, 1'leri ve 0'ları kullanmaktı. Makinenin kendisi olan ikinci kısım da şeridin her gözündeki veriyi okuyordu (kafa ya da şeridin hareket etmesi sayesinde). Bir dizi talimatla donatılacak makinenin davranışı bu şekilde denetlenecekti.

Makine (veya şerit) sola, sağa hareket edebilir ya da olduğu yerde



İş başındaki yazmanlar; 8 Numaralı Kulübe, Bletchley Park, Birleşik Krallık'ta, II. Dünya Savaşı sürerken. Turing bir dönem Adolf Hitler ile ordusunun arasındaki bildirimleri deşifre eden 8 Numaralı Kulübe'nin çalışmalarını yönetti.



Alan Turing

1912'de Londra'da dünyaya gelen Alan Turing'i öğretmenleri dâhi olarak niteliyordu. 1934'te Cambridge Üniversitesinden matematikte birincilikle mezun olduktan sonra eğitimini ABD'deki Princeton'da sürdürdü.

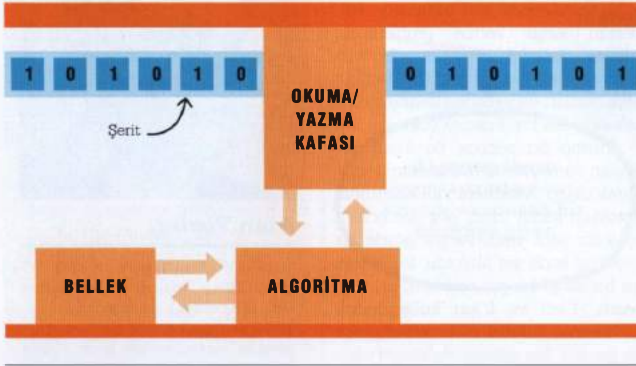
Turing 1938'de Birleşik Krallık'a döndü ve Bletchley Park'taki, hükümete bağlı Kod ve Şifre Okuluna girdi. 1939'da savaş patlak verince mesai arkadaşlarıyla birlikte düşman iletilerini deşifre eden Bombe adlı elektromekanik aygıtı geliştirdi. Savaştan sonra Turing, Manchester Üniversitesinde çalıştı, Otomatik Hesaplama Motorunu (ACE) burada tasarlayıp daha başka dijital aygıtları da yine burada geliştirdi.

1952'de eşcinsellikten suçlu bulundu; eşcinsellik o sırada Birleşik Krallık'ta suç sayılıyordu. Devlet adına yürüttüğü şifre kırma çalışmalarından da menedildi. Turing hapse girmemek uğruna libidosunu dindirecek hormon tedavisine razı oldu. 1954'te intihar etti.

Önemli eseri

1939 "Olasılığın Kriptografideki Uygulamaları Hakkında Rapor"

Turing makinesi sonsuz uzun bir şeridin üzerinden veri okuyan bir kafadan ibarettir. Makinenin algoritması ya kafaya ya da şeride hareket etmesi (sola, sağa gitmesi ya da hareketsiz kalması) için talimat verebilir. Bellekse değişikliklerin kaydını tutar ve algoritmaya geri gönderir.



kalabilir, ayrıca şeridin üzerindeki veriyi yeniden yazabilir; yani 0'ı 1'e çevirebilir veya bunun tersini yapabilir. Böylesi bir makine, akla uygun her algoritmayı yürütebilirdi. Turing makineye yerleştirilen bir algoritmanın makinenin duraklamasına sebep olup olamayacağını merak etti. Makinenin duraklaması, algoritmanın bir sonuca ulaştığına işaret edecekti. Ortadaki soru, hangi algoritmaların (sanal makinelerin de denebilir) duraklayıp hangilerinin duraklamayacağını bilmenin bir yolu olup olmadığıydı. Turing bunu öğrenebilse karar verme problemini yanıtlayacaktı.

Duraklama problemi

Turing bu probleme düşünce deneyi gözüyle baktı. Yanıtı ya Evet ya Hayır olan bir girdi verildiğinde, bir algoritmanın (A) duraklayıp duraklamayacağını (bir yanıt bulur bulmaz çalışmayı durdurup durdumayacağını) söyleyebilen bir makineyi gözünde canlandırmaya koyuldu. Böylesi bir makinenin fiziksel işleyişi Turing'i alakadar etmiyordu. Bununla birlikte böylesi bir makineyi kavramsallaştırdıktan sonra kuramsal olarak herhangi bir algoritmayı alıp makineyle test edebilir, duraklayıp duraklamadığını görebilirdi.

Özünde Turing makinesi (M), çözülebilir mi diye başka bir algoritmayı (A) test eden bir algoritmadır. Bunun için şu soruyu sorar: A duraklıyor mu (çözümü var mı)? M bunun üzerine Evet veya Hayır yanıtına ulaşır. Ardından Turing bu makinenin ufak değişiklikler yapılmış bir halini (M*) gözünde canlandırdı; bu makinenin kurulumu öyleydi ki, yanıt Evetse (A duraklar), o zaman M* tersini yapacaktı: Sonsuz bir döngüye girecekti (ve duraklamayacaktı). Yanıt Hayırsa (A duraklamaz), o zaman M* duraklayacaktı.

Daha sonra Turing bu düşünce deneyini bir adım ileri taşıyıp M* makinesini, kendi algoritmasının, yani M*'nin, duraklayıp duraklamayacağını test etmek için kullanabildiğini hayal etti. Yanıt Evetse M* algoritması duraklar, o halde M* makinesi duraklamazdı. Yanıt Hayırsa M* algoritması hiç duraklamaz, o halde M* duraklardı. Turing'in düşünce deneyi böylelikle matematiksel bir ispat biçimi olarak kullanılabilecek bir paradoksu meydana getirmişti. İspat edilen şuydu: Makinenin duraklayıp duraklamayacağını bilmek imkânsız olduğu için karar verme probleminin yanıtı Hayırdı; algoritmaların doğrulanabileceği evrensel bir test yoktu.

Bilgisayar mimarisi

Turing makinesinin işi bitmemişti. Turing ve arkadaşları bu basit kavramın bir "bilgisayar" olarak kullanılabileceğini fark ettiler. "Hesaplayıcı" (*computer*'ın "bilgisayar" dışındaki bir diğer anlamı) tabiri o zamanlar karmaşık matematiksel hesaplamalar yapan kişileri tarif etmek için kullanılıyordu. Turing makinesi de bir algoritma aracılığıyla bir girdiyi (şeridin üzerindeki veriyi) çıktı halinde yeniden yazarak bunun aynısını yapacaktı. Hesap becerisi bakımından bir Turing makinesinde işleyen algoritmalardan daha güçlü bir algoritma türü tasarlanmış değil. Yürüttükleri programlarla birlikte ele alındıklarında sonuç itibariyle Turing makineleri gibi işledikleri için modem bilgisayarların "Turing-bütün" olduğu söylenir. Matematik ve mantıkta önde gelen bir sima olan Turing, sanal bilgisayarlar gibi gerçek bilgisayarların geliştirilmesine de önemli katkılarda bulundu.

> "[Enformasyonu] bir işlemci aracılığıyla aktarmamız gerek. Enformasyonu zekâya veya bilgiye, insan dönüştürmeli. Bir bilgisayarın asla yeni bir soru sormayacağını unutuyoruz.
>
> **Grace Hopper**
> **Amerikalı bilgisayar bilimcisi**



Kodlanmış iletileri deşifre etmek için kullanılan bir Turing'in Bombe'u, II. Dünya Savaşında İngilizlerin kod kırma merkezi olarak kullandığı Bletchley Park'taki müzede onarılıp yenilendi.

Diğer taraftan, Turing'in varsayımsal aygıtının gerçeğini icat etmek Macar matematikçi John von Neumann'a düştü. Neuman bu icadında, dahili bir bellekte saklanan enformasyonu çağırıp yeni enformasyonu kaydedilmek üzere geri göndermek suretiyle bir girdiyi çıktıya dönüştüren bir merkezi işlem birimi (CPU) kullandı. 1945 yılında "von Neumann mimarisi" adıyla bilinen bu yapılandırmasını öneri olarak ortaya attı. Günümüzde hemen her bilgisayar aygıtında buna benzer bir sürecin kullanımına başvurulur.

İkili kod

İşin en başında Turing, makinesinin yalnızca ikili veri kullanmasını planlamamıştı. Makinesinin kod olarak sonlu sayıda bir karakter kümesi kullanacağını düşünmüştü sadece. Ama inşa edilen ilk Turing-bütün makine olan Z3'ün dili ikili kod oldu. Alman mühendis Konrad Zuse'nin 1941'de inşa ettiği Z3, ikili verilerdeki 1 ve 0'ları temsil etmesi için elektromekanik röleler, yani anahtarlar, kullanıyordu. Bilgisayar kodundaki 1 ve 0'lar için ilk başta belirlenen "süreksiz değişkenler" adı, 1948'te ikili rakamların (*binary digits*) kısaltması olan "bit"lerle değiştirildi. Terimin isim babası, bilgi kuramı (bilginin dijital kodlar halinde saklanabilmesi ve aktarılabilmesi konusunu inceleyen matematik alanı) dendiğinde akla gelen ilk isimlerden Claude Shannon'dı.

İlk bilgisayarlarda, bellek bölümlerinin "adresleri" olarak birden çok bit kullanılıyor, işlemcinin verileri nerede araması gerektiğini bu birden çok bit gösteriyordu. Bu bit yığınları "baytlar" (*bytes*) olarak anılmaya başlandı; "bit'ler" (*bits*) sözcüğüyle karıştırılmasın diye terimin yazılışı bu şekilde belirlendi. Bilgisayarların ilk birkaç on yılında baytlar genellikle 4 veya 6 bit içeriyordu ancak Intel'in 8-bit mikroişlemcilerinin 1970'lerdeki yükselişiyle bayt, 8 bit'lik birim oldu. 8-bit'lik bayt elverişliydi çünkü 8 bit'in 2^8 adet permütasyonu vardır ve 0'dan 255'e kadar sayıları kodlayabilir.

Sekiz rakamlık (hatta sonraları daha uzun dizilerden oluşan) gruplar düzenindeki bir ikili kod donanımı akla uygun her uygulama için yazılım üretme olanağı sunuyordu. Bilgisayar programları basbayağı algoritmalardır; bir klavye, mikrofon veya dokunmatik ekrandan gelen girdiler bu algoritmalarca işlenip çıktıya, mesela bir aygıtın ekranındaki metne, dönüştürülür.

> Bilim insanlarının, kökleşmiş bir gerçeklikten bir başkasına karşı konulmaz bir şekilde ilerlediği, hiçbir ispatlanmamış kestirimin etkisinde kalmadığı yönündeki yaygın görüş, büyük bir yanılgıdır.
> **Alan Turing**

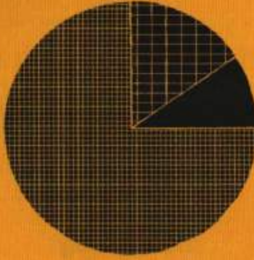
Turing makinesinin ana ilkeleri modern bilgisayarlarda halen kullanılmakta ve kuantum bilgisayarlar bilginin işlenme yöntemini değiştirene dek kullanılacağa benzemektedir. Klasik bir bilgisayar bit'i ya 1 ya da 0'dır, asla aradaki bir sayı olmaz. Bir kuantum bit'i, yani "kübit" (*qubit*), üst üste binme (süperpozisyon) yoluyla aynı anda hem 1 hem de 0 olur ve bu sayede hesaplama gücünü muazzam ölçüde artırır. ■

Turing testi

Turing 1950'de, bir makinenin, bir insanınkiyle eşdeğer veya ayırt edilemeyecek ölçüde zekâ içeren davranış sergileme becerisine yönelik bir test geliştirdi. Turing'e göre, bir makine kendi kendine düşündüğü izlenimini veriyorduysa demek ki düşünüyordu.

Yıllık olarak düzenlenen Loebner Yapay Zekâ (YZ) Ödülleri, Amerikalı mucit Hugh Loebner ve Massachusetts'teki Cambridge Davranış Çalışmaları Merkezi tarafından 1990'daki bir törenle açıldı. YZ kullanan bilgisayarlar ödülü kazanmak için her yıl yarışır. İnsan jüri üyeleri YZ'leri bilgisayar programı yerine insan sanıp aldanmalıdır. Finale yükselen YZ'ler sırayla dört jüri üyesinden biriyle iletişime geçer. Her jüri üyesi bir insanla da iletişim kurar ve YZ'nin mi insanın mı daha insanımsı olduğuna karar vermesi gerekir.

Söz konusu test yıllardır eleştirilerin hedefinde; bir YZ'nin zekâsı hakkında adilane, gerçeği yansıtan bir hüküm verilmesi bakımından testin yeterliğini sorgulayan ya da yarışmayı YZ alanındaki bilgi birikimine katkısı olmayan bir hüner gösterisi olarak gören çok sayıda eleştirmen mevcut.



KÜÇÜK ŞEYLER BÜYÜK ŞEYLERE ORANLA SAYICA DAHA FAZLADIR

BENFORD YASASI

KISACA

KİŞİ
Frank Benford (1883–1948)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1881 Kanadalı astronom Simon Newcomb logaritma tablolarında en sık atıf yapılan sayfaların, 1'le başlayan sayıların bulunduğu sayfalar olduğunu fark eder.

SONRA
1972 Amerikalı iktisatçı Hal Varian dolandırıcılıkların tespit edilebilmesi için Benford yasasının kullanılmasını tavsiye eder.

1995 Amerikalı matematikçi Ted Hill, Benford yasasının istatistiksel dağılımlara uygulanabildiğini ispatlar.

2009 İran'daki başkanlık seçimlerine ilişkin istatistiksel analiz sonuçlarının Benford yasasına uymaması seçimin hileli olabileceğini düşündürür.

Büyük bir sayı kümesinde 3 rakamıyla başlayan sayılar ile başka bir rakamla başlayan sayıların, karşımıza aşağı yukarı aynı sıklıkla çıkması beklenebilir. Oysaki çoğu sayı kümesi (örneğin İngiltere'nin köy, kasaba ve şehir nüfuslarının listesi) belirgin derecede farklı bir örüntü sergiler. Doğal yollarla oluşmuş bir sayılar kümesinde genellikle, sayıların yüzde 30 kadarının baş rakamı 1, yüzde 17 kadarının baş rakamı 2, yüzde 5'ten azının baş rakamı 9'dur. 1938'de, Amerikalı fizikçi Frank Benford bu olguyu işleyen bir makaleyi kaleme aldı; sonraları matematikçiler buna Benford yasası dedi.

Tekrarlayan örüntüler

Gerek ırmakların uzunluğu gerekse hisse senedi fiyatları ve ölüm oranları olsun birçok durumda Benford yasası apaçık ortadadır. Bazı veri çeşitleri öbürlerine oranla yasaya daha uygundur. Doğal yollarla oluşan ve birçok büyüklük kertesini (örneğin yüzler ila milyonları) kapsayan veriler daha yakın farklarla gruplaşmış verilere oranla yasanın gereksinimini daha iyi karşılar. Fibonacci dizisindeki sayılar Benford yasasına uyar, birçok tamsayının kuvvetleri de. Otobüs veya telefon numaraları gibi ad veya etiket görevi gören sayılar uymaz.

Sayılar uydurulduğu zaman ortaya çıkan baş rakamların dağılımı, sayılar Benford yasasına uyduklarında ortaya çıkacak dağılıma göre daha eşit olma eğilimindedir. Soruşturmacılar ticari dolandırıcılıkları tespit etmek için, sunduğu bu fırsattan dolayı yasayı kullanmaya başladılar. ■

> Tuhaftır, Benford'ın derlediği 20 veri kümesi için örneklem büyüklüklerinin altısının baş rakamı 1. Bunda sizce de bir gariplik yok mu?
> **Rachel Fewster**
> **İstatistiksel çevrebilimci, Yeni Zelanda**

Ayrıca bkz. Fibonacci dizisi 106–11 ▪ Logaritmalar 138–41 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Normal dağılım 192–93



DİJİTAL ÇAĞ İÇİN BİR ŞABLON

BİLGİ KURAMI

KISACA

KİŞİ
Claude Shannon (1916–2001)

ALAN
Bilgisayar bilimi

ÖNCE
1679 Gottfried Leibniz geçmişi kadim zamanlara dayanan ikili numaralandırma kavramını geliştirir.

1854 George Boole programlamanın esası olacak cebri duyurur.

1877 Avusturyalı fizikçi Ludwig Boltzmann entropi ile (rasgeleliğin ölçümü) olasılığın arasındaki bağı geliştirir.

1928 ABD'de, elektronik mühendisi Ralph Hartley bilgiyi ölçülebilir bir nicelik olarak görür.

SONRA
1961 Alman fizikçi Rolf Landauer bilgileri işlemenin entropiyi artırdığını gösterir.

1948 yılında, Amerikalı matematikçi ve elektronik mühendisi Claude Shannon, *A Mathematical Theory of Communication* (*Matematiksel İletişim Kuramı*) başlığını attığı makaleyi yayımladı. Bilginin matematiğini meydana çıkarıp dijital olarak nasıl iletilebileceğini göstermesi sayesinde bilgi çağını başlatan bu makale oldu.

O dönemde iletimler yalnızca kesintisiz, analog sinyallerle mümkündü. Bundan kaynaklanan başlıca sıkıntı, dalgaların ilerledikçe zayıflaması ve arka plan girişiminin başlayıp gitgide artmasıdır. Bu "beyaz gürültü" asıl iletiyi önünde sonunda bastırır.

Shannon'ın bulduğu çözüm, bilgiyi olabildiğince küçük parçalara, yani "bit"lere," (ikili rakamlara) bölmekti. İleti 0 ve 1'lerden oluşan bir koda dönüştürülür; her 0 düşük voltajdır, her 1'se yüksek voltaj. Shannon bu kodu yaratırken, sayıların sadece 0 ve 1'lerle gösterilebileceği düşüncesiyle Gottfried Leibniz'in geliştirmiş olduğu ikili sayılar sisteminin matematiğinden yararlandı.



Shannon, Theseus'u sergiliyor. Onun bu elektromekanik "faresi" labirentte yolunu bulmak için telefon rölelerinden bir "beyni" kullanıyordu.

Shannon ilk defa dijital olarak bilgi gönderen kişi olmasa da bu tekniğin ince ayarını yapan kişiydi. Bilgiyi verimli bir şekilde iletmenin teknik problemlerini çözmekle yetinmedi. Bilginin ikili rakamlar olarak ifade edilebileceğini göstererek, bilimin her alanının yanı sıra bilgisayar bulunan her ev veya işyerinde etkisini hissettirecek bilgi kuramını ilan etti. ■

Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–75 ▪ İkili sayılar 176–77 ▪ Boole cebri 242–47



HEPİMİZ BİRBİRİMİZDEN SADECE ALTIŞAR ADIM UZAĞIZ

AYRIMIN ALTI DERECESİ

KISACA

KİŞİ
Michael Gurevitch
(1930–2008)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1929 Macar yazar Frigyes Karinthy "ayrımın altı derecesi" tabirini icat eder.

SONRA
1967 Amerikalı toplumbilimci Stanley Milgram insanların ayrım derecelerini ve bağlantı düzeyini incelemek için bir "küçük dünya deneyi" tasarlar.

1979 IBM'de çalışan Manfred Kochen ve MIT'de görevli Ithiel de Sola Pool sosyal ağlar üzerine matematiksel bir analiz yayımlarlar

1998 ABD'de toplumbilimci Duncan J. Watts ve matematikçi Steven Strogatz bağlantı düzeyini ölçmek üzere Watts-Strogatz rasgele çizge modelini üretirler.

Çoğu insanın, **hayatının farklı** bölümlerinden insanlarla çeşitli **bağlantıları** vardır.



Bu **bağlantıların** da başka insan **grupları** ve **ağlarıyla bağları vardır.**



Üç adım uzaktaki insanlarla (örneğin bir arkadaşın arkadaşının arkadaşı) olan ilave bağlar **birbirleriyle bağlantılı çok geniş bir insan yelpazesini** ortaya çıkarır.

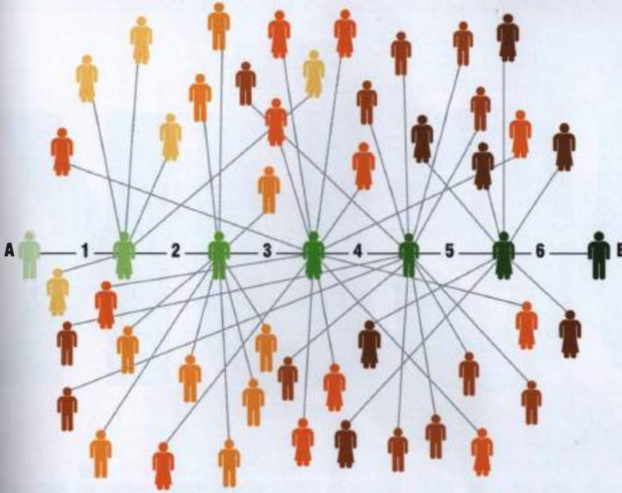


Yapılan araştırmalara göre, sosyal ağlarımızla bağlantılandığımızda hepimiz birbirimizden ortalama olarak altışar adım uzağız.

Bilgisayar bilimi, parçacık fiziği, ekonomi, kriptografi, biyoloji, toplumbilim ve iklimbilim dahil birçok bilim dalında cisimlerin veya insanların arasındaki ilişkilerin modellenmesinde ağlar kullanılır. Ağ türlerinden biri, insanların birbirleriyle nasıl bağlantılı olduğunu ölçen, "ayrımın altı derecesi" adlı sosyal ağ şemasıdır. Amerikalı lisansüstü öğrencisi Michael Gurevitch 1961'de sosyal ağların içyüzü hakkında çığır açan bir araştırmayı yayımladı.

Stanley Milgram, ABD'deki yabancıları bağlantılamak için kaç

Ayrıca bkz. Logaritmalar 138–41 ▪ Çizge kuramı 194–95 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Modern istatistiğin doğuşu 268–71 ▪ Turing makinesi 284–89 ▪ Sosyal matematik 304 ▪ Kriptografi 314–17



Ayrımın altı derecesi kuramı, görünüşte bağlantısız olan herhangi iki insanın arkadaşları ve tanıdıkları aracılığıyla en fazla altı adımda birbiriyle nasıl bağlantılanabileceğini gösterir. Sosyal medyanın büyümesiyle bu sayı azalabilir.

orta düzey tanışıklık bağının gerekli olduğunu araştırdı. Nebraska'daki insanlara en sonunda Massachusetts'teki belli (gelişigüzel) bir insana ulaşması amaçlanan birer mektup gönderttı. Ardından her alıcı, mektubu hedef adrese yaklaştırmak amacıyla bir tanıdığına gönderdi. Milgram her mektubun, hedefine ulaşmak için kaç kişiden geçtiğini inceledi. Hedefe ulaşan mektuplar için ortalama altı aracı gerekmişti.

Bu "küçük dünya kuramı" Milgram'dan daha eski bir tarihte cereyan etmişti. 1929 basım tarihli kısa hikâye *Chains*'de (*Zincirler*) Frigyes Karinthy, insanların dünya çapındaki ortalama bağlantı sayısının, bağlayıcı unsur arkadaşık olduğunda altı olabileceğini belirtiyordu. "Ayrımın altı derecesi" tabirini icat eden Karinthy matematikçi değil yazardı. Matematikçiler o zamandan beri ayrımın altı derecesini modellemeye çalışır. Duncan Watts ve Steven Strogatz düğümlerinin sayısı N ve her düğümün diğer düğümlerle arasında K adet bağ olan gelişigüzel bir ağınız varsa o halde iki düğüm arasındaki ortalama yol uzunluğu $\ln N$'nin $\ln K$'ye bölümüne eşittir (ln, doğal logaritma anlamına gelir). 10 düğüm varsa ve her düğümün diğerleriyle dört bağlantısı varsa o halde rasgele seçilen iki düğümün arasındaki ortalama uzaklık $^{\ln 10}/_{\ln 4} \approx 166$ olur.

Diğer sosyal ağlar

1980'lerde işbirliği içerisinde çalışmasıyla bilinen Macar matematikçi Paul Erdös'un arkadaşları, Erdös'ün, makale yayımlamış diğer matematikçilerden ayrım derecesini belirtmek için "Erdös sayısı" terimini uydurdular. Erdös'ün ortaklaşa makale yazdığı matematikçilere verilen Erdös sayısı 1, bu ortak yazarlarla çalışmış herkesin Erdös sayısı 2'ydi vb. Amerikalı oyuncu Kevin Bacon'ın, Hollwood'daki her oyuncuyla çalışmış olduğunu ya da onlarla daha önce çalışmış biriyle çalışmış olduğunu söylediği bir mülakatın ardından bu kavram kamuoyunda merak uyandırdı. Bir oyuncunun Bacon'dan ayrım derecesini ifade eden "Bacon sayısı" terimi uyduruldu. Rock müzikte, ağır metal grubu Black Sabbath'ın üyeleriyle olan bağlantılarsa "Sabbath sayıları" ile belirtilir. Gerçek anlamıyla iyi bağlantılara sahip kişileri diğerlerinden ayırmak isteyen biri Erdös-Bacon-Sabbath sayısıyla (birinin Erdös, Bacon ve Sabbath sayılarının toplamı) bunu yapabilir. EBS sayısı tek haneli olan yalnızca birkaç kişi vardır.

2008 yılında Microsoft'un yürüttüğü bir araştırma, yeryüzündeki herkesin geri kalan her insandan ayrımının ortalamada sadece 6,6 kişi olduğunu gösterdi. Sosyal medya bizi birbirimizi gitgide yakınlaştırdığı sürece bu sayı daha da azalabilir. ■

> Umarım Six Degrees [bir yardım projesi] sayesinde sosyal ağ oluşturma eylemine sosyal bilinç gelir.
> **Kevin Bacon**

KÜÇÜK BİR OLUMLU TİTREŞİM KOZMOSU BAŞTAN AŞAĞI DEĞİŞTİREBİLİR

KELEBEK ETKİSİ



KISACA

KİŞİ
Edward Lorenz (1917–2008)

ALAN
Olasılık

ÖNCE
1814 Pierre-Simon Laplace mevcut tüm koşullar kullanılarak geleceğin ebediyete dek tahmin edilebildiği belirlenimci bir evrenin sonuçları üzerine kafa yorar.

1890 Henri Poincaré kütleçekim dolayısıyla irtibat halindeki üç göksel cismin hareketinin tahmin edilmesiyle ilgili üç-cisim probleminin genel bir çözümü olmadığını gösterir. Cisimler çoğu zaman ritmik, tekrarlayan örüntülerle hareket etmez.

SONRA
1975 Benoit Mandelbrot bilgisayar grafikleriyle daha karmaşık fraktaller (kendini tekrarlayan şekiller) yaratır. Kelebek etkisini açığa çıkaran Lorenz çekicisi bir fraktaldir.



Dünyanın bir yerinde kanat çırpan bir kelebeğin, atmosfer koşullarında değişikliğe yol açıp en sonunda da başka bir yerde kasırga oluşturacağı düşüncesi herkesin merakını uyandırmıştır.

1972'de Amerikalı meteorolog ve matematikçi Edward Lorenz, "Brezilya'da bir kelebeğin bir kanat çırpışı Teksas'ta kasırgaya neden olur mu?" başlıklı bir konuşma yaptı. Aslı bu konuşmaya dayanan "Kelebek etkisi" terimi, atmosfer koşullarındaki ufacık bir değişimin (sırf kelebek değil, başka herhangi bir şeyin neden olabileceği) gelecekte başka bir yerde hava örüntülerini değişikliğe uğratmaya yeterli olduğu düşüncesini ifade eder. Kelebeğin başlangıç koşullarına ufak müdahalesi olmasa kasırga veya daha başka bir hava olayı hiç meydana gelmeyecek ya da Teksas'tan farklı bir yeri vuracaktı.

Konuşmanın başlığını seçen Lorenz değil, Amerikan Bilim İlerleme Derneğinin Boston'daki yıllık toplantısına başkanlık etmekte olan, fizikçi Philip Merilees'ti. Lorenz, hazırladığı konuşma hakkındaki bilgileri sun-

Edward Lorenz



1917'de Connecticut eyaletine bağlı West Harford'da dünyaya gelen Edward Lorenz matematik eğitimini Dartford Koleji ve Harvard Üniversitesinde tamamlayıp 1940'ta Harvard'dan yüksek lisans diplomasını aldı. Mesleki eğitimini meteorolog olarak bitirdikten sonra II. Dünya Savaşında ABD'nin Hava Kuvvetlerinde görev aldı. Savaşın ardından Lorenz, Massachusetts Teknoloji Enstitüsünde meteoroloji okudu ve atmosferin davranışını tahmin etmeye yönelik yöntemler geliştirmeye koyuldu. O zamanlar, meteorologlar yürüttükleri hava tahminlerinde istatistiksel doğrusal modelleme tekniğini kullanıyor, çoğu zaman da başarısız oluyordu. Lorenz atmosferin doğrusal olmayan bir modelini geliştirmekte olduğu süreçte ileride kelebek etkisi adıyla anılacak kaos kuramına rastladı. En güçlü bilgisayarların ürettiği uzun vadeli hava tahminlerinin bile doğru olmadığını gösterdi. Lorenz bedensel ve zihinsel etkinliklerini ömrünün son evresine kadar korumayı başardı, 2008 yılında yaşamını yitirdi.

Önemli eseri

1963 *Periyodik Olmayan Belirlenimci Akış*

Ayrıca bkz. Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Kalkülüs 168–75 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–83 ▪ Laplace'ın şeytanı 218–19 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Fraktaller 306–11

> Amazon ormanlarında bir kelebek kanat çırpar, akabinde bir fırtına Avrupa'nın yarısını yerle bir eder.
> **Terry Pratchett ve Neil Gaiman**
> **İngiliz yazarlar**

makta gecikmiş, bu yüzden bir şey uydurmak zorunda kalan Meirlees seçeceği sözcükler için Lorenz'in çalışmasını ve "bir martının kanatlarını bir kere çırpmasının" hava tahminini değiştirmeye yetebileceği yönündeki yorumunu hesaba almıştı.

Kaos kuramı

Ünlü bir kaos kuramına giriş konusu olan kelebek etkisinin odağı, karmaşık sistemlerin başlangıç koşullarına fazlasıyla duyarlı oluşu ve dolayısıyla öngörülmelerinin fazlasıyla güç oluşudur. Kaos kuramı; nüfus dinamikleri, kimya mühendisliği ve finans piyasaları gibi alanları uygulama bakımından ilgilendirir ve yapay zeka geliştirilmesinde yardımcı rol oynar.

Lorenz 1950'lerin ortasında araştırma konusu olarak iklim modellemeye yöneldi. 1960'ların başlarında, bir oyuncak iklim modelinin beklenmedik sonuçlarına insanların ilgisini çekmişti (süreçlerin kısaca ve özlü olarak gösterilip açıklanacak şekilde yapılan basit basitleştirilmiş bir model manasında "oyuncak"). Hava basıncı, sıcaklık ve rüzgâr hızı gibi üç veri noktası üzerinden atmosferin nasıl evrileceğini tahmin ediyordu model. Lorenz'in bulgularına göre sonuçlar kaotikti. Her biri hemen hemen özdeş veri kümeleriyle başlayan iki sonuç kümesini karşılaştırdı; atmosfer koşullarının ilk önce hemen hemen özdeş çizgiler üzerinden geliştiğini ama ardından bambaşka yolları izleyerek değiştiğini not etti. Bir diğer keşfine göre, modelindeki her başlangıç noktası kendisine özgü bir sonuç doğurduysa da hepsi belli sınırlarla çevrelenmişti.

Tuhaf çekici

Lorenz modellenen bu atmosfer değişkenlerini üç boyutlu bir uzayda göstermek istiyordu. x, y ve z eksenlerinin hava, sıcaklık, basınç ve nem gibi hava verilerini (ya da başka üç hava verisini) temsil edeceği böylesi

> Şaşırtıcı olan, kaotik sistemlerin her zaman kaotik kalmaması.
> **Connie Willis**
> **Amerikalı yazar**

bir grafiği çıkarmaya, 1960'ların ilk bilgisayarlarının gücü yetmiyordu. 1963 yılında bu verileri grafikte göstermek mümkün oldu ve ortaya çıkan şekil, Lorenz çekicisi adıyla ünlendi. Her başlangıç noktası ilmek yapa yapa uzayın bir çeyrek bölgeden öbürüne salınan bir çizgiye evrilir. Bunun işaret ettiği değişime bir örnek, yağışlı ve rüzgârlı havanın dinip son olarak sıcak, kuru koşullara varmak üzere, aradaki tüm



Bir Lorenz çekicisinde, başlangıç koşullarında meydana gelen küçük değişiklikler her çizginin izlediği yolda muazzam değişikliklere yol açar, buna karşın çizgiler yine de aynı şeklin sınırları dahilinde kalır ve böylece kaos içinde düzen sağlanır.

> Kaos: şimdiki zamanın geleceği belirlemesi, buna karşın şimdi zamanın yaklaşığının, geleceği yaklaşık olarak belirlememesi.
>
> **Edward Lorenz**

Doğadaki çoğu **dinamik sistem** her zaman geçerli olan **yasalara** uygun davranarak **belirlenimci** olduğu izlenimini verir.

↓

Başlangıç koşullarını **tamı tamına** bilmemiz halinde **gelecekteki** koşulları **kesin olarak** belirleyebiliriz.

↓

Bununla beraber, sistem son derece **duyarlıdır**. Başlangıç koşullarındaki küçük bir değişiklik **gelecekteki** koşullarda **büyük bir farka yol açacaktır.**

↓

Başlangıç koşullarının yalnızca bir **yaklaşığını** bilmemiz halinde **tahminlerimiz hatalı** olur.

↓

Sistem kaotiktir.

durumlar da yaşanacak şekilde, değişmesidir. Her başlangıç noktasıdan emsalsiz bir evriliş türer ancak başlangıç noktası ne olursa olsun tüm çizgiler uzayın aynı bölgesinde kalır. Periyotlar uzun tutularak yapılan çok sayıda yinelemenin (iterasyon) ardından bu bölge göze hoş gelen, ilmeklerle dolu bir yüzey görünümü alır. Çekicinin içerisindeki çizgilerin güzergâhları, ayrı ayrı incelendiğinde, büyük oranda kararsızdır; aynı bölgeden başlayanlar çoğunlukla daha sonra bir noktada birbirinden çok uzaklaşabilirken çok farklı başlangıç noktalarından çıkanlar sonradan uzun periyotlar boyunca yan yana ve aynı yönde ilerleyebilir. Diğer taraftan çekici, bir bütün olarak sistemin kararlı olduğunu gösterir. Çekicinin içerisinde, onu atlatacak bir güzergâhı doğuracak hiçbir başlangıç noktası yoktur. Görünüşteki bu çelişki kaos kuramının temelidir.

Doğru yolu bulmak

Kaosun kuramının kökeni, hareketi, özellikle göksel cisimlerin hareketini, anlamaya ve tahmin etmeye yönelik ilk girişimlere uzanır. Örneğin 17. yüzyılda Galileo sarkaçların salınımı ve cisimlerin düşüşüyle ilgili birtakım yasaları formülleştirdi; Johannes Kepler güneşin yörüngesindeki gezegenlerin uzaydaki süzülüşünü açıklığa kavuşturdu; Isaac Newton da bu bilgi birikimini, kütleçekimin ve hareketin tabi olduğu fizik yasalarıyla birleştirdi. Gottfried Leibniz'in yanı sıra Newton'ın da kalküsü geliştirmiş olduğu söylenir. Kalkülüs, nispeten karmaşık sistemlerin davranışını analiz ve tahmin edecek şekilde tasarlanmış bir matematik sistemidir. Karmaşık değişkenlerin arasındaki ilişkiler kalkülüsten yararlanılarak özel bir diferansiyel denklemin çözülmesiyle tahmin edilebilir.

Bu fizik yasaları ve analitik araçlar evrenin belirlenimci olduğunu gösterebilir; bir cismin tam konumu ve durumuna ilaveten üzerine etkiyen tüm kuvvetler bilindiği takdirde gelecekteki konum ve durumunu kusursuz bir hassasiyetle belirlemek mümkündür.

Üç-cisim problemi

Bütün bunlara rağmen Newton belirlenimci evren düşüncesinde bir kusur buldu. Birbirlerine kütleçekimle bağlı üç cismin hareketinin analiz edilmesinin dünya, ay ve güneş gibi kararlı görünen cisimler için dahi güç olduğunu not etti. Denizcilikte ilerleme sağlamak isteyen sonraki araştırmacıların ayın hareketine yönelik analizleri hata doluydu. 1890'da Fransız matematikçi Henri Poincaré üç cismin bir-

birlerinin etrafındaki hareketinin hiçbir yönüyle genelleştirilebilir, öngörülebilir olmadığını gösterdi. Cisimlerin çok özel yerlerden başlamış olduğu ender durumlarda hareket periyodiktir, aynı yollar üzerinde sürekli tekrarlanır. Poincaré'nin tezine göre, üç-cisim izledikleri yollardan çoğu zaman tekrar geçmez ve hareket aperiyodiktir.

Bu üç-cisim problemini çözmeyi ümideden matematikçiler, problemi soyutlaştırıp belirli eğrilikteki yüzey ve uzaylarda hareket eden hayali cisimleri gözlerinin önüne getirdiler. Hayali bir cismin eğriliği, o cisme etki eden kuvvetlerin (kütleçekim gibi) matematiksel bir temsili olabilir. Hayali cismin farklı her bir durumda izlediği yola jeodezik yol denir (bkz. aşağıda). Bir sarkacın hareketi ya da bir gezegenin bir yıldızın etrafındaki yörüngesel hareketi gibi basit bir durumda, bu hayali cisim yüzeyde yer alan sabit bir noktanın çevresinde salınır (ileri geri hareket eder) ve aynı zamanda tekrarlayan bir yolu izleyip bir limit çevrimini meydana getirir. Sönümlü salınım (sürtünmeden dolayı enerji kaybeden salınım) durumundaysa hayali cisim sabit noktaya ulaşana dek (durduğu ana dek), salınım hareketi gitgide küçülür.

Hayali bir cismin hareketi, başka birkaç cisimle ilişkili olarak dikkate alındığında jeodezik yol çok çetrefilli bir hale gelir. Şayet başlangıç koşullarını kesin olarak ayarlamak mümkün olsaydı aklın alabileceği ne kadar yol varsa hepsini oluşturmak mümkün olurdu. Bazıları periyodik olur, karmaşıklık düzeyi ne olursa olsun bir yolun üzerinde ilerleyerek sürekli tekrarlardı. Kimileri de ilkin kararsız olsa da önünde sonunda bir limit çevrimine otururdu. Üçüncü bir türse sonsuzluğa doğru uçup giderdi; belki doğrudan belki de görünüşteki bir kararlılık periyodunun ardından.

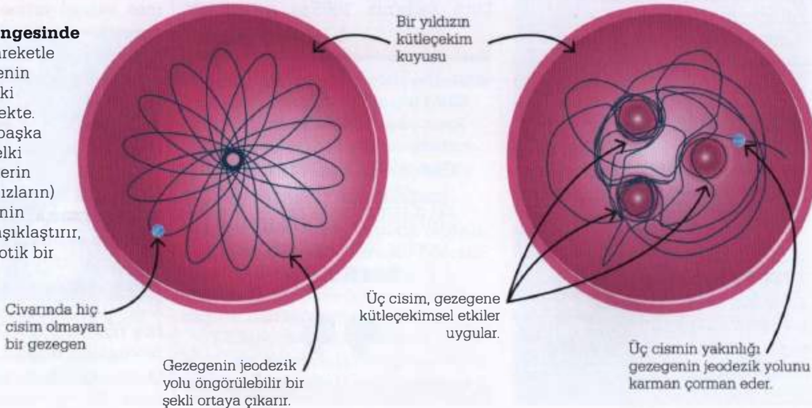
Yaklaşmalar

Bu zamana dek fizikçiler gibi matematikçiler de üç-cisim problemi üstünde çalıştı durdu ama problem büyük oranda kuramsaldır. Gerçek bir fiziki sistemde başlangıç koşullarından kesin bir şekilde emin olmak mümkün değildir. Kaos kuramının özüdür bu. Sistem belirlenimci olmasına karşın o sisteme dönük her ölçüm bir yaklaşmadır. Dolayısıyla kesin olmayan bu ölçümlere dayandırılan her matematiksel model, gerçeğine kıyasla çok büyük ihtimalle farklı bir şekilde gelişecektir. Küçük bir belirsizlik bile kaos yaratmaya yeter. ■

> Belirlenimcilik ile öngörülebilirlik Lorenz'den önce birbirine denk sayılırdı. Lorenz'den sonra anladık ki uzun vadede işler öngörülemez olabiliyormuş.
>
> **Stephen Strogatz**
> **Amerikalı matematikçi**

Bir gezegenin jeodezik yolu

Bir yıldızın yörüngesinde öngörülebilir bir hareketle ilerleyen bir gezegenin jeodezik yolu soldaki görselde gösterilmekte. Sağdaki görselde, başka üç gökcisminin (belki civardaki gezegenlerin belki de başka yıldızların) var olması, gezegenin izlediği yolu karmaşıklaştırır, öngörülemez ve kaotik bir hale getirir.



MANTIKSAL AÇIDAN, ŞEYLER YALNIZCA KISMEN DOĞRU OLABİLİR

BULANIK MANTIK

KISACA

KİŞİ
Lütfi Zade (1921–2017)

ALAN
Mantık

ÖNCE
MÖ 350 Aristoteles, Batının bilimsel akıl yürütmesinde 19. yüzyıla dek hüküm sürecek mantık sistemini geliştirir.

1847 George Boole değişkenlerin iki değerden yalnızca birini alabildiği bir cebir türünü icat eder ve matematiksel mantığa giden yolda ilk adım böylelikle atılmış olur.

1930 Leh mantıkçılar Jan Lukasiewiecz ve Alfred Tarski sonsuz sayıda doğruluk değeri içeren bir mantığın tanımını yaparlar.

SONRA
1980'ler Japon elektronik şirketleri bulanık mantık kontrol sistemlerini hem sanayi hem ev tipi cihazlarda kullanırlar.

Her bilgisayarın ikili mantığı açıktır: Verilen girdiler geçerli olduğunda uygun çıktıları sağlar. Diğer taraftan ikili bilgisayar sistemleri gerçek dünyadaki çapraşık ve belirsiz girdilerle çalışmak için her zaman uygun değildir. Örneğin tanıma işlevi için ikili sistem yeterince incelikli değildir. Buna karşılık, bulanık mantıkla denetlenen elyazısı bir sistemde insanların eylemleri ve düşünce süreçleri gibi karmaşık olgular doğruluk dereceleri sayesinde daha iyi analiz edilebilir. Bulanık mantık, İranlı-Amerikalı bilgisayar bilimcisi Lütfi Zade'nin 1965'te geliştirdiği bulanık küme kuramının bir uzantısıdır. Zade şunu söylüyordu: Bir sistem karmaşıklaştıkça o sistem hakkındaki ifadeler anlamsızlaşır; anlamlı olan ifadeler de muğlaktır. Böylesi durumlar çok-değerli (bulanık) bir akıl yürütme sistemini gerektirir.

> Gerçek fiziksel dünyada karşılaşılan cisimlerin sınıflarının kesin tanımlı üyelik ölçütleri yoktur.
> **Lütfi Zade**

Standart kümeler kuramında, bir eleman bir kümeye ya ait olur ya da olmaz, buna karşılık bulanık küme kuramında üyelik dereceleri veya süreklilik mevcuttur. Benzer şekilde, bulanık mantıktaki önermeler için Boole mantığındaki gibi sadece iki değer (tamamen doğru veya tamamen yanlış) yerine doğruluk değeri aralıkları vardır. Bulanık doğruluk değerleri için bulanık mantık işleçlerinin kullanılması da şarttır; örneğin Boole cebrindeki VE işlecinin bulanık tipi, iki girdinin minimumunu çıktı olarak veren MIN işlecidir.

Bulanık kümeleri oluşturmak

Rafadan yumurta yapmak gibi basit bir insan görevini taklit eden bir temel bilgisayar programı tek bir kuralı uyguluyor olabilir: Yumurtayı beş dakika pişir. Daha gelişmiş bir programsa, mesela bir insan, yumurtanın ağırlığını hesaba katar. En fazla 50 g ağırlığındaki küçük

Ayrıca bkz. Tasım mantığı 50–51 ▪ İkili sayılar 176–77 ▪ Boole cebri 242–47 ▪ Venn diyagramları 254 ▪ Matematiğin mantığı 272–73 ▪ Turing makinesi 284–89

BOOLE MANTIĞI

Hava sıcak mı?



BULANIK MANTIK

Hava sıcak mı?



Bulanık mantıkta, Boole mantığının "evet" (1) ve "hayır" (0) ikili değerleri yerine bir doğruluk sürekliliğine yer verilir. Bu bulanık değerler olasılıkları çağrıştırmakla beraber temelde apayrıdır: Önermelerin doğruluk derecesini belirtirler, ne kadar olası olduklarını değil.

yumurtalar ile 50 g ağırlığından büyük yumurtaları iki kümeye ayırıp birinci kümeyi dört dakika, ikincisini altı dakika haşlayabilir. Bulanık mantıkçılar bunlardan belirgin küme diye söz eder: Her bir yumurta ya üyedir ya da değil.

Tam pişmiş bir yumurta içinse haşlama süresi yumurta ağırlığına göre ayarlanmalıdır. Bir algoritma, bir yumurtalar kümesini hassas ağırlık aralıklarına bölmek için geleneksel mantıktan yararlanabilir, buna karşılık bulanık mantık bu sonuca daha genel bir yaklaşımla ulaşır. İlk adımda veriler bulanıklaştırılır: Her yumurta hem küçük hem de büyük kabul edilir ve iki kümeye de farklı derecelerle aittir. Örneğin 50 g'lık bir yumurtanın üyelik derecesi iki küme için de 0,5 olur. 80 g'lık bir yumurtaysa 1'e yakın derecesiyle "büyük" ve aynı zamanda 0'a yakın derecesiyle "küçük" olur. Bunun üzerine bir bulanık kural uygulanır: Büyük yumurtalar altı dakika, küçük yumurtalar dört dakika haşlanır. Algoritma bu kuralı, bulanık çıkarım adı verilen bir işlemle, bulanık küme üyeliğine göre her yumurtaya uygular. Sistem, 80 g'lık bir yumurtanın dört ve altı dakika (dereceleri sırayla neredeyse 0 ve neredeyse 1 olduğundan) haşlanması gerektiği sonucunu çıkaracaktır. Ardından bu çıktı, kontrol sisteminde kullanılabilen, belirgin mantık tabanlı bir çıktı elde etmek üzere durulaştırılır. Sonuç olarak, 80 g'lık bir yumurta için 6 dakikaya yakın bir haşlama süresi belirlenir.

Bulanık mantık günümüzdeki bilgisayar kontrollü sistemlerde yaygın olarak kullanılır. Hava tahmininden hisse senedi alım satımına kadar birçok uygulaması vardır, ayrıca yapay zekâ sistemlerinin programlanmasında can alıcı bir rol oynar. ■

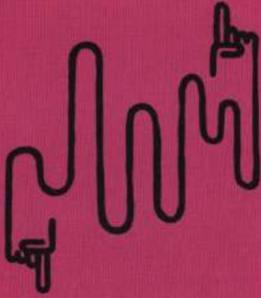


Tokyo'da faaliyet gösteren Henn-na adlı otelin kabul yerinde, YZ kullanan bir insanımsı robot çalışmakta. Otel, dünyanın robot çalıştıran ilk oteli olduğunu iddia ediyor.

Yapay Zekâ

Bulanık kontrol sistemleri gündelik yaşantının belirsizlikleriyle bilfiil baş edebileceğinden yapay zekâ (YZ) sistemlerinde kullanılmaktadır. YZ'nin kendi kendini yöneten bir zekâ sanılması, kısmen, bulanık olmasının yol açtığı bir yanılsamadır; oysa bulanık mantık aslında veri işleme yoluyla belirsizlikleri giderir. Bu bakımdan YZ baştan aşağı önceden programlanmış bir dizi kuralın neticesidir.

YZ'lerin deneme yanılma işlemiyle kendilerini programladığı makine öğrenimi gibi tekniklerin ve keza YZ'nin insan programcıların sağladığı bilgi veri tabanlarından yararlandığı uzman sistemlerin sayesinde YZ'nin yetenekleri büyük ölçüde ilerledi. Bütün bunlara rağmen, çoğu YZ "yetersizdir," çünkü verildiği görev doğrultusunda tek bir işi çok iyi, hatta genellikle insanlara kıyasla daha iyi yapmasına karşın başka hiçbir şey yapmayı öğrenemez ve neleri bilmediğinden habersizdir. Bilgisayar bilimi yeni hedefi olarak, kendi öğrenimini evrilmiş zekâyla aynı şekilde yönlendirebilecek genel bir YZ'yi hedeflemektedir.



MATEMATİĞİN BÜYÜK BİRLEŞİK KURAMI

LANGSLAND PROGRAMI

KISACA

KİŞİ
Robert Langlands (1936–)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1796 Carl Gauss ikinci derece karşılıklılık teoremini ispatlayıp ikinci derece denklemlerin çözülebilirliği ile asal sayıları ilişkilendirir.

1880-1884 Henri Poincaré otomorfik formlar (çapraşık grupları kavramamıza olanak tanıyan araçlar) kavramını geliştirir.

1927 Avusturyalı matematikçi Emil Artin karşılıklılık teoreminin kapsamına grupları alır.

SONRA
1994 Andrew Wiles, Fermat'nın son teoremini sayı kuramındaki bir problemden bir geometri problemine çevirmek için Langlands'in kestirimlerinin özel bir durumunu kullanır ve bu sayede çözüme ulaşır.

1967'de genç Kanadalı-Amerikalı Robert Langlands matematiğin iki başlıca ve görünüşte birbiriyle bağlantısız iki alanı olan sayı kuramı ile harmonik analiz arasında derin bağlar oluşturacak birtakım öneriler sundu. Sayı kuramı tamsayıların matematiğidir, özellikle de asal sayıların. Harmonik analiz (Langlands'in uzmanlık alanı) dalga biçimlerini matematiksel açıdan inceleyen ve sinüs dalgalarına nasıl ayrılabileceğini araştıran alandır. Görünüşte bu alanlar esasen birbirinden farklıdır: Sinüs dalgaları sürekli, tamsayılar süreksizdir.

Langlands'in mektubu

1967'de André Weil'ın teslim aldığı 17 sayfalık elle yazılmış mektupta, Langlands sayı kuramı ile harmonik analizi ilişkilendirdiği birtakım kestirimler sunmuştu. Mektubun önemini kavrayan Weil, mektubu bilgisayarda çoğalttırıp sayı kuramcılarına yayarak Langlands'ın kestirimlerinin 1960'ların sonu ve 1970'li yıllarda elden ele dolaşmasını sağladı. Mektupların herkese

Sayı kuramı tamsayıların **özelliklerini** ve **aralarındaki ilişkiyi** ele alır.

Harmonik analiz, **çapraşık fonksiyonların** gruplar halindeki **sinüs dalgalarına** ayrılarak **analiz edilmesidir.**

Langlands Programı, birbirinden **apayrı** görünen bu **matematik dallarını buluşturur.**

Program, "matematiğin büyük birleşik kuramı" şeklinde tanımlanabilir.

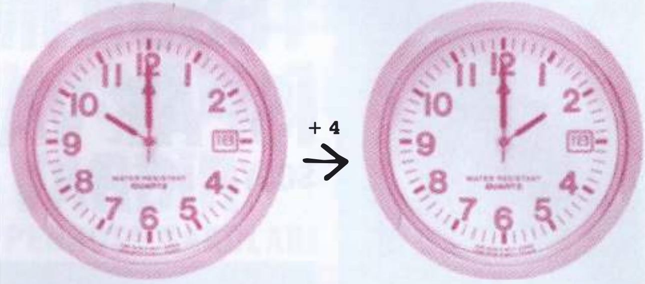
Ayrıca bkz. Fourier analizi 216–17 ▪ Eliptik fonksiyonlar 226–27 ▪ Grup kuramı 230–33 ▪ Asal sayı kuramı 260–61 ▪ Emmy Noether ve soyut cebir 280–81 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23

açıklanmasıyla birlikte Langland'ın kestirimleri matematiğin geneline nüfuz etti; öyle ki, 50 yıl sonrasında da araştırmaları şekillendirmeye devam ediyor.

Bağları açıklığa kavuşturmak

Langlands'ın kavramları yüksek düzeyde teknik matematikle sarmalanmıştır. Sadeleştirilmiş bir anlatımla, Langlands'ın ilgi alanları Galois grupları ve otomorfik formlar adlı fonksiyonlardır. Galois gruplarına sayı kuramında rastlanır ve polinomların köklerini incelemek maksadıyla Évariste Galois'nın kullandığı grupların bir genellemesidir.

Langlands'ın kestirimlerinin önemi, problemleri sayı kuramından alıp harmonik analiz dilinde yeni bir çerçeveye oturtma olanağı sunmasındadır. Langlands Programı kavramların matematiğin bir alanından bir diğerine aktarılmasına yardımcı olmuş, matematiğin Rosetta Taşı olarak anılagelmiştir. Langlands, Program kapsamındaki çalışmalar için gerekli araçların geliştirilmesine de, örneğin farklı fonktörselliği (grupların yapılarını karşılaştırmanın bir yolu) genelleştirerek, bizzat destek verdi.



Modüler aritmetik ("saat" aritmetiği), sonlu sayı kümeleri içeren sayı sistemleriyle ilgilidir. Örneğin 12 kadranlı bir saatte saat 10.00'dan itibaren dört saat ileri giderseniz 02.00'ı elde edersiniz (10 + 4 = 2) çünkü 14 ÷ 12 işleminin kalanı 2'dir. Langlands Programı'nda sayıların kullanımı genellikle modüler aritmetiğe göredir.

Nasıl ki 19. yüzyılda elektrik ve manyetizmanın birliğinden çıkan elektromanyetizma, yeni bir fiziksel dünya anlayışı sağlamıştı, Langlands'in harmonik analiz ile sayı kuramını benzer şekilde bir araya getirmesi sonucunda bol miktarda yeni araç elde edilebilirdi. Program birbirinden temelden farklı görünen matematik alanlarının arasında yeni bağlar oluşturmak suretiyle matematiğin özündeki yapıların bazılarını gün ışığına çıkardı. 1980'li yıllarda Ukraynalı matematikçi Vladimir Drinfel'd harmonik analiz ve geometrinin belli konuları arasında Langlands tipi bir bağlantı olabileceğini göstermeye çalışarak Programa kapsam kazandırdı. Andrew Wiles ise 1994'te Fermat'nın son teoremine ilişkin çözümünde Langlands'ın kestirimlerinden birine başvurdu. ■

Robert Langlands



1936'da Kanada'nın Vancouver şehrine yakın bir yerde hayata gözünü açan Robert Langlands üniversiteye gitmeyi planlamıyordu ancak bir öğretmeni, yeteneklerini değerlendirmesi için "dersin 1 saati boyunca" ona bütün sınıfın önünde yalvarıp yakardığında düşüncesi değişti. Yabancı dile de yatkındı ama 16 yaşında matematik okumak üzere Kanada'daki British Columbia Üniversitesine kaydoldu. Daha sonra ABD'ye taşındı ve 1960 yılında Yale Üniversitesinden doktora diploması aldı. Princeton, Berkeley ve Yale üniversitelerinde ders verdikten sonra İleri Araştırmalar Enstitüsüne (IAS) geçen Langlands eskiden Einstein'a ait olan oradaki makam odasını halen kullanmaktadır. Langlands asal sayılardaki örüntüler konusundaki bir araştırma kapsamında tamsayılar ile periyodik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi araştırmaya başladı. 2018'de "ileri görüşlü" Programı ile Abel Ödülü'ne layık görüldü.

Önemli eserleri

1967 *Euler çarpımları*
1967 *André Weil'e Mektup*
1976 *Eisenstein Serilerinin, Fonksiyonel Denklemleri Sağlaması Üzerine*
2004 *Endoskopinin Ötesi*



TEBDİLİMEKÂNDA İSPAT VARDIR

SOSYAL MATEMATİK

KISACA

KİŞİ
Paul Erdős (1913–96)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1929 Macar yazar Frigyes Karinthy kısa hikâyesi *Láncszemek*'te (*Zincirler*) ayrımın altı derecesi kavramını ortaya atar.

1967 Amerikan sosyal psikolog Stanley Milgram sosyal ağların bağlantılılığı üzerine deneyler yürütür.

SONRA
1996 Amerika'daki bir televizyon programında Bacon sayısıyla tanışılır. Amerikalı oyuncu Kevin Bacon'dan, başka bir oyuncunun ayrım derecesini gösteren sayıya Bacon sayısı denir.

2008 Microsoft sosyal medyanın bağlantılılık üzerindeki etkileri üzerine ilk deneysel çalışmayı yürütür.

Macar matematikçi Paul Erdös hayatı boyunca, ortaklaşa yazdıkları da dahil yaklaşık 1500 akademik makale yazdı. Dünya çapında matematik camiasından en az 500 meslektaşıyla işbirliği yaptı. Çalıştığı meslektaşları çeşitli matematik dallarında, sayı kuramı (tamsayıların incelenmesi), kombinatorik (bir nesne öbeğindeki olanaklı permütasyonların sayısıyla ilgilenen adlı matematik alanı) ve daha başka dallarda uzmanlaşmış matematikçilerdi. "Tebdilimekânda ispat vardır" düsturu, bir süreliğine "birlikte çalışmak" üzere diğer matematikçi arkadaşlarının evinde kalma âdetine bir göndermeydi.

İlk olarak 1971'de kullanılan Erdös sayısı, yayımladığı eserleri bakımından bir matematikçinin Erdös'e olan uzaklığını belirtir. Yalnızca matematik makalesi yazmış olanlara Erdös sayısı verilebilir; mesela Erdös'le ortaklaşa makale yazmış birinin Erdös sayısı 1'dir. Erdös'ün bir ortak yazarıyla (Erdös'ün kendisiyle değil) çalışmış başka birinin Erdös sayısıysa 2'dir. Albert Einstein'ın Erdös sayısı 2'dir. Paul Erdös'ün sayısı 0'dır.

Oakland Üniversitesi, matematik araştırmacılarının birbirleriyle ortak çalışmalarını analiz eden Erdös Sayısı Projesini yürütmekte. Ortalama Erdös sayısı yaklaşık olarak 5'tir. 10'dan büyük Erdös sayılarının ender olması, matematik camiasındaki mevcut işbirliğinin boyutunun göstergesidir. ■

> Problemlerle insanları eşleştirmek konusunda Erdös'ün insana hayret veren bir hüneri vardır. Haliyle de onun arkadaşlığının faydasını gören matematikçilerin sayısı çoktur.
>
> **Béla Bollobás**
> **Macar-İngiliz matematikçi**

Ayrıca bkz. Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Euler sayısı 186–91 ▪ Ayrımın altı derecesi 292–93 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23



BEŞGENLERİN HOŞ BİR GÖRÜNÜMÜ VARDIR

PENROSE KAROLARI

KISACA

KİŞİ
Roger Penrose (1931–)

ALAN
Uygulamalı geometri

ÖNCE
MÖ 4000 Sümerler yapılarındaki duvar süslemelerinde tesselasyonlara yer verir.

1619 Johannes Kepler tesselasyonlara dair belgelenmiş ilk çalışmayı kaleme alır.

1891 Rus kristalografi uzmanı Evgraf Fyodorov bir düzlemi periyodik olarak kaplayabilecek olanaklı grup sayısının sadece 17 olduğunu ispatlar.

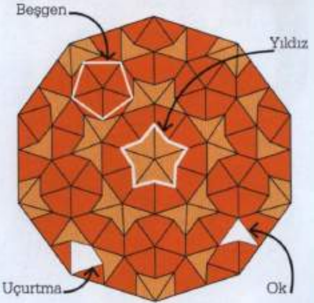
SONRA
1981 Hollandalı matematikçi Nicolaas Govert de Bruijn beş adet paralel çizgi ailesiyle Penrose döşemesi yapmayı anlatır.

1982 İsrailli mühendis Dan Shechtman yapıları Penrose döşemesine benzeyen kuazi-kristalleri keşfeder.

Karo desenleri binlerce yıldır sanat ve inşaatın belirgin ögelerindendir, özellikle de İslam dünyasında. İki boyutlu bir uzayı azami verimlikle doldurma arzusu, beşgenlerin birbirlerine boşluksuz ve binişmesiz geçerek oluşturduğu tesselasyonların incelenmesini beraberinde getirdi. Bal peteği gibi bazı doğal yapılar bu şekilde tesselasyon oluşturur.

Başka bir şekle ihtiyaç duymaksızın kendi kendilerine tesselasyon oluşturan üç düzgün şekil vardır: kare, eşkenar üçgen ve düzgün altıgen. Bununla beraber, düzgün olmayan şekiller de tesselasyon oluşturur ve yarı-düzgün tesselasyonların oluşumunda birden fazla düzgün şekil yer alır. Böylesi tesselasyonların örüntüleri çoğunlukla tekrarlanır. Bunlara "periyodik tesselasyonlar" denir.

Örüntünün tekrarlanmadığı aperiyodik tesselasyonların bulunması daha zordur ancak kimi düzgün şekillerin birleşiminden aperiyodik tesselasyonlar ortaya çıkabilir. İngiliz matematikçi Roger Penrose döşendiklerinde sadece aperiyodik tesselasyon oluşturabilen çokgenlerin var olup olmadığını araştırmaya girişti. 1974'te uçurtma ve ok şekilli karolardan döşemeler oluşturdu. Uçurtma ve ok, gösterilenlerle (yukarıda) tıpatıp aynı olmalıdır; uçurtmanın alanının okunkine oranı altın orandır. Döşemenin hiçbir bölümü öbürünü tutmamasına rağmen örüntü bir fraktalinkine benzer şekilde daha büyük bir ölçekte tekrarlanır. ■

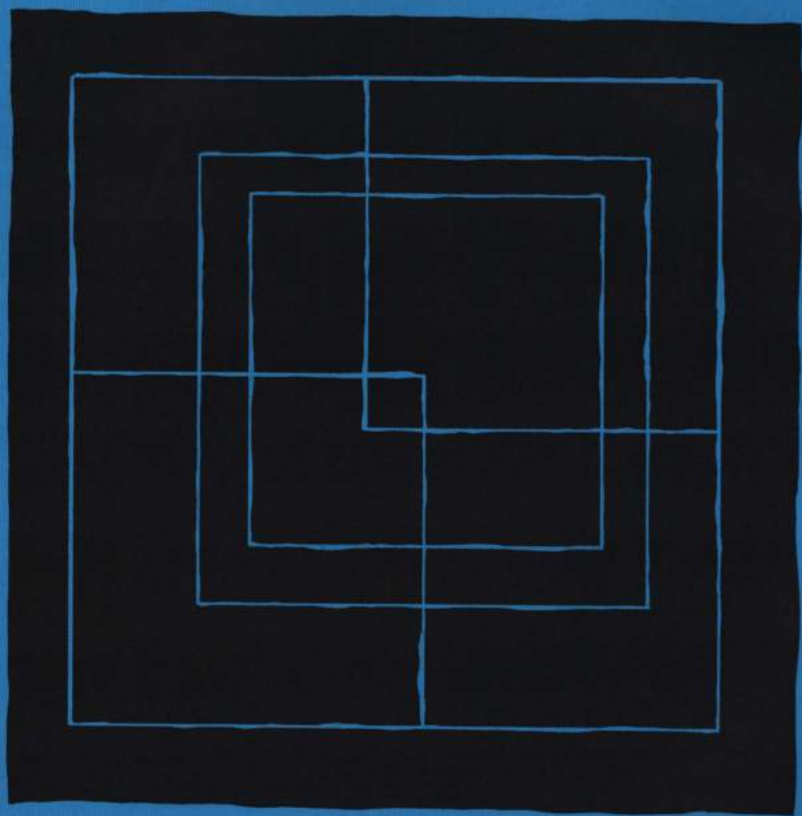


Penrose döşemesi uçurtma ve oklardan meydana gelir ve aperiyodik bir tesselasyon oluşturur. Beşgen ve yıldız gibi beşli simetrileri de saptamak mümkündür.

Ayrıca bkz. Altın oran 118–23 ▪ Maksimum ve minimum problemi 142–43 ▪ Fraktaller 306–11

SONSUZ ÇEŞİTLİLİK VE SINIRSIZ ÇAPRAŞIKLIK

FRAKTALLER



KISACA

KİŞİ
Benoit Mandelbrot
(1924–2010)

ALANLAR
Geometri, topoloji

ÖNCE
MÖ 4. yüzyıl Öklit, *Öğeler*'de geometrinin temellerini açıklar.

SONRA
1999 "Allometrik ölçekleme" adlı çalışma alanında fraktal büyüme biyolojik sistemlerdeki metabolik süreçlere uygulanır; bunun sonucunda tıpta değerli uygulamalar bulunacaktır.

2012 Avustralya'da en büyük üç boyutlu gökyüzü haritası evrenin bir noktaya kadar fraktal olduğuna işaret eder: Madde kümeleri, daha büyük madde kümelerinin içindedir ama sonuçta madde eşit dağılımlıdır.

2015 Fraktal analizi elektrik şebekelerine uygulanır; elektrik kesintisi sıklığının modellenmesi böylelikle mümkün olacaktır.

"Dağları ve bulutları içine alan bir geometri artık mevcut... Bilimdeki her şey gibi, bu yeni geometrinin de çok ama çok derin ve uzun kökleri var."
Benoit Mandelbrot



Bilgisayar grafiğiyle, Mandelbrot kümesinden türetilmiş bir fraktal örüntüsü gösterilmekte. Fraktal oluşturan yazılımlarla üretilen büyüleyici güzellikteki bu tür görsellerin ekran koruyucu olarak kullanımı çok yaygındır.

Öklit'ten sonraki bilginler ve matematikçiler dünyayı basit geometriyle modellediler: eğriler ve doğrular; daire, elips, çokgenler ve beş Platonik katıyla (küp, dörtyüzlü, sekizyüzlü, onikiyüzlü ve yirmiyüzlü). En doğal cisimlerin (dağların, ağaçların vb.) büyüklüklerinin, bu şekillerin birleşimlerine ayrıştırılarak bulunabileceği yönündeki kabul, son 2000 yılın büyük bölümünde ağır basan kabuldü. Ancak 1975'te Polonya doğumlu Mandelbrot dikkatleri fraktallere (tırtıklı dağ zirveleri gibi büyüklü küçüklü yapılar halinde tekrarlayan düzgün olmayan şekiller) çekti. Latince *fractus*'tan ("kırık" anlamına gelir) türemiş fraktaller en sonunda fraktal geometri başlığı altında incelenecekti.

Yeni bir geometri

Tüm dünyanın dikkatini fraktallere çeken kişi her ne kadar Mandelbrot olsa da onun buluşunun özünü oluşturan da önceki matematikçilerin bulgularıydı. 1872'de, Alman matematikçi Karl Weierstrass, "sürekli fonksiyon" kavramını formüle döktü. Girdideki değişikliklerin sonuç olarak çıktıda da aşağı yukarı eşit değişiklikleri meydana getirdiğini ifade ediyordu bu fonksiyon türü. Weierstrass fonksiyonu yalnızca köşelerden oluşur ve ne kadar büyütülerek bakılırsa bakılsın hiçbir kısmı düz değildir. O dönemlerde bu, Öklitçi şekillerin aksine, gerçek dünyayla hiçbir alakası olmayan matematiksel bir anormallik sayıldı.

1883'te, bir diğer Alman matematikçi Georg Cantor, İngiliz matematikçi Henry Smith'in çalışmasını ilerletip hiçbir yerde sürekli olmayan ve uzunluğu sıfır olan bir çizginin nasıl oluşturulduğunu betimleyerek gösterdi. Betimlemesinde önce bir doğru çizdi, doğrunun üç eşit diliminden ortadakini kaldırdı (geriye iki çizgi ve bir boşluk kaldı), sonra da bu süreci sonsuza dek tekrarladı. Sonuç olarak tamamı birbirleriyle bağlantısız nokta-

Ayrıca bkz. Platonik katılar 48–49 ■ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ■ Karmaşık düzlem 214–15 ■ Öklitçi olmayan geometri 228–29 ■ Topoloji 256–59

lardan oluşan bir çizgi elde edilir. Bu "Cantor kümesine" de Weierstrass fonksiyonu gibi metamatiğin kurulu düzenini bozan bir unsur gözüyle bakıldı ve bu yeni şekillere "patolojik" adı yakıştırıldı, yani "olağan niteliklerden yoksundu."

1904'te, İsveçli matematikçi Helge von Koch, Koch eğrisi veya "Koch kar tanesi" adıyla bilinen ve tekrarlanarak gitgide küçülen üçgen motiflerinin oluşturduğu şekli inşa etti. Bunun arkasından 1916'da üçgen şeklindeki deliklerden oluşan Sierpinski üçgeni (diğer adıyla Sierpinski contası) meydana çıktı.

Tüm bu şekillerde fraktal geometrinin başlıca bir niteliği olan kendine-benzerlik vardır. Kendine-benzeyen bir şeklin bir kısmının büyütülmesiyle daha küçük ama detayları birebir olan tıpkıları açığa çıkar. Matematikçiler bunun doğal büyümenin temel niteliklerinden biri olduğunun farkına vardı: bir örüntünün makrodan mikroya kadar birçok ölçekte tekrarlanması. 1918'de Alman matematikçi Felix Hausdorff fraktal boyutların var olduğunu ileri sürdü. Basit çizgi, düzlem ve katı, sırayla bir, iki ve üç boyutu işgal ediyor, buna karşılık bu yeni şekillere tamsayı olmayan boyutlar verilebiliyordu. Örneğin Britanya'nın kıyı şeridi kuramsal olarak tek boyutlu bir halatla ölçülebilir ancak koylar için ip, yarıklar için de iplik gerekir. Bu, kıyı şeridinin tek boyutta ölçülemeyeceği anlamına gelir. Koch eğrisi gibi, Britanya kıyı şeridinin Hausdorffboyutu da 1,26'dır.

Dinamik kendine-benzerlikler

Kendine-benzerliklerin sonsuz ölçeklerde incelenmesi felsefede ve sanatta genellikle meditatif bir etki yaratmak için başvurulan bir yöntemdir. Budist meditasyonun ve mandalaların (ayinlerde evreni temsilen kullanılan simgeler) ana ilkelerindendir ve çini gibi İslami süslemelerdeki kullanımı Tanrı'nın sonsuzluğu imasını barındırır. 19. yüzyıl İngiliz şairi William Blake'in "Auguries of Innocence" ("Masumiyet Alametleri") şiiri dahi bir kendine-benzerlik iması barındırır. Şiirin ilk satırı şöyledir: "Bir kum tanesinde görmek dünyayı." Japon ressam Katsushika Hokusai'nin sarmal misali döne döne tekrarlanan motifler içeren yapıtı genelde fraktallerin sanattaki





Benoit Mandelbrot

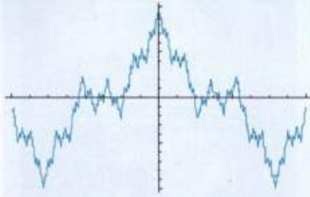
1924 yılında Varşova'da Yahudi bir ailenin çocuğu olarak dünyaya gelen Mandelbrot, Nazilerden kaçmak için Polonya'yı terk etti. Ailesi önce Paris'e, ardından Fransa'nın güneyine gitti. II. Dünya Savaşının ardından Mandelbrot burs alıp Fransa ve daha sonra ABD'de eğitim gördü, arkasından Paris'e döndü ve 1952'de şehrin üniversitesinde matematik bilimleri doktorasını tamamladı.

1958'de Mandelbrot, New York'ta faaliyet gösteren IBM'ye girdi. Araştırma görevlisi olarak yeni fikirler geliştirmesi için gereken mekân ve olanaklara sahip oldu. 1975'te "fraktal" terimini icat etti, 1980'de Mandelbrot kümesini ilan etti ve fraktal geometri adlı yeni bilim dalı ile bu yapı birbirinden ayrı anılmaz oldu. Mandelbrot'nun *The Fractal Geometry of Nature* (*Doğanın Fraktal Geometrisi*) kitabının yayımlanması hemen herkeste bu yeni bilim dalına yönelik bir ilgiyi uyandırdı. Mandelbrot ürettiği eserleriyle 1989'da aldığı Fransa'nın Légion d'honneur şeref nişanının da aralarında bulunduğu çok sayıda nişan ve ödüle layık görüldü. 2010'da hayata veda etti.

Önemli eserleri

1982 *Doğanın Fraktal Geometrisi*

Fraktallerin tarih cetveli



1872
Weierstrass fonksiyonu
Weierstrass fonksiyonu köşelerden oluşur ve ne kadar büyütülürse büyütülsün fonksiyonda asla bir düzlük görülmez.

1883
Cantor kümesi
Her çizginin üç eşit diliminden ortadakini kaldırıp art arda çizgilerde bu işlemi tekrarlamak suretiyle inşa edilen Cantor kümesi, bir aralık silsilesi oluşturur.





1904
Koch kar tanesi
Daha çok üçgen eklendikçe şeklin çapraşıklığı sonsuza dek artar.

kullanımına örnek olarak gösterilir; Katalan ressam Antoni Gaudi'nin mimarisi de keza.

1980'lerin sonu ve 1990'ların başında ABD ve Birleşik Krallık'taki "*rave*" müziği ortamı, fraktal sanatına duyulan ilgideki artışla alakalıydı. Günümüzdeyse, fraktal üretmeye yönelik bilgisayar programlarının bolluğu sayesinde, halkın geneli fraktal oluşturma olanağına sahip. Bu olgu "kelebek etkisi" tabiriyle ün kazanmıştır. Tek bir kelebeğin kanatlarını çırparak neden olduğu küçük bir bozulmanın, hava sisteminde kuramsal olarak muazzam bir etki yaratabileceğini vurgulamak amacıyla sık sık verilen örnekten almıştır adını. Poincaré'nin, kuramını ispatlamak için tasarladığı diferansiyel denklemlerden, fraktal yapılarındaki gibi bir kendine-benzerlik taşıyan dinamik durumların var olduğuna işaret ediyordu. Büyük ölçekli hava sistemleri, mesela siklonik akışlar, rüzgâr hamlesi gibi küçük ölçeklerde kendilerini tekrar eder.

Poincaré'nin eski öğrencilerinden Fransız matematikçi Gaston Julia, kendine-benzerlik kavramını, yineleme (bir fonksiyona değer girme, çıktı alma ve alınan bu değeri tekrar fonksiyona girme) denen bir işlemle karmaşık düzlemde (karmaşık sayılara dayanan koordinat sistemi) eşleme yapmaya başladığı zaman mercek altına aldı. Julia, benzer bir araştırmayı ayrıca yürüten George Fatou gibi, karesi alınan bir karmaşık sayıya bir sabit (belirli bir sayı ya da belirli bir sayıyı simgeleyen bir harf) eklediğinde ve ardından bu işlemi tekrarladığında, bazı ilk değerlerin sonsuza ıraksarken bazılarının sonlu bir değere yakınsadığını fark etti.



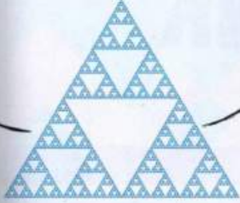
Julia ve Fatou bu farklı değerleri karmaşık düzleme eşleyip hangilerinin yakınsadığını ve hangilerinin ıraksadığını not ettiler. Bu bölgeleri ayıran sınır kendini-üretiyordu; yani fraktaldi. Dönemin kısıtlı bilgisayar olanakları Julia ve Fatou'nun, keşiflerinin gerçek önemini görmesine engel oldu ama ileride "Julia kümesi" adı verilecek buluşu yapmayı bilmişlerdi.

Mandelbrot kümesi

"Fraktal" terimini ilk defa 1970'lerin sonlarında Benoit Mandelbrot kullandı. Jula ve Fatou'nun çalışması, Mandelbrot'nun ilgisini IBM bilgi teknolojisi şirketinde çalıştığı sırada çekti. IBM'deki bilgisayar olanakları sayesinde Julia kümesini en ince ayrıntısına kadar inceleyebildi ve sabitin (c) bazı değerleriyle her noktanın birbirine bağlı olduğu "bağlantılı" kümeler elde edildiğini, diğer kümelerinse bağlantısız olduğunu not etti. Mandelbrot her c değerini karmaşık düzleme eşleyip bağlantılı ve bağlantısız kümeleri farklı

Piramit karnabahardaki kendine-benzerlikler sonsuz karmaşıklığı akla getirir. Eğreltiotlarından ayçiçeklerine, ammonitlerden deniz kabuklularına kadar doğal dünya fraktallerle doludur.

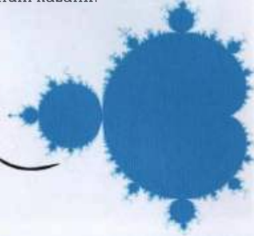
1916
Sierpinski üçgeni
Devamlı olarak iç içe eklenen üçgenler, sonsuz bir dantelimsi örüntüyü meydana getirir.





1918
Julia kümesi
Dinamik sistemlerin incelenmesinde kullanılan Julia kümesi, düzenli ve kaotik yinelemeler sergiler.

1980
Mandelbrot kümesi
Sonsuz kıvrımlı Mandelbrot kümesi, büyütüldükçe daha da incelikli bir görünüm kazanır.



renklerle belirtti. Sonuç olarak, 1980'de Mandelbrot kümesi ortaya çıktı.

Enfes bir karmaşıklığı olan Mandelbrot kümesi tüm ölçeklerde kendine-benzerlik sergiler: Mandelbrot kümesi büyütüldükçe kümenin daha küçük tıpkıları açığa çıkar. Japon matematikçi Mitsuhiro Shishikura 1991'de, Mandelbrot kümesinin sınırının Hausdorf boyutunun 2 büyüklüğünde olduğunu ispatlamıştır.

Fraktallerin uygulaması

Matematikçiler gerçek dünyanın düzensizliğini tarif etmek için fraktal geometriden yararlanmışlardır. Dağlar, ırmaklar, kıyı şeritleri, bulutlar, hava sistemleri, kan dolaşımı sistemleri, hatta karnabaharlar dâhil çoğu doğal nesnede kendine-benzerlik gözlenir. Bu çok çeşitli olguları modelleyebiliyor olmamız, onların (tamamen belirlenimci olmasa dahi) davranışlarını ve evrimini daha iyi anlamamızı sağlıyor.

Örneğin virüslerin davranışlarının ve tümörlerin gelişiminin anlaşılmasına yönelik tıp araştırmalarında fraktallerin uygulamalarına başvurulur. Polimer ve seramik malzemelerin geliştirilmesi başta olmak üzere mühendislikte de kullanılırlar. Ekonomi piyasalarındaki dalgalanmalar gibi, evrenin yapısı ve evrimi de fraktaller temelinde modellenebilmektedir. Uygulamalarının çeşitlenmesine bilgisayarların kapasitesinin sürekli olarak artması da eklendiğinde, içinde yaşadığımız, görünüşte kaotik olan dünyayı anlamamızda fraktallerin oynadığı rol yavaş yavaş vazgeçilmez hale geliyor. ■

Fraktaller ve sanat



Japon ressam Katsushika Hokusai'nin *Kanagawa'nın Büyük Dalgası* (1760-1849) tablosunda hissedilen coşkunluk, ressamın kendine-benzerlik kavramını kullanmasının sonucudur.

Kendine-benzerliklerin sonsuz ölçeklerde incelenmesi, felsefede ve sanatta genellikle meditatif bir etki yaratmak için başvurulan bir yöntemdir. Budist meditasyonun ve mandalaların (ayinlerde evreni temsilen kullanılan simgeler) ana ilkelerindendir ve çini gibi İslami süslemelerdeki kullanımı Tanrı'nın sonsuzluğu imasını barındırır. 19. yüzyıl İngiliz şairi William Blake'in "Auguries of Innocence" ("Masumiyet Alametleri") şiiri dahi bir kendine-benzerlik iması barındırır. Şiirin ilk satırı şöyledir: "Bir kum tanesinde görmek dünyayı."

Japon ressam Katsushika Hokusai'nin sarmal misali döne döne tekrarlanan motifler içeren yapıtı, genelde fraktallerin sanattaki kullanımına örnek olarak gösterilir; Katalan ressam Antoni Gaudi'nin mimarisi de keza.

1980'lerin sonu ve 1990'ların başında ABD ve Birleşik Krallık'taki "rave" müziği ortamı, fraktal sanatına duyulan ilgideki artışla alakalıydı. Günümüzdeyse, fraktal üretmeye yönelik bilgisayar programlarının bolluğu sayesinde insanların genelinin fraktal oluşturma olanağı bulunuyor.



EN FAZLA DÖRT RENK

DÖRT RENK TEOREMİ

KISACA

KİŞİLER
Kenneth Appel (1932–2013), **Wolfgang Haken** (1928–)

ALAN
Topoloji

ÖNCE
1852 Güney Afrikalı hukuk öğrencisi Francis Guthrie bir haritadaki bitişik alanların aynı renkte olmaması için dört renk gerektiğini ileri sürer.

1890 İngiliz matematikçi Percy Heawood beş rengin tüm haritaları boyamaya yeterli olduğunu ispat eder.

SONRA
1997 ABD'de, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Robin Thomas ve Paul Seymour dört renk teoreminin daha basit bir ispatını çıkarır.

2005 Microsoft araştırmacısı Georges Gonthier genel amaçlı teorem-ispatlama yazılımıyla dört renk teoremini ispatlar.

Bir haritayı, aynı sınırı paylaşan ülke çiftlerinin hiçbiri aynı renkte olmayacak şekilde **boyamak** için **kaç renk** gereklidir?



Sadece **iki veya üç** renkle bunu yapmak mümkün değildir.



1890'da, **beş renkle** her haritanın boyanabileceği ispatlanır.



1976'da, **dört renkten** fazlasının gerekli olmadığı, bilgisayar kullanılarak ispatlanır.



Bir haritayı boyamak için dört renk yeterlidir.

Ne kadar çetrefilli olursa olsun bir haritanın, aynı sınırı paylaşan iki ülke ya da bölge aynı renkte olmayacak şekilde, sadece dört renkle boyanabileceği, uzun zamandır kartografların bildiği bir şeydir. Beş renk gerekliymiş gibi görünse de haritayı yalnızca dört renkle boyamak her zaman mümkündür. Matematikçiler basit gibi duran bu teoreme 120 yıldan uzun bir süre ispat aradı. Matematikteki çözülmemiş en dayanıklı teoremlerden biri böylelikle bu teorem oldu.

Dört renk teoremini ilk üreten kişinin Güney Afrikalı bir hukuk öğrencisi olan Francis Guthrie

Ayrıca bkz. Euler sayısı 186–91 ▪ Çizge kuramı 194–95 ▪ Karmaşık düzlem 214–15 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23



Bir düzlem üzerine herhangi bir şekil birleşimi, bitişik iki şekil aynı renkte olmayacak biçimde, deseni ne kadar karmaşık olursa olsun, sırf dört renkle boyanabilir.

olduğu düşünülür. Francis Guthrie, İngiltere'deki kontlukların bir haritasını sadece dört renk kullanarak boyadı ve ne kadar karmaşık olursa olsun tüm haritalarda bunun aynısının yapılabileceğini düşündü. 1852'de Londra'da Augustus De Morgan'dan matematik eğitimi almakta olan kardeşi Frederick'e teoreminin ispatlanmasının mümkün olup olmadığını sordu. De Morgan teoremi ispatlayamadığını kabullenip İrlandalı matematikçi William Hamilton'la paylaştı. Hamilton da teoremi ispatlamaya giriştiyse de başarılı olamadı.

Hatalı başlangıç

İngiliz matematikçi Alfred Kempe'nin dört renk teoremi için bulduğunu iddia ettiği bir ispatı 1879'da bilim dergisi *Nature*'da yayımlandı. Kempe, çalışmasıyla beğeni topladı ve kısmen de olsa bu ispatının etkisiyle iki yıl sonra İngiltere Kraliyet Bilimler Akademisine üye seçildi. Ancak 1890 yılında bir diğer İngiliz matematikçi Percy Heawood, Kempe'nin ispatında bir boşluk buldu. Kempe hata yapmış olduğunu ve bu hatayı düzeltemediğini teslim etti. Buna karşılık Harwood, herhangi bir haritayı boyamak için beşten fazla renge gerek duyulmayacağını doğru olarak ispatlamayı bildi.

Matematikçiler problem üzerindeki çalışmalarına devam edip adım adım ilerleme kaydettiler. 1922'de Philip Franklin 25 veya daha az bölgeli her haritanın dört renkle boyanabileceğini ispatladı. 25 sayısı yavaş yavaş arttı. 1970 yılında Norveçli matematikçi Øystein Ore ve Amerikalı matematikçi Joel Stemple kafa kafaya verip 39'u bulmayı başardılar. 1976'daysa Fransız Jean Mayer sayıyı 95'e çıkardı.

Yeni umut

Muazzam miktarlarda veriyle işlem yapma kapasitesine sahip süper bilgisayarların kullanıma girmesiyle dört renk teoremine çözüm bulma merakı 1970'lerde yeniden canlandı. Alman matematikçi Heinrich Heesch bir çözüm yöntemi önerdi ama yöntemi test edebileceği bir süper bilgisayar bulamadı. Heesch'in eski öğrencilerinden Wolfgang Haken de probleme merak sardı ve bilgisayar programcısı Keneth Appel'la ABD'deki Illinois Üniversitesinde görüştükten sonra mesafe katetmeye başladı. İkili nihayet 1977'de problemin sırrını çözdü. Çözümde tamamen bilgisayar gücüne bel bağlamışlar (matematik tarihindeki bu şekilde ulaşılan ilk ispat), milyarlarca hesaplama ve 1200 saatlik bilgisayar kullanım süresi sonucunda 2000 kadar durumu incelemişlerdi. ▪

Bilgisayar ispatları

Appel ve Haken'ın dört renk teoremi için 1977'de sundukları ispat, bilgisayar kullanılarak yapılan ilk matematik teoremi ispatıydı. Bu gelişme, problemleri mantık yoluyla çözmeye ve bu yolla ulaşılmış çözümleri gözden geçirmeye alışkın olan matematikçiler arasında tartışmaya yol açtı. Appel ve Haken bilgisayarı, tüketme yoluyla ispat yapmak için kullanmıştı. Elle yapmanın imkânsız olduğu bir işlem yapılmış, her bir olanak tek tek dikkatle yoklanmıştı. Tartışma konusu, insanların gözden geçiremediği uzun bir hesaplamanın, ardından da "evet, teorem ispatlandı" diye basitçe verilen bir hükmün kabul edilip edilemeyeceğiydi. Çoğu matematikçi kabul edilemeyeceğini savundu. İspatların bilgisayarla yapılması hâlâ tartışmalı bir mesele ama teknolojik ilerlemelerle birlikte bu tür ispatlar da daha güvenilir hale geldi.



IBM System/370 bilgisayarı (y. 1970) sanal bellek kullanan ilk bilgisayarlardandı ve bu çalışma belleği sistemi sayesinde büyük miktardaki verileri işleyebiliyordu.

TEK YÖNLÜ HESAPLAMAYLA VERİLERİN GÜVENLİĞİNİ SAĞLAMAK

KRİPTOGRAFİ



KISACA

KİŞİLER
Ron Rivest (1947–),
Adi Shamir (1952–),
Leonard Adleman (1945–)

ALAN
Bilgisayar bilimi

ÖNCE
MS 9. yüzyıl El-Kindi sıklık analizini geliştirir.

1640 Pierre de Fermat (asallığa dair) "küçük teoremini" tespit eder. Açık anahtarlı şifrelemede kullanılacak asal sayıların bulunmasında bu teorem test olarak halen kullanılmaktadır.

SONRA
2004 Eliptik eğriler kriptografide ilk defa kullanılır. Daha küçük anahtarların kullanıldığı bu yöntem yine de RSA algoritmasıyla aynı güvenliği sunar.

2009 Adını açıklamayan bir bilgisayar bilimcisi ilk Bitcoin'i çıkarır. Merkez bankası olmayan bu kripto parayla ilgili tüm işlemlerde şifreleme vardır ama kullanılan şifreleme açık anahtarlı şifrelemedir.

Kriptografi gizli iletişim araçlarının geliştirilmesidir. Modern yaşamın her yerinde rastlanan bir unsuru haline gelmiştir; öyle ki, iki dijital cihaz arasındaki hemen her bağlantı bir "tokalaşmayla", cihazların kurulacak bağlantı için bir güvenlik yöntemi üzerinde anlaşmasıyla başlar. İşte o tokalaşmaların çoğu üç matematikçinin emeklerinin ürünüdür: Ron Rivest, Adi Shamir ve Leonard Adleman. 2002'de Turing Ödülü'nü kazanmalarını sağlayan RSA algoritmasını (adlarının ilk harflerinden oluşur) 1977'de geliştirdiler. RSA algoritmaları, bağlantıyı izleyen bir üçüncü tarafın hiçbir gizli bilgiyi

Ayrıca bkz. Grup kuramı 230–33 ▪ Riemann varsayımı 250–51 ▪ Turing makinesi 284–89 ▪ Bilgi kuramı 291 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–23

> Matematiği pek de gerektiren bir iş değildi ama matematikçilerin konuya yatkınlığı vardı.
>
> **Joan Clarke**
> **İngiliz kriptoanalist**



anlayamamasını sağlamaları bakımından özeldir.

İnsanların iletişimlerini şifreleme gereksinimi duymasının başlıca nedenlerinden biri, mali işlemlerini yaptıkları esnada bankacılık bilgilerinin yanlış kişilerin eline düşmediğinden emin olmaktır. Bununla birlikte, şifreleme her tür "düşmana" (rakip şirketlere, düşman güçlere veya güvenlik hizmetlerine) karşı kullanılır. Kriptografi kadim zamanlardan beri uygulanır. Mezapotamya'dan çıkarılan MÖ y. 1500'den kalma kil tabletler, çanak çömlek perdahlama reçeteleri ve daha başka değerli bilgileri korumak amacıyla çoğu zaman şifreleniyordu.

Şifre ve anahtar

"Kriptografi" terimi Yunancadan gelir ve bu dildeki karşılığı "gizli yazımdır." Tarihin büyük bir bölümü boyunca yazılı iletileri güvence altına almak için kullanılmıştır. Şifrelenmemiş iletiye düz metin, şifrelenmiş iletiye şifreli metin denir. Örneğin "HELLO," IFMMP'ye biçimini alabilir. Düz metinden bu şifreli metne geçiş için bir şifre (*cipher*) bir de anahtar gereklidir. Şifre (*cipher*), bir algoritmadır (sistemli, tekrarlanabilir bir yöntem); bu örnekteki algoritma, her harfin alfabenin başka sırasındaki bir harfle değiştirilmesidir. Anahtar +1'dir çünkü düz metindeki her harf, alfabedeki yerinin +1 yanındaki harfle değiştirilir. Anahtar −6 olsaydı o halde şifre, aynı "HELLO" düz metnini "BZFFI" harflerine dönüştürürdü. Roma diktatörü Julius Caesar MÖ 1. yüzyılda kullandığı için bu basit yerine koyma sistemine Caesar şifresi (veya Caesar'ın kaydırma şifrelemesi) adı verilmiştir. İletiyi deşifre etmek için aynı şifre ve anahtar (ters sırayla) kullanıldığından Caesar şifresi bir simetrik şifreleme örneğidir.



Deşifre etme işlemleri

Yeterli kâğıt ve süre verildiğinde tüm yerine koyma olanaklarıyla deneme yanılma yöntemi uygulanırsa, bir Caesar şifresi nispeten kolay bir şekilde çözülebilir. Günümüzde bilinen ifadesiyle bu bir "kaba kuvvet" tekniğidir. Daha karmaşık şifre ve anahtarlarla, kaba kuvvet daha fazla zamana mal olur. Ayrıca, bilgisayarlardan önce, büyük miktarda bilgi taşıyacak uzunluktaki iletilerde fiilen işlevsiz kalıyordu. Uzun

Şifre tekerlekleri, mesela 1802'den kalma Britanya kökenli bu kalıntı, Caesar şifrelerinin çözülmesini hızlandırıyordu. İki ayrı tekerlek, bulunan anahtara göre ayarlanabiliyordu.

iletiler başka bir şifre çözme tekniğine karşı da savunmasızdı: sıklık analizi. İlk olarak Arap matematikçi El-Kindi'nin 9. yüzyılda geliştirdiği bu teknik belirli bir dilin alfabesindeki her harfin sıklığından yararlanıyordu. İngilizcedeki en yaygın harf "e" olduğundan bir kriptoanalist şifreli metindeki en yaygın harfi bulup e ile belirtirdi. En yaygın ikinci harf "t"dir, üçüncü harf "a"dır vb. Yaygın harf öbekleri de, mesela "th" ve "ion", şifrenin açığa çıkarılması için yol sağlayabilir. Şifreli metin yeterli büyüklükte olduğu takdirde bu sistem, şifrelemeye ne kadar özenilmiş olursa olsun, yerine koymalı şifrelerin tümünde işe yarıyordu.

Sıklık analizine karşı koymanın iki yolu vardır. Birinci yol, "kod" kullanarak düz metni belirsizleştirmektir. Kriptografide bu terim için özel bir tanım kullanılır. Bir kod henüz şifrelenmemiş bir düz metindeki bir sözcüğü veya sözcük öbeğini değiştirir. "Perşembe günü limon al" şeklinde kodlanmış bir düz metinde, "al" kodu "öldür" için, "limon" kodu bir ölüm listesindeki belli bir hedef için olabilir; hatta tüm hedefler meyve olarak kodlanmış da olabilir.



Enigma makinesini Alman casusları 1923'ten 1945'e kadar kullandılar. Lamba panelinin arkasında üç rotor çarkı bulunur, ön bağlantı paneliyse ön taraftadır.

Kod sözcüklerinin listesi olmadan, iletinin tam anlamını deşifre etmek imkânsızdır.

Enigma kodu

Şifreleme güvenliğini artırmaya yönelik başka bir yöntem çok alfabeli şifre kullanmaktır. Düz metindeki bir harfin şifreli metindeki yerine farklı birkaç harfin koyulabildiği bu yöntem sayesinde, şifrenin sıklık analiziyle çözülmesi olanağı elenir. Bu tür şifreler ilk olarak 16. yüzyılda geliştirildiyse de içlerinde en ünlüsü II. Dünya Savaşında Eksen güçlerince kullanılan Enigma makinelerinin ürettiği şifrelemeydi.

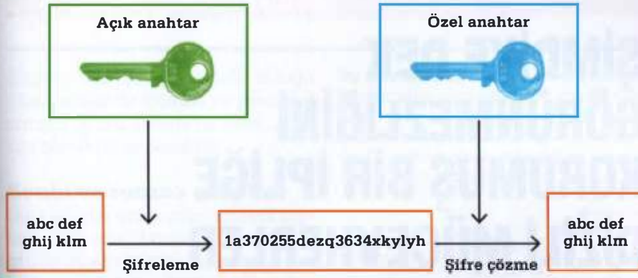
Enigma makinesi alt edilmesi zor bir şifreleme aygıtıydı. Esas itibariyle her biri alfabedeki bir harfin karşılığı olan 26 adet ampüle (veya lambaya) bağlı bir pilden ibaretti. Operatör, klavyedeki bir harfe bastığında lamba panelinde ona karşılık gelen harfin ışığı yanıyordu. Aynı tuşa ikinci kez basıldığında her zaman farklı bir harfin (tuşla hiçbir zaman aynı olmayan bir harfin) ışığı yanıyordu çünkü pil ile lamba panosunun arasındaki bağlantılar basılan her tuşta tıkırdayan üç rotorca değiştiriliyordu. 10'ar harfi birbirleriyle değiştirip iletiyi daha da karıştıran ön bağlantı paneli de karmaşıklığa katkıda bulunuyordu. Bir enigma iletisinin şifrelenmesi ve deşifre edilmesi için ilgili iki makinenin de kurulumunun düzgün olması gerekiyordu. Bunun için uygun üç rotorun yerleştirilip doğru başlangıç konumlarına getirilmeli ve 10 adet kablo soketi panele doğru bir şekilde bağlanmalıydı. Belirlenen ayarlar, şifreleme anahtarı oluyordu. Üç rotorlu bir Enigmada her gün değişen 158.962.555.217'nin üzerinde ayar olanağı vardı.

> An itibariyle bilgisayar teknolojisi, [insanların] kimliklerini tamamen gizli tutarak birbirleriyle iletişim ve etkileşim kurmasını sağlamanın eşiğindedir.
>
> **Peter Ludlow**
> **Amerikalı filozof**

Enigma'nın eksiği, bir harfi kendisiyle şifreleyememesiydi. Müttefik şifre kırıcılar da fırsattan istifade "*Heil* Hitler" ve "Hava Raporu" gibi sık kullanılan sözcük öbeklerini deneyerek o günün anahtarını bulmaya çalışıyordu. Bu sözcüklerdeki hiçbir harfi barındırmayan şifreli metinler, sözcüklerin şifreli metni olmaya adaydı. Müttefik şifre kırıcılar Turing Bombe'u kullandılar. Enigma makinelerini taklit eden bu elektromekanik aygıtın İngiliz matematikçi Alan Turing ve mesai arkadaşlarının geliştirdiği kısayollarla, şifrelemeyi kaba kuvvetle kırması amaçlanıyordu. İngilizlerin şifreleme aygıtı Typex, harfleri kendileriyle şifreleyebilecek şekilde değiştirilmiş bir Enigma uyarlamasıydı. Naziler pes edip Typex'i çözmeye çalışmaktan vazgeçtiler.

Asimetrik şifreleme

Simetrik şifrelemede anahtar ne kadar güvenliyse iletiler de en fazla o kadar güvenlidir. Anahtar fiziksel yollardan alınıp verilmelidir: bir askeri kod defterine yazılı halde veya tenha yerdeki bir randevuda bir



Açık anahtarlı şifrelemede veriler, herkesin erişebildiği bir şifreleme anahtarıyla karıştırılır. Veriler yalnızca, sahibinin bildiği özel bir anahtarla eski düzenine getirebilir. Bu yöntem küçük veri miktarlarında etkilidir, büyük miktarlardaysa çok zaman alır.

casusun kulağına fısıldayarak. Anahtar yanlış kişilerin eline düşerse şifreleme başarısız olur.

Bilgisayar ağlarının yaygınlık kazanmasıyla insanlar birbirleriyle hiç buluşmadan, çok uzak mesafeler üzerinden iletişim kurma olanağına sahip oldu. Bununla beraber, en çok kullanılan ağ olan internet herkese açıktır; dolayısıyla bir bağlantı üzerinden paylaşılan her simetrik şifre, istenmeyen tarafların erişimine açık olduğundan işe yaramaz hale gelir. Asimetrik şifreleme henüz olgunlaşmaktayken geliştirilen RSA algoritmasında gönderici ve alıcı, iki anahtar kullanır: biri özel, diğeri açık. Alice ve Bob adlı iki kişi gizlice iletişim kurmak istiyorsa Alice açık anahtarını Bob'a gönderebilir. Bu açık anahtar iki sayıdan oluşur: n ve a. Özel bir anahtar olan z'yi de kendisine saklar. Bob n ve a'yı düz metin (M) bir iletiyi şifrelemek için kullanır ve bir sayı zinciri (yani şifrelenen harflerin dönüştürüldüğü sayılar) elde eder. Her düz metin sayısı, a üssü için kuvveti alındıktan sonra n'ye bölünür. Bölme işlemi, modüler aritmetik işlemidir (kısaltılışı: mod_n), yani yanıt sadece kalan sayıdır. Örneğin n 10 olsaydı, M de 12 olsaydı, yanıt 2 olurdu. M^a 2 olsaydı, yanıt yine 2 olurdu çünkü 2'nin içinde sıfır adet 10 vardır ve kalan sayı 2 çıkar. $M^a\ mod_n$ işleminin yanıtı şifreli metindir (C); bu örnekte 2'dir. Casusluk yapan biri n ve a açık anahtarını bilebilecek, ama M'nin 2 mi 12 mi yoksa 1002 mi (her biri 10'a bölündüğünde kalan 2'dir) olduğu konusunda hiçbir fikri olmayacaktır. Yalnızca Alice z özel anahtarını kullanarak bunu öğrenebilir, çünkü $C^z\ mod_n = M$.

Bu algoritmanın can alıcı sayısı n'dir ve iki asal sayının birbiriyle çarpılmasıyla elde edilir: p ve q. Bunun üzerine, mod hesaplamalarının sağlamasını yapmaya yönelik bir formül kullanılarak p ve q'dan a ve z hesaplanır. Şifreyi kırmanın tek yolu p ve q'yu bulmak, ardından z'yi hesaplamaktır. Bir şifre kırıcı bunu yapabilmek için n'nin asal çarpanlarını bulmalıdır, oysa günümüzdeki RSA algoritmalarında n için en az 600 basamaklı değerler kullanılır. Bir süper bilgisayarın p ve q'yu deneme yanılma yoluyla hesap etmesi binlerce yıl sürer, bu nedenle RSA ve benzeri protokollerin kırılması uygulamada mümkün değildir. ■



Lav lambaları ile bilgisayarlar arasında bağlantı oluşturulup lambalardaki hareketlere dayanan bir gelişigüzel sayı seçkisi üretilebilir.

Asal sayıları gelişigüzel yollardan bulmak

RSA algoritması ve diğer açık anahtarlı şifreleme sistemleri için p ve q'nun görevlerini görecek büyük bir asal sayı öbeği gerekir. Sistemin bel bağladığı asal sayı miktarı çok az olduğunda şifrelemede her gün kullanılan p ve q'nun bazı değerlerini saldırganların bulması olanaklı hale gelir. Çözüm, yeni asal sayıların teminidir. Yeni asayıları bulmak için gelişigüzel sayılar üretilir, ardından Pierre de Fermat'nın "küçük teoremiyle" bu gelişigüzel sayıların asal olup olmadığına bakılır: Eğer bir sayı (p) asalsa başka bir sayının (n) p üslü kuvvetinden n çıkarıldığında yanıt p'nin bir katıdır.

Bilgisayarları tamamıyla gelişigüzel sayı dizileri oluşturacak şekilde programlamak kolay değildir, dolayısıyla şirketler bunları üretmek için fiziki olgulardan yararlanır. Lav lambalarının hareketlerini izleyecek, ışınetkin parçalanmayı ölçecek ya da radyo yayınlarının çıkardığı beyaz gürültüleri dinleyecek şekilde programlanan bilgisayarlar, elde ettikleri girdileri, şifrelemede kullanılacak gelişigüzel sayılara dönüştürür.



ŞİMDİYE DEK GÖRÜNMEZLİĞİNİ KORUMUŞ BİR İPLİĞE DİZİLİ MÜCEVHERLER

SONLU BASİT GRUPLAR

KISACA

KİŞİ
Daniel Gorenstein
(1923–92)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1832 Évariste Galois basit grup kavramını tanımlar.

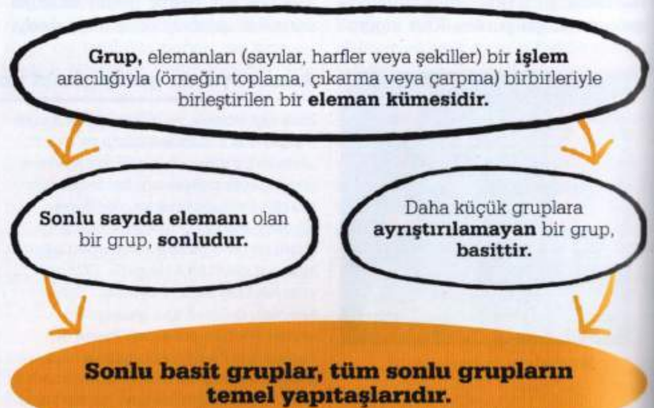
1869–1889 Fransız matematikçi Camille Jordan ve Alman Otto Hölder tüm sonlu grupların yine sonlu gruplarla inşa edilebileceğini ispatlarlar.

1976 Hırvat matematikçi Swonimir Janko sonlu basit sayı keşiflerinin sonuncusu olacak 4. Janko Grubu'nu ilan eder.

SONRA
2004 Daniel Gorenstein'in başladığı sonlu basit grupları sınıflama işlemini Amerikalı matematikçiler Michael Aschbacher ve Stephen D. Smith tamamlarlar.

Basit gruplara cebrin atomları tanımı yakıştırılmıştır. Aşağı yukarı 1889'da ispatlanan Jordan-Hölder teoremine göre, tüm pozitif tamsayıları asal sayılardan meydana getirmek nasıl mümkünse aynı şekilde sonlu grupları sonlu basit sayılardan oluşturmak da mümkündür. Matematikte grup öylesine bir araya getirilmiş bir şeylerin öbeklenmesi değil, grup üyelerinin daha çok üye üretecek şekilde nasıl kullanılabileceğinin (örneğin çarpma, çıkarma veya toplama işlemleriyle) bir tanımlamasıdır. Grupların sınıflanması için önayak olan Amerikalı matematikçi Daniel Gorenstein bu işe 1960'ların başında koyuldu ve sonlu basit grupların sınıflamasını tamamladığı makalesini 1979'da yayımladı.

Basit gruplar ile geometrideki simetri arasında benzerlikler vardır. 90 derece döndürülen bir küpün döndürülmeden önce nasılsa öyle görünmesi gibi, iki veya üç boyutlu



Ayrıca bkz. Platonik katılar 48–49 ▪ Cebir 92–99 ▪ Tasarı geometri 154–155 ▪ Grup kuramı 230–223 ▪ Kriptografi 314–17 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–323

düzgün bir şeklin ilişkili olduğu dönüşümler de (dönme ve yansıma) simetri grubu denen bir basit grup tipi olarak düzenlenebilir.

Sonlu ve sonsuz gruplar

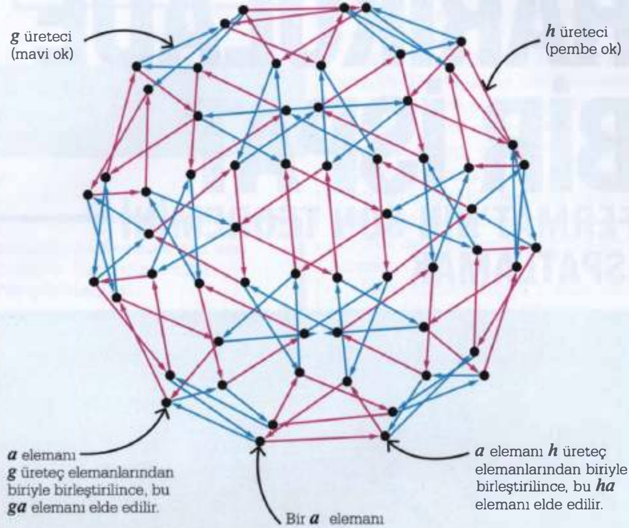
Bazı gruplar sonsuzdur; mesela toplama altında bütün tamsayıların grubu öyledir çünkü kapsadığı sayılar sonsuz kere toplanabilir. Öte yandan –1, 0 ve 1 sayıları çarpma işlemiyle birlikte sonlu bir grup oluşturur; grubun hangi üyesiyle çarpma işlemi yapılırsa yapılsın, sonuç sadece –1, 0 veya 1 çıkar. Bir gruptaki tüm üyeler ve o grubu oluşturmaya ilişkin kurallar Cayley çizgesiyle (bkz. sağda) kolayca görselleştirilebilir.

Daha küçük gruplara ayrıştırılamayan bir grup basittir. Basit grupların sayısı sonsuzdur ancak basit grup tiplerinin sayısı sonsuz değildir (en azından sonlu büyüklükteki basit gruplar dikkate alındığında). Amerikalı matematikçi John G. Thompson 1963 tarihinde önemsiz gruplar (örneğin 0 + 0 = 0 veya 1 × 1 = 1) bir kenarda bırakıldığı takdirde tüm basit grupların eleman sayısının çift olduğunu ispatladı. Bunun üstüne Daniel Gorenstein daha zorlu bir göreve soyundu: her sonlu basit grubun sınıflamaya.

Canavar

Sonlu basit gruplardan meydana gelen 18 ailenin kesin tanımları vardır ve her aile belli tipte geometrik yapıların simetrileriyle alakalıdır. Buna karşılık bir de seyrek gruplar adı verilen 26 adet tekil grup vardır ve bunların Canavar adlı en büyüğünün 196.883 boyutu ve yaklaşık olarak 8×10^{53} elemanı vardır. Her sonlu basit grup ya 18 aileden birine ya da 26 seyrek gruptan birine üyedir. ■

Bu Cayley çizgesinde, A5 grubuna (20 yüze sahip üç boyutlu bir şekil olan düzgün yirmiyüzlünün dönme simetrilerinin grubu) ait 60 elemanın (farklı yönelimin) tamamı ve birbirleriyle ilişkileri gösterilmekte. A5 sonlu sayıda elemanı olduğu için sonlu bir gruptur. A5 basit bir gruptur da. İki üreteci (grubun başka bir elemanını vermek üzere birleştirilebilen elemanların her biri) vardır.



Daniel Gorenstein

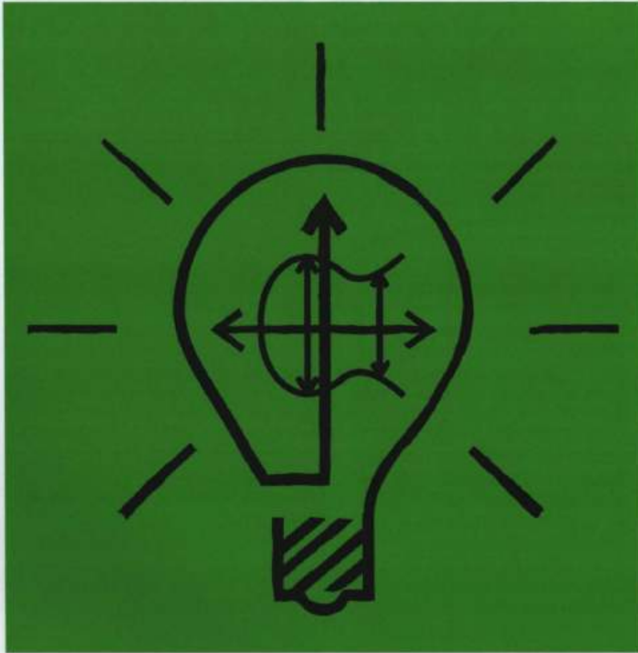
1923'te Boston eyaletine bağlı Massachusetts'te dünyaya gelen Daniel Gorenstein 12 yaşında kendi kendine kalkülüs öğrendi ve daha sonra Harvard Üniversitesine girdi. Ömrünü adayacağı araştırma konusu olan sonlu gruplarla orada tanıştı. 1943'te mezun olduktan sonra birkaç yıl Harvard'da kaldı. Bu süreçte, önce II. Dünya Savaşında askeri personele matematik öğretti, ardından matematikçi Oscar Zariski'nin danışmanlığında doktora diplomasını aldı. Gorenstein 1960 ve 1961 yıllarında Chicago Üniversinde grup kuramı üstüne dokuz aylık bir programa katıldı. Sonlu basit grupların sınıflanmasını önermek bu program sayesinde aklına geldi. Sınıflama projesiyle ilgili çalışmalarını 1992 yılında hayatını kaybedene dek sürdürdü.

Önemli eserleri

1968 *Sonlu gruplar*
1979 "Sonlu basit grupların sınıflanışı"
1982 *Sonlu basit gruplar*
1986 "Sonlu basit grupları sınıflamak"

SAHİDEN HARİKULADE BİR İSPAT

FERMAT'NIN SON TEOREMİNİ İSPATLAMAK



KISACA

KİŞİ
Andrew Wiles (1953–)

ALAN
Sayı kuramı

ÖNCE
1637 Pierre de Fermat x, y ve z pozitif tamsayılarının, n'nin 2'den büyük olduğu $x^n + y^n = z^n$ denklemini sağlayan hiçbir kümesi olmadığını belirtir. Ama ispat sunmaz.

1770 İsviçreli matematikçi Leonhard Euler, Fermat'nın son teoreminin $n = 3$ için doğru olduğunu gösterir.

1955 Japonya'da Yutaka Taniyama ve Goro Shimura her eliptik eğrinin bir modüler formu olduğunu ileri sürerler.

SONRA
2001 Taniyama-Shimura kestirimi kabul edilir. Kestirime modülerlik teoremi denir.

1665'te vefat eden Fransız matematikçi Pierre de Fermat'dan geriye kalan eşyaların arasında MS 3. yüzyıl Yunan matematikçisi Diyofantus'un yazdığı, çok kullanılmaktan yıpranmış, kenarları Fermat'nın düşüncelerinin izlerini taşıyan bir *Arithmetica* nüshası vardı. Fermat'nın sayfa kenarlarındaki karalamalarında yönelttiği tüm sorular, biri hariç, daha sonra çözüldü. Sayfanın kenarına insanı bir an için ümitlendiren bir not düşmüştü: "Sahiden harikulade bir ispat keşfettim ama bu daracık kenar boşluğuna sığdırmam zor."

Fermat'nın aldığı not, Diyofantus'un Pisagor teoremi hakkındaki görüşleriyle alakalıydı. Pisagor bu teo-

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Olasılık 162–65 ▪ Eliptik fonksiyonlar 226–27 ▪ Catalan kestirimi 236–37 ▪ 20. yüzyıl için 23 problem 266–67 ▪ Sonlu basit gruplar 318–19

Pierre de Fermat bir kitabın kenar boşluğuna **Pisagor teoremi** hakkında bir not yazmıştı.

2'den büyük her n pozitif tamsayısı için şöyle bir iddiada bulunmuştu: $x^n + y^n \neq z^n$

"Sahiden harikulade bir ispat keşfettim ama bu daracık kenar boşluğuna sığdırmam zor."

Üç yüzyıldan uzun zamandır matematikçiler **Fermat'nın son teoremini** ispatlamaya çalıştıysa da başarısız oldular. Teorem ancak **1994'te çözülebildi.**

reminde şunu saptamıştı: Bir dik üçgende hipotenüsün (dik açının karşısındaki kenar) karesi diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir, yani $x^2 + y^2 = z^2$. Fermat, bu denklemin x, y ve z için sonsuz tamsayı çözümü olduğunu biliyordu; mesela, "Pisagor üçlüleri" olarak adlandırılan 3, 4 ve 5 (9 + 16 = 25) ve 5, 12 ve 13 (25 + 144 = 169) gibi sayılar. Sonra üssü 3, 4 veya 2'den büyük herhangi bir tamsayı için başka üçlülerin de bulunabilir mi diye merak etmişti. Fermat'nın ulaştığı sonuca göre n'nin yerine 2'den büyük tamsayı yazılamazdı. Fermat şu sözleri yazıya dökmüştü: "Bir küpün, iki küpün toplamı olması imkânsızdır; keza dördüncü derece bir kuvvetin (üssü 4 olan bir sayı), iki dördüncü derece kuvvetin toplamı olması, hatta genel olarak bir sayının en az üçüncü derece kuvvetinin, kuvvet derecesi aynı olan iki sayının toplamı olması da." Teoremin ispatını bulduğunu iddia eden Fermat söz konusu ispatı hiç açıklamadı ve teorem bu yüzden çözümsüz kalıp Fermat'nın son teoremi adıyla ünlendi.

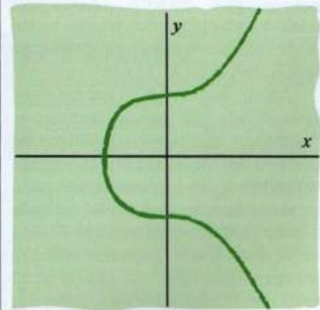
Birçok matematikçi Fermat'nın bulduğunu iddia ettiği ispatı o vefat ettikten sonra baştan inşa etmeye ya da kendi ispatını üretmeye çalıştı. Problem basit görünmesine karşın başarıya ulaşan çıkmadıysa da, bir yüzyıl sonra Euler $n = 3$ için teoremi ispatlamayı bildi.

Bir çözüm bulmak

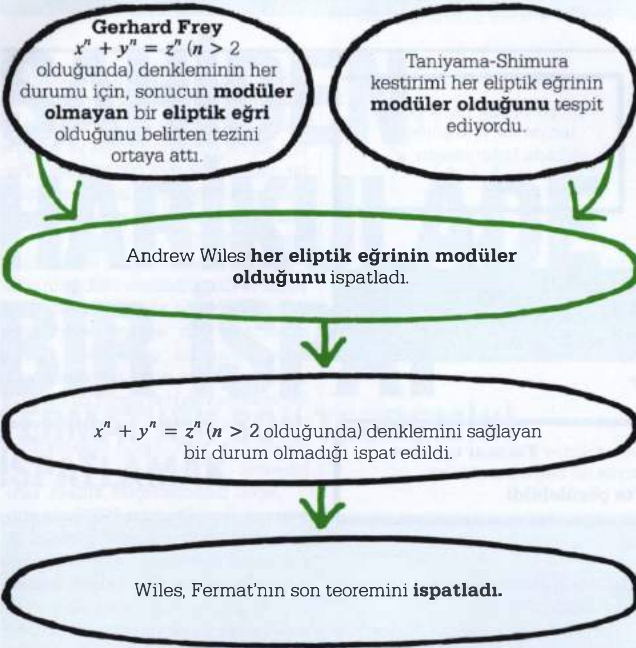
Fermat'nın son teoreminin metametikteki çözülmemiş belli başlı problemlerden biri olarak varlığını koruduğu 300 yılı geçkin süreci İngiliz matematikçi Andrew Wiles 1994'te teoremi ispatlayıp noktaladı. Fermat'nın sebep olduğu bu ispat yarışını Wiles ilk defa bir yerde okuyup öğrendiğinde 10 yaşındaydı. Dünyadaki en parlak matematikçilerin ispatlamayı beceremediği teoreme henüz çocuk yaşta olmasına karşın kendisinin anlam verebiliyor olmasına hayret etmişti. Oxford Üniversitesinde matematik okuma şevkini ona aşılayan buydu, ardından Cambridge'den doktora diploması alacaktı. Doktora tezi için araştırma konusu olarak seçtiği eliptik eğrilerin Fermat'ya ilgisiyle bir alakası yok gibi görünüyordu. Fermat'nın son teoremini ispatlama imkânını Wiles'a sunacak matematik dalı buydu halbuki.

Japon matematikçiler Yutaka Taniyama ve Goro Shimura 1950'lerin ortalarında birbiriyle alakasız görünen iki matematik dalı arasına köprü inşa etme cesaretini gösterdiler. Ortaya attıkları iddiaya göre, her eliptik eğri (cebirsel bir yapı) benzersiz bir modüler formla (sayı kuramında, büyük ölçüde simetrik bir yapı çeşidi) ilişkilendirilebiliyordu.

Japon matematikçiler Yutaka Taniyama ve Goro Shimura 1950'lerin ortalarında birbiriyle alakasız görünen iki matematik dalı arasına köprü inşa etme cesaretini gösterdiler. Ortaya attıkları iddiaya göre, her eliptik eğri (cebirsel bir yapı) benzersiz bir modüler formla (sayı kuramında, büyük ölçüde simetrik bir yapı çeşidi) ilişkilendirilebiliyordu. Sundukları kestirimin taşıdığı önem son-



Wiles'ın Fermat'nın son teoremini masaya yatırdığı çalışmaları, A ve B'nin sabit (belirli) olduğu $y^2 = x^3 + Ax + B$ denkleminin tarif ettiği eliptik eğrileri incelemeye almasıyla başladı.



raki 30 yıl içerisinde gitgide daha iyi anlaşıldı ve farklı farklı matematik alanları arasında bağlantı oluşturmaya odaklanan bir programın parçası haline geldi. Gelgelelim nasıl ispatlanacağına dair kimsenin bir fikri yoktu.

Alman matematikçi Gerhard Frey, 1985 yılında, söz konusu kestirim ile Fermat'nın son teoremi arasında bir bağlantı kurdu. Fermat denkleminin varsayımsal bir çözümünden yola çıkarak modüler değil gibi görünen tuhaf bir eliptik eğriyi inşa etti. Böylesi bir eğrinin ancak Taniyama-Shimura kestirimi yanlışsa var olabileceğini iddia etti; bu durumda Fermat'nın son teoremi de yanlıştı. Öte yandan Taniyama-Shimura kestirimi doğruysa Fermat'nın son teoremi de doğruydu. 1986'da, New Jersey'deki Princeton Üniversitesi öğretim üyesi Ken Ribet, Frey'in köprü niteliğindeki kestirimini ispat etmeyi başardı.

İspatlanamazı ispatlamak

Ribet'in ispatı Wiles'ı heyecanlandırdı; beklediği şans kapısını çalmıştı: İmkânsız görünen Taniyama-Shimura kestirimini ispat edebilirse o zaman Fermat'nın son teoremini de ispatlardı. İşbirliği içerisinde çalışmayı tercih eden çoğu matematikçinin aksine Wiles bu hedefin peşinden yalnız başına gitmeye karar verdi ve karısı hariç kimseye konudan söz etmedi. Fermat üzerinde çalıştığını açıklarsa matematik camiasında heyecan yaratacağını, hatta kendisini istemediği bir rekabetin içinde bulabileceğini hissetti. Gelgelelim, çalışmalarının yedinci yılında, ispatı son evrelerine ulaştığı sırada, Wiles yardıma ihtiyacı olduğunu fark etti.

O zamanlar Wiles, Princeton'da, dünyanın sayılı matematikçilerini çatısı altında toplayan İleri Araştırmalar Enstitüsünde (IAS) çalışıyordu. Wiles seminer vermek, yazı yazmak ve ders anlatmak gibi günlük işlerini yaparken bir yandan da Fermat üzerinde çalışmakta olduğunu açıklayınca mesai arkadaşları şaşkına döndüler.

Wiles ispatını toparlayıp düzenlediği son aşamada mesai arkadaşlarının yardımına başvurdu. Mantıksal çıkarımlarını gözden geçirmesi için Amerikalı matematikçi Nick Katz'dan yardım aldı. Katz hiç hata bulamayınca Wiles ispatını duyurmaya karar verdi. Haziran 1993'te Cambridge Üniversitesindeki bir konferansta Wiles sonuçlarını sundu. Sonuçlarını tek bir amaç doğrultusunda art arda sıraladıkça gerilim tırmandı. Son cümlesini söyledi: "Bu da Fermat'nın son teoremini ispatlar." Gülümsedi ve, "Burada bırakayım," diye ekledi.

Bir hatanın düzeltilmesi

Ertesi gün gazetelerde boy boy haberleri çıkan Wiles dünyanın en ünlü matematikçisi oldu. Bu problemin en sonunda nasıl çözülebildiğini herkes merak ediyordu. Wiles çok sevinmişti, derken beklenmedik bir şey oldu: İspatında bir sorun vardı.

> "Bazı matematik problemleri görünüşte basittir. Bu problemlerin kolay olmaması için ortada bir neden yoktur ama gelin görün ki, sonradan olağanüstü derecede çapraşık oldukları anlaşılır."
>
> **Andrew Wiles**

> Yetişkinliğimde çocukluk hayalimin peşinden koşabilmek gibi eşine az rastlanan bir ayrıcalığa sahiptim.
> **Andrew Wiles**

Sonuçların yayımlanması için doğrulanması gerekiyordu ve Wiles'ın ispatı onlarca sayfa tutmuştu. İspatı gözden geçirenlerin arasında Wiles'ın arkadaşı Nick Katz da vardı. Katz bütün bir yaz boyunca anlamı netleşinceye kadar ispatın tek tek her satırının üstünden geçti, arayıp taradı. Günün birinde tezde bir boşluk saptadığını sandı. Wiles'a e-posta gönderdi ama aldığı yanıttan tatmin olmadı. Atılan daha başka e-postaların ardından hakikat gün ışığına çıktı: Katz, Wiles'ın çalışmasının temelinde bir kusur bulmuştu. İspatın can alıcı bir noktası, Wiles'ın yöntemini çökerten bir hata içeriyordu.

Wiles'ın yaklaşımı göz açıp kapayıncaya kadar sorgulamaya alınmıştı. Tek başına değil de meslektaşlarıyla çalışmış olsa hata önceden saptanabilirdi. Wiles'ın Fermat'nın son teoremini çözdüğüne bütün dünya inanıyordu ve tamamlanmış, yayımlanmış ispatı bekliyordu. Wiles muazzam bir baskı altındaydı. Matematikte o ana değin elde ettiği başarılar ne kadar etkileyici olsa da saygınlığı tehlikeye girmişti bir kere. Wiles her gün yılmadan probleme farklı açılardan yaklaşmayı denediyse de fayda etmedi; hatta IAS'de çalışan matematikçi Peter Sarnak, "Halıyı odanın bir köşesine sabitlediğiniz anda başka bir köşeden açılıvermesine benziyordu," diyordu. En sonunda Wiles, İngiliz cebir uzmanı ve arkadaşı Richard Taylor'dan yardım diledi ve bu ikili kafa kafaya verip önlerindeki dokuz ay boyunca ispat üzerinde çalışmaya koyuldu.

Wiles'ın ispatı bulduğunu açıklamakta çok erken davrandığını kabul etmesine ramak kalmıştı. Ardından Eylül 1994'te bir aydınlanma anı yaşadı. Uyguladığı problem çözme yöntemini alıp yöntemin güçlü yanlarını, yine kendisine ait daha eski bir yaklaşıma eklemesi halinde bunların biri diğerini düzeltebilir ve problemi çözmesini sağlayabilirdi. Her şeyi değiştiren, önemsiz gibi duran bu seziş oldu. Wiles ve Taylor ispattaki boşluğu birkaç hafta içinde doldurdu. Nick Katz ve geniş ölçekte matematik camiası, artık ortada hata olmadığına ikna olmuştu ve Wiles ikinci kez ama bu sefer sağlam bir zemine basarak Fermat'nın son teoreminin fatihi olarak sahneye çıktı.

Teoremin ardından

Fermat'nın en baştaki kestirimi her ne kadar onun şaşırtıcı derecede ileri görüşlü olduğunu gösterse de, "harikulade ispatı" keşfettiğine yönelik iddiasının elle tutulur tarafı kalmadı. 17. yüzyıldan bu yana tüm matematikçilerin Fermat'nın dönemindeki bir matematikçinin keşfedebildiği bir ispatı ıskalamış olması akla sığmaz. Üstelik Wiles teoremin çözümünde gelişmiş matematik araçlarından ve Fermat'dan çok sonra icat edilen kavramlardan yararlandı.

Farklı birçok yönden, asıl önemli olan, Fermat'nın son teoremini ispatlamak değil Wiles'ın kullandığı ispatlardır. Tamsayılarla ilgili imkânsız görünen bir problem yeni tekniklere de mevcut tekniklere de başvurularak sayı kuramının cebirsel geometriyle bir araya getirilmesi sonucunda çözüldü. ■

Andrew Wiles



Wiles ileride ilahiyat öğretim üyesi olacak Anglikan bir papazın oğlu olarak 1953'te Cambridge'de dünyaya geldi. Daha küçük yaşta tutkulu bir problem çözücüydü. Oxford Üniversitesine bağlı Merton Kolejinde matematik bölümünden mezun olup ilk diplomasını, sonra da Cambridge Üniversitesinin bünyesindeki Clare Kolejinden doktora diplomasını aldı. 1981'de Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsünde göreve başladı ve ertesi yıl yine burada öğretim üyeliğine atandı.

ABD'de bulunduğu esnada Wiles, Taniyama-Shimura kestirimi gibi, kendi alanındaki anlaşılması en zor bazı problemleriyle ilgili katkılarda bulundu. Aynı zamanda Fermat'nın son teoremini tek başına ispatlamaya soyundu. Bu uzun girişiminin sonunda ulaştığı başarı sayesinde 2016'da Abel Ödülünü (matematikte en yüksek saygınlık mertebesi) aldı.

Wiles, Bonn ve Paris'te, ayrıca 2018'de Regius Matematik Profesörlüğü unvanı verildiği Oxford Üniversitesinde ders verdi. Oxford'daki yeni bir matematik binasının yanı sıra bir asteroide onun adı verilmiştir: 9999 Wiles.



BAŞKA TAKDİRE TEŞEKKÜRE LÜZUM YOK

POINCARÉ KESTİRİMİNİ İSPATLAMAK

KISACA

KİŞİ
Grigori Perelman (1966–)

ALANLAR
Geometri, topoloji

ÖNCE
1904 Henri Poincaré dört boyutlu uzaydaki şekillerin eşdeğerliliği hakkındaki kestirimini belirtir.

1934 İngiliz matematikçi Henry Whitehead'in yayımladığı hatalı bir ispatın sonucunda Poincaré kestirimi matematikçilerin ilgisini çeker.

1960 Amerikalı matematikçi Stephen Smale kestirimin beşinci ve daha yüksek boyutlarda geçerli olduğunu ispatlar.

1982 Amerikalı matematikçi Michael Freedman, Poincaré kestirimini dört boyutta ispatlar.

SONRA
2010 Perelman, Clay Milenyum Ödülü'nü geri çevirince 1 milyon sterlin değerindeki ödül, yetenekli genç matematikçilere yönelik Poincaré kürsüsünün kurulmasında kullanılır.

"3-küre" dört boyutta var olan üç boyutlu küresel bir yüzeydir.

↓

Poincaré deliksiz **her üç boyutlu şeklin eğilip bükülmek** suretiyle 3-küreyi **oluşturabileceğini** iddia etti.

↓

Her boyuttan her sayı Poincaré kestiriminin **kapsamına alınabilir.**

↓

Perelman'ın Poincaré kestirimi ispatı 2006'da onaylandı.

2000 yılında ABD'deki Clay Matematik Enstitüsü yeni binyılın gelişini ödüllü yedi problemle kutladı. Matematikçileri neredeyse bir yarım yüzyıl uğraştırmış olan Poincaré kestirimi de problemlerin arasındaydı. Kestirimi birkaç yıl içerisinde adı sanı duyulmamış Rus matematikçi Grigori Perelman çözdü.

Fransız matematikçinin 1904'te ürettiği Poincaré kestiriminin tespiti şu yönde: "Basit bağlantılı, kapalı her 3-çokkatlı, 3-küreyle eşyapılıdır." Şekillerin geometrik niteliklerini, yapılarını ve uzaysal ilişkilerini inceleyen topoloji alanında, bir kürenin (geometride üç boyutlu bir nesne) üç boyutlu bir uzayda var olan, yüzeyi iki boyutlu bir 2-çokkatlı (örneğin katı bir top) olduğu söylenir. 3-çokkatlıysa, mesela 3-küre, salt kuramsal bir kavramdır: Yüzeyi üç boyutludur ve dört boyutlu bir uzayda var olur. "Basit bağlantılı" tanımının anlamı, can simidi ya da halka (torus) biçiminin aksine, şeklin hiç deliği olmaması; "kapalı" tanımının anlamıysa sonsuz bir düzlemin başı sonu olmayan açıklığının aksine şeklin sınırlarla çevrili olmasıdır. Topolojide, iki şekil eğilip bükülerek veya esnetilerek aynı biçime sokulabiliyorsa eşyapılıdır. Her kapalı 3-çokkatlıya, şekli

Ayrıca bkz. Platonik katılar 8–49 ▪ Çizge kuramı 194–95 ▪ Topoloji 256–59 ▪ Minkowski uzayı 274–75 ▪ Fraktaller 306–11



3-küre burada gösterilen top gibi iki boyutlu bir yüzey (yani 2-küre) olan bir küresel yüzeyin üç boyutlu eşdeğeridir. Topun şeklini anlayabilmek için üç boyutlu uzayda incelemek gerekir. Bir 3-küreyi görebilmek için dört boyutlu uzaya ihtiyaç vardır.

değiştirilerek 3-küre şekli verilip verilemeyeceği sorusu her ne kadar varsayımsal olsa da Perelman'ın iddiasına göre evrenin şeklini anlamanın yolu bundan geçiyordu.

Sağlam bir ispat bulmak

Önceleri 3-çokkatlılardansa dört, beş veya daha fazla boyutlu çokkatlılar için kestirimin doğru olduğunu göstermenin daha kolay olduğu anlaşılmıştı. 1982'de Amerikalı matematikçi Richard Hamilton dört boyutlu her şeklin biçiminin değiştirilip gitgide daha düzgün bir haline ve en sonunda bir 3-küreye dönüştürülmesine potansiyel olarak imkân tanıyan matematiksel bir süreç olan Ricci akışıyla kestirimi ispatlamaya çalıştı. Ne var ki akış, ani sıçrama benzeri "tekilliklerle" ("purolar" ve sonsuz yoğun "boyunlar" gibi çarpıklıklar) başa çıkamadı.

1990'ların başlarında Berkeley'de çalıştığı iki yıllık zaman zarfında Hamilton'dan çok şey öğrenen Perelman Rusya'ya döndüğünde Ricci akışına ve Ricci akışının Poincaré kestirimine uygulanışına çalışmaya devam etti. Hamilton'ın karşısına çıkan kısıtlamaları ameliyat denen bir teknikle tekillikleri kesip atarak ustaca atlattı ve kestirimi ispatlamayı başardı.

Matematik camiasını şaşırtmak

Perelman başarıya sessiz sedasız ulaşmıştı. 2002'de konuya dair 39 sayfalık ilk makalesini alışılmadık bir şekilde internete koydu, birer özetini de ABD'deki 12 matematikçiye e-postayla gönderdi. Ertesi yıl iki kısım daha yayımladı. Başka matematikçiler de onun sonuçlarını baştan inşa edip *Asian Journal of Mathematics*'te (*Asya Matematik Dergisi*) açıkladılar. İspatı nihayet 2006'da matematik camiasından tam kabul aldı.

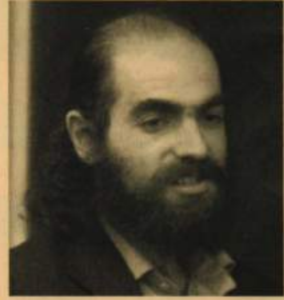
O zamandan bu yana Perelman'ın yapıtına ilişkin yoğun çalışmalar topolojide yeni buluşların ortaya çıkmasını sağladı; hatta Perelman ve Hamilton'ın Ricci akısıyla tekillikleri giderme tekniklerinin daha etkili versiyonları bu sayede geliştirildi. ▪



Perelman'ın ispatıyla, yüzyıldan uzun bir süre topolojinin tam merkezinde sindirilemeyen bir çekirdek gibi duran bir problemi çözüldü.

Dana Mackenzie
Amerikalı bilim yazarı





Grigori Perelman

1966'da St. Petersburg'da doğan Grigori Perelman matematik tutkusunu ona matematiği öğreten annesine borçluydu. 16 yaşında Budapeşte'de düzenlenen Uluslararası Matematik Olimpiyatları'nda tam paun alıp altın madalya kazandı. Bunu başarılı bir akademik kariyer izledi; ABD'de görev aldığı çeşitli araştırma kuruluşlarında Soul kestirimi adlı önemli bir geometri problemini çözdü. ABD'deyken tanıştığı Richard Hamilton'ın çalışmalarından etkilenip Poincaré kestirini ispatladı.

Toplumdan uzak yaşamayı seven Perelman, ispatıyla elde ettiği şöhretten hazzetmedi. Bir matematikçinin alabileceği en büyük iki mükâfatı geri çevirdi: 2006 Fields Madalyasını ve Hamilton'ın da en az kendisi kadar hak ettiğini söylediği Clay Matematik Enstitüsünün 2010'da verdiği ödülü (1 milyon dolar değerindeki ödülle birlikte).

Önemli Eserleri

2002 "Ricci Akısı ve geometrik uygulamaları için entropi formülü"
2003 "Bazı 3-çokkatlılarda Ricci akısının çözümü için sonlu sönme zamanı"

REHBE

REHBER



Bu kitabın önceki bölümlerinde değinilen matematikçilere ilaveten daha birçok erkek ve kadın matematiğin geliştirilmesinde etken oldu. İlkçağda Mısırlılardan, Babillilerden ve Yunanlardan ortaçağda Perslere, Hintlilere, Çinlilere ve Rönensans Avrupa'sının kent devlet hükümdarlarına kadar bina inşa etmek, ticaret yapmak, savaşmak ve paraya yön vermek isteyen uygarlıklar ölçümlerin ve hesaplamaların hayati öneminin farkına vardılar. 19. ve 20. yüzyıllarda matematikçiler tüm bilimlerde faaliyet gösterir olmuş, matematik evrensel bir dal haline gelmişti. Uzay araştırmaları, tıptaki yenilikler, yapay zekâ ve dijital devrimin tüm hızıyla ilerlediği, evrenle ilgili sırların açığa çıkarılmaya devam ettiği 21. yüzyılda da matematik hayati önemini korumaya devam ediyor.

MİLETLİ THALES
MÖ y. 624-y. 545

Thales günümüzde Türkiye toprağı olan Antik Yunan şehri Milet'te yaşadı. Bir matematik ve astronomi öğrencisi olarak dünyayı açıklamak için mitolojiye başvurma geleneğini terk etti. Thales piramitlerin yüksekliğini ve gemilerin kıyıdan uzaklığını hesaplamak için geometriden yararlandı. Adını taşıyan teoremine göre, bir çemberin içerisinde yer alan ve en uzun kenarı aynı zamanda çemberin çapı olan bir üçgen, dik üçgen olmak zorundadır. Thales'in bilinen astronomi keşifleri arasında MÖ 585'teki güneş tutulması tahmini yer alır.

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Trigonometri 70–75

SAKIZLI HIPPOKRATES
MÖ y. 470-y. 410

Aslen Yunan adası Sakız adasında tüccarlık yapan Hippokrates daha sonra Atina'ya taşınıp ilk eğitimini orada aldı, ardından da matematik çalışmalarına başladı. Kendisinden sonraki bilginlerin ifadelerine göre, geometrik bilgi birikimini ilk olarak o derleyip düzenlemişti. Kesişen iki çemberin içinde kalan hilal biçimli şekillerin alanını hesaplamayı başardı. Hippokrates Hilalleri adı sonradan verilen bu şekillerin sınırlarını iki çember yayı oluşturur ve küçük çemberin çapı, aynı zamanda büyük çemberin 90 derecelik bir yayına bakan bir kirişidir.

Ayrıca bkz. Pisagor 36–43 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Trigonometri 70–75

KNİDOSLU EUDOKSOS
MÖ y. 390-y. 337

Eudoksos, Yunan şehri Knidos'ta (günümüzde Türkiye'dedir) yaşadı. Geliştirdiği "tüketme yöntemini" kullanarak alan ve hacim hakkındaki ifadeleri ardışık yaklaşımlarla ispatladı. Örneğin dairelerin alanları arasında yarıçapların karelerine göre bir ilişki olduğunu, kürelerin hacimleri arasında yarıçapların küplerine göre bir ilişki olduğunu ve bir koninin hacminin, yüksekliği aynı olan bir silindirinkinin üçte biri olduğunu göstermeyi başardı.

Ayrıca bkz. Rhind papirüsü 32–33 ▪ Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65

İSKENDERİYELİ HERON
MS y. 10-y.75

Memleketi, Roma'nın Mısır eyaletine bağlı İskenderiye şehri olan Heron mühendis, mucit ve matematikçiydi. Buhar gücüyle çalışan aeolipil adlı bir aygıt, rüzgâr çarkı vasıtasıyla çalınan bir org ve parayla çalışan bir "kutsal" su sebilinin tariflerini yayımladı. Matematikteki başarılarının arasında sayıların karekök ve küpkökleri hesaplamaya yönelik bir yöntemin açıklaması yer alır. Bir üçgenin alanını kenar uzunluklarından bulmaya yarayan bir formülü de icat etmiştir.

Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–105

ARYABHATA
MS 476-550

Hindu matematikçi ve astronom Aryabatha, Hindistan'daki bir bilim merkezi olan Kusumapara'da çalıştı. Koşuklu bilim eseri *Aryabhatiya*'nın cebir ve geometri hakkındaki bölümlerinde, Pi (π) için dört basamak doğruluğuyla bulduğu 3,1416 yaklaşık değerine rastlanır. Aryabhata Pi'nin irrasyonel olduğunu düşünüyordu ve düşüncesi doğruydu. Dünyanın çevresini şu anda kabul edilen sayıya yakın bir mesafe olarak hesapladı. Ayrıca birtakım trigonometrik fonksiyonları tanımladı, eksiksiz ve hassas sinüs ve kosinüs tabloları üretti ve eşzamanlı ikinci derece denklemlerin çözümlerini hesapladı.

Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Cebir 92–99

I. BHASKARA
y. 600-y. 680

I. Bhaskara'yla ilgili bilinenler kısıtlı olsa da Hindistan'ın batı kıyısındaki Saurastra bölgesinde doğduğu zannedilir. Aryabhata'nın kurduğu astronomi okulunun (bkz. s. 328) en önemli bilginlerinden biriydi ve geçmişte Aryabhata'nın yazmış olduğu *Aryabhatiya* eseri üzerine bir yorumu kaleme aldı. Sıfır için bir yuvarlak şeklini de içeren Hint-Arap ondalık sistemindeki sayıları ilk yazıya geçiren, I. Bhaskara'ydı. 629'da sinüs fonksiyonunun bir yaklaşığını kayda değer bir doğruluk düzeyiyle buldu.
Ayrıca bkz. Trigonometri 70–75 ▪ Sıfır 88–91

İBNÜ'L-HEYSEM
y. 965-y. 1040

Günümüz Irak topraklarında Basra'da dünyaya gelen Arap matematikçi ve astronom İbnü'l-Heysem, namıdiğer Alhazen, Fatımi Halifeliğinin Kahire'deki sarayında görev aldı. Varsayımların körü körüne doğru kabul edilmeden, deneyle test edilmesi gerektiğini savunan bilimsel yöntemin öncülerindendi. Öklit'in çalışmalarını esas alıp Pergeli Apollonius'un *Koni Kesitleri*'inin kayıp durumdaki sekizinci cildini tamamlamak adına verdiği emeğin sonucunda cebir ile geometriyi bağlayan bir körpünün temellerini atma başarısını gösterdi.
Ayrıca bkz. Öklit'in *Öğeler*'i 52–57 ▪ Koni kesitleri 68–69

II. BHASKARA
1114–85

Karnataka eyaletine bağlı Vijayapura'da dünyaya gelen, ortaçağın en büyük Hintli matematikçilerden II. Bhaskara'nın Madhya Pradesh eyaletine bağlı Ujjain şehrindeki astronomik gözlemevinin başına getirildiği sanılır. Kalkülüsle ilgili bazı ön-kavramları tanıttı; sıfıra bölme işleminin sonucunun sonsuzluk olduğunu tespit etti; bazı ikinci, üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin çözümlerini (negatif ve irrasyonel çözümler dahil) buldu ve ikinici derece (ikinci kuvvet) Diyofantus denklemlerinin Avrupa'da 18. yüzyıla kadar bulunamayacak çözümleri için önerilerde bulundu.
Ayrıca bkz. İkinci derece denklemler 28–31 ▪ Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–105

NASIREDDİN TUSİ
1201-1274

Tus doğumlu İranlı matematikçi Tusi küçük yaşta babasını kaybettikten sonra ömrünü okumaya adadı. Matematik ve astronomideki keşifleriyle zamanın en büyük bilginlerinden biri oldu. Matematiğin bir dalı olarak trigonometriyi kurdu ve trigonometriye giriş niteliğindeki *Commentary on the Almagest* (*Almagest Üzerine Yorum*) yapıtında sinüs tablolarını hesaplamaya yönelik birtakım yöntemleri tarif etti. 1255'teki Moğol istilasında esir alındı ancak bilim danışmanı yapılmak üzere serbest bırakıldı. Daha sonra Moğolların başkenti Meraga'da (günümüzde İran topraklarındadır) bir astronomik gözlemevi kurdu.
Ayrıca bkz. Trigonometri 70–75

KEMALEDDİN EL-FARİSİ
y. 1260-y. 1320

El-Farisi, Pers İmparatorluğunun Tebriz şehrinde (günümüzde İran'dadır) dünyaya geldi. Eğitimini Nasıreddin Tusi'den almış çok yönlü bir bilgin olan Kutbeddin Şirazî'nin öğrencilerindendi ve o da bu iki bilgin gibi matematikçi-astronom yetiştiren Meraga okulunun bir mensubuydu. Sayı kuramı alanındaki araştırmalarında bağdaşık sayılara ve çarpanlara ayırmaya odaklandı. Koni kesitleri (çemberler, elipsler, paraboller ve hiperboller) kuramını ışık bilimi problemlerinin çözümünde uyguladı ve gökkuşağının farklı renklerinin ışığın kırılmasından kaynaklandığını açıkladı.
Ayrıca bkz. Koni kesitleri 68–69 ▪ Binom teoremi 100–101

NİCOLE ORESME
y. 1320-y. 1382

Fransa'nın Normandiya bölgesinde muhtemelen çiftçilikle uğraşan bir ailenin çocuğu olarak dünyaya gelen Oresme, Navarre Kolejinde yoksul ailelerden gelen ve eğitimleri kraliyet soylularınca karşılanan öğrencilerle birlikte okudu. Sonraları Rouen Katedralinin başrahipliğine getirildi. Oresme bir niteliğin başka bir niteliğe göre değişimini (mesela sıcaklığın uzaklıkla birlikte nasıl değiştiğini) temsil etmesi için iki eksenli bir koordinat sistemi tasarladı. Kesirli üsler ve sonsuz serileri inceledi, harmonik serilerin uzaksadığını ilk olarak o ispat ettiyse de ispatı kaybolunca kuram 17. yüzyıla dek tekrar ispatlanamadı. Gökcisimlerinin Yer'in çevresinde döndüğü yönündeki kilise onaylı görüşün aksine, Yer'in uzayda dönüyor olabileceğini savundu.
Ayrıca bkz. Cebir 92–99 ▪ Koordinatlar 144–151 ▪ Kalkülüs 168–175

NİCCOLÒ FONTANA TARTAGLİA
1499–1557

Tartaglia çocukluğunda Venedik'i istila eden Fransız askerlerinin saldırısına uğramıştı. Canını kurtarmasına rağmen yüzüne ağır yaralar almış ve bu yaralar onda konuşma bozukluğuna yol açmıştı. Kekeme anlamına gelen "Tartaglia" lakabı buradan geliyordu. Esasen kendi kendini eğitip inşaat mühendisi oldu, tahkimat tasarımları çizdi. Top mermilerinin izlediği güzergâhı anlamanın, tasarımları için ne kadar önemli olduğunu fark eden Tartaglia atış bilimi (balistik) dalının kurulmasına önayak oldu. Yayımlanan matematik yapıtlarının arasında üçüncü derece denklemlerin çözümü için bir formül, matematiğin geniş bir kapsamla ele alındığı *Treatise on Numbers and Measures* (*Sayılar ve Ölçüler Üzerine İnceleme*), ayrıca Öklit ve Arşimet'ten çevirileri bulunuyordu.
Ayrıca bkz. Platonik katılar 48–49 ▪ Trigonometri 70–75 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–105 ▪ Karmaşık düzlem 214–215

GEROLAMO CARDANO
1501-1576

Niccolò Tartaglia'yla aynı dönemde yaşayan Lombardiya doğumlu Cardano seçkin bir tıp insanı, astronom ve biyolog olmasının yanında meşhur bir matematikçiydi de. Günümüz İtalya'sındaki Pavia ve Padova üniversitelerinde okudu, tıp doktorası yaptı,

hekim olarak çalıştı, ardından matematik öğretmeni oldu. Üçüncü ve dördüncü derece denklemler için bulduğu bir çözümü yayımlayan (-1'in karekökünü temel alan) ve sanal sayıların var olduğunu kabul eden Cardano ilaveten, efsaneye göre, kendi ölüm tarihine ilişkin tahminini tutturdu.
Ayrıca bkz. Cebir 92–99 ▪ Üçüncü derece denklemler 102–105 ▪ Sanal ve karmaşık sayılar 128–131

JOHN WALLIS
1616–1703

Wallis, Cambridge Üniversitesinde tıp okumasına rağmen sonradan papaz oldu ama Kent'teki okul çağında filizlenen aritmetik merakı baki kaldı. Parlamentoculuk yanlısı Wallis, İngiliz İç Savaşında kraliyetin telgraf yazışmalarını deşifre etti. 1644'te Oxford Üniversitesinde geometri öğretim üyeliğine atandı ve aritmetik cebri savundu. Kalkülüsün gelişimine, sayı doğrusunu icat ederek, sonsuzluk simgesini kullanıma sunarak ve kuvvetlerin standart gösterimini geliştirerek katkı verdi. Sonucunda Londra Kraliyet Bilimler Akademisinin 1662'de kurulacağı toplantıları düzenleyen küçük grupta o da vardı.
Ayrıca bkz. Koni kesitleri 68–69 ▪ Cebir 92–99 ▪ Binom teoremi 100–101 ▪ Kalkülüs 168–175

GUİLLAUME DE L'HÔPİTAL
1661–1704

Paris'te dünyaya gelen ve matematiğe küçüklüğünde ilgi duymaya başlayan L'Hôpital 1693'te Fransız Bilimler Akademisi üyeliğine seçildi. Üç yıl sonra sonsuz küçükler kalkülüsü hakkında yazılmış ilk ders kitabını yayımladı: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (*Eğri Çizgilerin Anlaşılmasına Yönelik Sonsuz Küçükler Analizi*). L'Hôpital yetenekli bir matematikçi olmasına rağmen fikirlerinin birçoğu ona ait değildi. 1694'te Johann Bernoulli'ye en yeni buluşları karşılığında yılda 300 livre ve o buluşları başka matematikçilerle paylaşmayacağı konusunda anlaşma imzalamayı teklif etmişti. Infinitesimal Calculus'teki (Sonsuz Küçükler Kalkülüsü) bu fikirlerin çoğunu l'Hôpital yayımladı.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175

JEAN LE ROND D'ALEMBERT
1717–1783

Parisli ünlü bir konsomatrisin gayrimeşru çocuğu olan d'Alembert'i bir camcının karısı büyüttü. Ayrı yaşadıkları babasının para desteğiyle hukuk ve tıp okudu, ardından matematiğe yöneldi. 1743'te serbestçe hareket eden cisimler için geçerli olan Newton'ın üçüncü hareket yasasının durağan cisimler için de geçerli olduğunu belirtti (d'Alembert ilkesi). Bunun yanında kısmi diferansiyel denklemleri geliştirdi, dünya ve diğer gezegenlerin yörüngelerindeki değişimleri açıkladı ve integral hesabını araştırdı. Voltaire ve Jean-Jacques Rousseau gibi diğer Fransız filozoflar gibi d'Alembert de insan aklının dinden üstün olduğu görüşündeydi.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–183 ▪ Denklemlerin cebirsel çözümü 200–201

MARİA GAETANA AGNESİ
1718–99

Hapsburg Avusturya'sının şehre hükmettiği dönemde Milano'da dünyaya gelen Agnesi dâhi bir çocuk olarak henüz ergenliğinde babasının arkadaşlarına çok çeşitli bilim konularında ders veriyordu. 1748'de aritmetik, cebir, trigonometri ve kalkülüs konularının işlendiği iki ciltlik *Instituzioni analitiche*'yi (*Analitik Yapılar*) kaleme alan Agnesi, bu eseriyle, matematik ders kitabı yazan ilk kadın oldu. İki yıl sonra, bu başarısı dikkatinden kaçmayan Papa XIV. Benedictus onu Bologna Üniversitesindeki matematik ve doğa felsefesi kürsüsüyle ödüllendirdi ve bir üniversitede matematik öğretim üyeliğine getirilmiş ilk kadın unvanını kazandırdı. Çan şeklindeki bir eğriyi tanımlayan özel bir denkleme, anısını yaşatmak adına "Agnesi cadısı" dendi; gerçi, İtalyancada "eğri" anlamına gelen sözcüğe hatalı bir karşılık bulunup "cadı" diye çevrilmiştir.
Ayrıca bkz. Trigonometri 70–75 ▪ Cebir 92–99 ▪ Kalkülüs 168–175

JOHANN LAMBERT
1728–1777

Mulhouse (günümüzde Fransa'dadır) doğumlu, çok yönlü İsviçreli-Alman bilgin Lambert kendi kendine matematik, felsefe ve bazı Asya dillerini öğrendi. Belli bir süre özel ders verdikten sonra 1759'da Münih Akademisine, beş yıl sonra da Berlin Akademisine üye oldu. Pi'nin irrasyonel bir sayı olduğuna dair kesinliği yüksek ispatı ve trigonometriye kazandırdığı hiperbolik fonksiyonlar matematik alanındaki başarılarındandır. Koni kesitleriyle ilgili teoremler üretti, kuyrukluyıldızların yörüngelerinin hesaplanışını basitleştirdi ve yeni birçok harita izdüşümü yarattı. Havadaki nem oranını ölçmeye yarayan ilk kullanışlı higrometrenin (nemölçer) mucidi de Lambert'di.
Ayrıca bkz. Pi'yi hesaplamak 60–65 ▪ Koni kesitleri 68–69 ▪ Trigonometri 70–75

GASPARD MONGE
1746–1818

Bir tüccarın oğlu olan Monge 17 yaşındayken Fransa'nın Lyon şehrinde fizik dersleri veriyordu. Daha sonra Mézières kasabasındaki École Royale'de teknik ressamlık yaptı, 1780'de Bilimler Akademisine üye oldu. Monge toplumsal yaşamda etkin biri olarak Fransız Devrimini benimsedi. 1792'de Denizcilik Bakanlığına atandı, ayrıca Fransa'nın eğitim sisteminin yeniden düzenlenmesi hedefi doğrultusunda 1794'te Paris'teki École Polytechnique'in kurulmasına yardımcı oldu. 1795'te metrik ölçüm sisteminin kullanıma sunulmasına katkıda bulundu. "Mühendislik çiziminin babası" tanımının yakıştırıldığı Monge, teknik çizimin matematiksel temeli niteliğindeki betimsel geometriyi ve ortografik izdüşümü icat etti.
Ayrıca bkz. Ondalık sayılar 132–137 ▪ Tasarı geometri 154–155 ▪ Pascal üçgeni 156–161

ADRİEN-MARİE LEGENDRE
1752–1833

Legendre, Paris'teki the École Militaire'de 1755'ten 1780'e kadar fizik ve matematik eğitimi verdi. Aynı zaman zarfında görev aldığı İngiliz-Fransız Ölçüm Çalışmaları kapsamında Paris Gözlemevi ile Londra'daki Greenwich Kraliyet Gözlemevi arasındaki mesafenin hesabında trigonometriden yararlandı. Fransız Devrimi sürecinde kişisel servetinden olmasına

rağmen sonraki yüzyılın belli başlı geometri ders kitaplarından biri olma özelliğini koruyacak *Eléments de géométrie* (*Geometrinin Temel Bilgileri*) kitabını 1794'te yayımladı ve bunun üstüne École Polytechnique'e matematik müfettişi olarak atandı. Sayı kuramı çerçevesinde karesel karşılıklılık yasasına ve asal sayı teoremine dair kestirimler sundu. Niceliklerin ölçüm hataları hesaba katılarak kestirildiği küçük kareler yöntemini de o üretti, eliptik integralin üç şekline ek olarak Legendre dönüşümü ve Legendre polinomları gibi önemli kavramlara kendi adını verdi.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Cebrin temel teoremi 204–209 ▪ Eliptik fonksiyonlar 226–227

SOPHİE GERMAİN
1776–1831

Fransız Devriminin kargaşalı sürecinde varlıklı babasının Paris'teki evlerinden dışarı bırakmadığı 13 yaşındaki kızı Sophie Germain, babasının kütüphanesindeki matematik kitaplarına çalışmaya başladı. Kadın olduğu için École Polytechnique'te okumaya uygun değildi ama o yine de ders notlarını edindi ve matematikçi Joseph-Louis Lagrange'la yazıştı. Sayı kuramı üzerine çalıştığı sırada Adrien-Marie Legendre (bkz. yukarıda) ve Carl Gauss'la da yazıştı, Fermat'nın son teoremi hakkındaki fikirlerinin de yardımıyla Legendre, bu teoremin $n = 2$ durumunu ispatladı. 1816'da metal levhaların elastikliği konulu bir makalesiyle Paris'teki Akademi Bilimlerinden ödül alan ilk kadın oldu.
Ayrıca bkz. Cebrin temel teoremi 204–209 ▪ Fermat'nın son teoremini ispatlamak 320–323

NİELS ABEL
1802–29

Acı bir şekilde gençken hayata veda edecek olan Norveçli matematikçi Abel 1822'de Christiana (şimdi Oslo) Üniversitesinden mezun olduktan sonra Avrupa'nın farklı yerlerini gezip matematiğin ileri gelenlerini ziyaret etti. 1828'de Norveç'e döndü ama ertesi yıl 26 yaşında vereme yenik düştü. Ölümünden birkaç gün sonra gelen bir mektupta ona Berlin Üniversitesinde matematik öğretim üyeliği gibi saygın bir makam teklif ediliyordu. Abel'in matematiğe en önemli katkısı, beşinci derece denklemlerin hepsini çözmeyi sağlayan genel bir cebirsel formül olmadığını ispatlamasıydı. İspatı için gruplardaki elemanların sırasının önemsiz olduğu bir tür grup kuramı icat etti. Günümüzde bu gruplara, Abel grupları (değişmeli gruplar) denir. Onun anısına matematik alanında her yıl Abel Ödülü verilir.
Ayrıca bkz. Cebrin temel teoremi 204–209 ▪ Eliptik fonksiyonlar 226–227 ▪ Grup kuramı 230–233

JOSEPH LİOUVİLLE
1809–82

Fransa'nın kuzeyinde dünyaya gelen Liouville, Paris'teki École Polytechnique'ten 1827'de mezun oldu, 1838'de yine orada öğretmen olarak çalıştı. Akademik çalışmalarının kapsamına sayı kuramı, diferansiyel geometriyi, matematiksel fiziği ve astronomiyi aldı. 1844'te aşkın sayıların varlığını ilk ispat eden kişi oldu. 400'ün üzerinde makale yazan Liouville'in 1836'da kurduğu, dünyanın en eski ikinci matematik dergisi *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (*Pür ve Uygulamalı Matematik Dergisi*) halen aylık olarak yayımlanır.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–75 ▪ Cebrin temel teoremi 204–209 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–229

KARL WEİERSTRASS
1815–97

Almanya'nın Vestfalya bölgesinde doğan Weierstrass matematiğe küçüklüğünde merak sardı. Anne babası, oğullarının yöneticilikte kariyer yapmasını istediğinden Weierstrass hukuk ve iktisat okumak üzere üniversiteye girdi ama derece almadan okulu bıraktı. Arkasından öğretmenlik üzerine mesleki eğitim aldı ve sonunda Berlin'deki Humboldt Üniversitesinde matematik öğretim üyesi oldu. Matematiksel analizin geliştirilmesine ve modern fonksiyonlar kuramının hazırlanmasına önayak olanlardan biriydi, ayrıca kalkülüsü yüksek düzeyde bir kesinlikle yeniden formüle etti. Saygın bir öğretmen olan Weierstrass'ın öğrencilerinin arasında genç bir Rus göçmen de vardı: Öncü matematikçi Sofya Kovalevskaya (bkz. s. 332).
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–75 ▪ Cebrin temel teoremi 204–209

FLORENCE NİGHTİNGALE
1820–1910

Adını İtalya'daki doğum yerinden (Floransa) alan Florence Nightingale, çalışmalarının büyük bölümünde istatistik kullanımını esas alan bir İngiliz toplumsal reformcu ve modern hemşirelik öncüsüydü. 1854'te Kırım Savaşı patlak verdikten sonra Nightingale, Türkiye'nin Üsküdar semtindeki kışladan bozma hastaneye gidip yaralı askerlerle ilgilendi. Orada bulunduğu dönemde daha iyi sağlık koşulları uğrunda yorulmak nedir bilmeden verdiği mücadeleden dolayı "Lambalı Kadın" lakabı takıldı. İngiltere'ye döndükten sonra Nightingale istatistik verilerini grafikte göstererek bir yenilik yaptı. Askerlerin ölüm nedenleri gibi veri değişkenliklerini göstermek için farklı büyüklükte dairesel kesitler kullanarak coxcomb adlı bir çeşit pasta grafiği geliştirdi. 1856'da orduda sağlık odaklı bir Kraliyet Encümeninin kurulmasında onun eylemlerinin de yardımı oldu. 1907'de, Britanya'daki en yüksek mertebeli şeref nişanı niteliğindeki Liyakat Madalyasını alan ilk kadın oldu.
Ayrıca bkz. Modern istatistiğin doğuşu 268–71

ARTHUR CAYLEY
1821–95

Surrey kontluğunun sınırları dahilinde kalan Richmond'da dünyaya gelen Cayley 19. yüzyılın muhtemelen başta gelen İngiliz soyut matematikçisiydi. Cambridge Üniversitesine bağlı Trinity Kolejinden mezun olduktan sonra avukatlık kariyerine atılıp mülk devir işlemleriyle ilgilendi. 1860'ta avukatlık mesleğinin getirdiği bol kazançtan vazgeçip Cambridge'de çok daha mütevazı bir maaşla soyut matematik öğretim üyesi oldu. Cayley grup kuramı ve matris cebri konularında bir öncüydü; yüksek tekillik ve invaryantların kuramlarını tasarladı, yüksek boyutlar geometri-

sini irdeledi ve sekizeyleri yaratarak William Hamilton'ın dördeylerine ekleme yaptı.
Ayrıca bkz. Öklitçi olmayan geometri 228–229 ▪ Grup kuramı 230–233 ▪ Dördeyler 234–235 ▪ Matrisler 238–241

RİCHARD DEDEKİND
1831–1916

Dedekind, Carl Gauss'un Almanya'daki Göttingen Üniversitesinde yetiştirdiği öğrencilerdendi. Mezun olup bir süreliğine maaş almadan okutmanlık yaptı, sonrasında İsviçre'deki Zürih Federal Teknoloji Enstitüsünde ders vermeye başladı. Almanya'ya döndü, 1862'de Braunschweig'daki teknik lisede işe başlayıp çalışma hayatının kalan kısmını burada geçirdi. Artık gerçel sayıların bir standart tanımı haline gelen Dedekind kesimi tezini sundu, kümeler kuramı çerçevesinde benzer kümeler ve sonsuz kümeler gibi kavramları belirledi.
Ayrıca bkz. Cebrin temel teoremi 204–209 ▪ Grup kuramı 230–233 ▪ Boole cebri 242–247

MARY EVEREST BOOLE
1832–1916

Mary Everest gençlik döneminde din adamı babasının çalışma odasındaki kitapları okuyarak matematiğe âşık oldu; Fark Makinesinin mucidi çok yönlü bilgin Charles Babbage da babasının arkadaşlarından biriydi. Mary 18 yaşındayken İrlanda'da (Mary gibi kendi kendini eğitmiş olan) ünlü matematikçi George Boole'la tanıştı. Beş yıl sonra evlendiler ancak beşinci çocuklarının doğumundan kısa bir süre sonra George vefat etti. 1864 yılında bakması gereken beş kız çocuğuyla birlikte maddi destekten yoksun kalan Mary, Londra'ya geri dönüp bir kız okulu olan Queen's Kolejinde kütüphane görevlisi olarak çalıştı, bir zaman sonra seçkin bir çocuk öğretmeni olarak tanındı. *Philosopy and Fun of Algebra* (*Cebir Felsefesi ve Zekâsı*, 1909) gibi genç öğrencilerin daha kolay anlayacağı matematik kitapları da yazdı.
Ayrıca bkz. Cebir 92–99 ▪ Cebrin temel teoremi 204–209

GOTTLOB FREGE
1848–1925

Almanya'nın kuzey kesimindeki Wismar'da bir kız okulu müdürünün oğlu olan Frege; Jena ve Göttingen üniversitelerinde matematik, fizik, kimya ve felsefe eğitimi aldı. Ardından çalışma hayatının tamamını Jena'da matemetik öğreterek geçirdi. Matematiğin tüm alanlarında ders verdi, bir yandan kalkülüste uzmanlaştı. Gerçi, yazılarının büyük bölümünü kalkülüsün felsefesine ayırdı ve bu iki bilim dalını bir araya getirmesi sayesinde modern matematiksel mantığı neredeyse tek başına icat etti. Bir yorumunda, "Her iyi matematikçi en azından yarı yarıya filozoftur, her iyi filozof da en azından yarı yarıya matematikçidir," diyordu. Frege, öğrencileriyle ve meslektaşlarıyla pek kaynaşmadan, hemen hiç göze çarpmadan yaşamasına rağmen Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein ve daha başka matematiksel mantıkçıların çalışmalarına büyük ölçüde etki etti.
Ayrıca bkz. Matematiğin mantığı 272–273 ▪ Bulanık mantık 300–301

SOFYA KOVALEVSKAYA
1850–91

Moskova doğumlu Kovalevskaya matematik doktorası yapan, bir bilim dergisinde yayın kuruluna dahil edilen ve matematik öğretim üyeliğine atanan ilk kadındı. Bütün bu başarıları anayurdu Rusya'da cinsiyeti yüzünden üniversite eğitiminden mahrum bırakılmasına karşın elde etti. 17 yaşındayken fosilbilimci (paleontoloji uzmanı) Vladimir Kovalevsky ile evlenmek üzere Almanya'ya kaçtı, orada önce Heidelberg Üniversitesinde, arkasından da Alman matematikçi Karl Weierstrass'tan öğrenim gördüğü Berlin Üniversitesinde okudu (bkz. s. 331). Doktora diplomasını almasını sağlayan üç makalenin içinde, kısmi diferansiyel denklemler hakkındaki makalesi öne çıkar. Kariyerini Stockholm Üniversitesinde matematik öğretim üyesi olarak tamamlayan Sofya daha 41 yaşındayken bu şehirde hayatını kaybetti.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–183

GİUSEPPE PEANO
1858–1932

İtalya'nın kuzey kesiminde kalan Piedmont'taki bir çiftlikte yetişen Peano, Torino Üniversitesinde aldığı eğitimi 1880 yılında matematik doktorası yaparak tamamladı. Hemen hiç vakit kaybetmeden yine bu üniversitede sonsuz küçükler kalkülüsü öğretmeye başladı, 1889'da profesörlüğe erişti. Peano'nun ilk ders kitabı 1884'te yayımlanan kalkülüs kitabıydı; 1891'de yazmaya başladığı beş ciltlik *Formulario Mathematico*'daysa (*Matematik Formülleri*) matematiğin temel teoremlerini büyük oranda kendisinin geliştirdiği simgesel bir dilde aktarıyordu. Bu simge ve kısaltmaların birçoğu günümüzde halen kullanılır. Peano pozitif tamsayılarla ilgili aksiyomlar (Peano aksiyomları) üretti, doğal mantık ve kümeler kuramı için notasyon geliştirdi ve bunlara ilaveten bir ispat tekniği olarak kullanılan modern matematiksel tümevarım yöntemine katkıda bulundu.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–229 ▪ Matematiğin mantığı 272–273

HELGE VON KOCH
1870–1924

İsveç'in Stockholm şehrinde dünyaya gelen Koch; Stockholm ve Uppsala üniversitelerindeki eğitimini tamamladıktan sonra Stockholm üniversitesinde matematik öğretim üyesi oldu. 1906 tarihli makalesinde açıkladığı fraktal, Von Koch'un "kar tanesi" eğrisi diye tanımlanır. Bu fraktali inşa etmek için bir eşkenar üçgenin her kenarının üç eşit diliminden ortadaki kaldırılıp yerine başka bir eşkenar üçgenin tabanı koyulur ve bu işlem sonsuza dek sürdürülür. Tüm üçgenler dış tarafta olduğunda sonuç olarak elde edilen eğri, kar tanesi görünümüne bürünür.
Ayrıca bkz. Fraktaller 306–311

ALBERT EİNSTEİN
1879–1955

Einstein olağanüstü derecede yetenekli bir fizikçi ve matematikçiydi. Almanya'da doğdu, gençliğinde ailesiyle birlikte İtal-

ya'ya taşındı ve İsviçre'de okudu. 1905'te Zürih Üniversitesinde doktor unvanını aldı ve Brown hareketi, fotoelektrik olay, özel ve genel görelilik, madde ve enerjinin eşdeğerliliği üstüne çığır açan makaleler yayımladı. 1921'de fiziğe katkılarından dolayı Nobel Ödülü kazandı ve sonraki yıllarda kuantum mekaniği anlayışını geliştirmeye devam etti. Yahudi bir aileden geldiğinden 1933'te Hitler iktidara geldikten sonra Almanya'ya dönmek yerine ABD'ye yerleşip 1940 yılında ülke vatandaşı oldu.
Ayrıca bkz. Newton'ın hareket yasaları 182–183 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–229 ▪ Topoloji 256–259 ▪ Minkowski uzayı 274–275

L. E. J. BROUWER
1881–1966

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (arkadaşları arasında "Bertus" adıyla tanınırdı) Hollanda'nın Overschie köyünde doğdu. 1904'te Amsterdam Üniversitesinin matematik bölümünden mezun oldu, 1909'dan 1951'e kadar burada ders verdi. Matematiğin David Hilbert ve Bertrand Russell'ın benimsediği gibi mantık esasına bağlı oluşunu Brouwer kusurlu buluyordu ve matematiğin apaçık yasalara tabi olduğu düşüncesine dayanan matematiksel sezgiciliğin temellerinin atılmasına yardımcı oldu. Ayrıca kendisine ait sabit nokta teoreminde topoloji dalını cebirsel yapılarla ilişkilendirmek suretiyle dönüştürdü.
Ayrıca bkz. Topoloji 256–259 ▪ 20. yüzyıl için 23 problem 266–267 ▪ Matematiğin mantığı 272–273

EUPHEMİA LOFTON HAYNES
1890–1980

Washington doğumlu Lofton Haynes matematik doktora diploması alan ilk Afro-Amerikan kadın oldu. 1914 yılında Massachusetts'teki Smith Kolejinin matematik bölümünden mezun olduktan sonra öğretmenlik kariyerine atıldı, Miner Öğretmen Okulunda 1930'da hizmete açtığı matematik bölümü daha sonra District of Columbia Üniversitesiyle birleşti. Doktorasını kümeler kuramını konu alan teziyle 1943'te Amerika Katolik Üniversitesinde tamamladı. 1959'da eğitime ve sivil toplum eylemciliğine katkılarından dolayı Lofton Haynes'e Papa madalyası verildi ve 1966'da District of Columbia Eyalet Eğitim Kurulunun başkanlık koltuğuna oturan ilk kadın oldu.
Ayrıca bkz. Matematiğin mantığı 272–273

MARY CARTWRİGHT
1900–98

İngiliz bir taşra rahibinin kızı olan Cartwright ileride kaos kuramı adıyla ün salacak olguyu ilk araştıran matematikçilerdendi. 1923'te Oxford Üniversitesinden matematik diplomasıyla mezun oldu. Yedi yıl sonra doktora tezini inceleyen John E. Littlewood'la, ilerleyen dönemlerde, özellikle fonksiyonlar ve diferansiyel denklemler alanlarında olmak üzere akademide uzun bir işbirliği içine gireceklerdi. Cartwright 1947'de Londra'daki İngiltere Kraliyet Bilimler Akademisinin üyeliğine seçildi. 1930'dan 1968'e kadar süren uzun bir çalışma hayatı geçirdiği Girton Kolejinde ders verdi, araştırma yürüttü, okul müdireliği yaptı.
Ayrıca bkz. Kelebek etkisi 294–299

JOHN VON NEUMANN
1903–57

Macaristan'ın Budapeşte şehrindeki varlıklı bir Yahudi çiftin oğlu olan von Neumann dâhi bir çocuk olarak, altı yaşındayken sekiz basamaklı sayıları zihinden bölebiliyordu. Ergenlik döneminin sonlarında önemli matematik makaleleri yayımlamaya, 24 yaşında Berlin Üniversitesinde matematik öğretmeye başladı. New Jersey'ye bağlı Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsündeki görevinin başına geçmek üzere 1933'te ABD'ye taşındı ve 1937'de ABD vatandaşı oldu. Matematik çalışmalarına ömrünü adayan von Neumann hemen her matematik alanına katkı yaptı. Bir tarafın kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu "iki kişilik sıfır toplamlı oyun" esasına bağlı oyun kuramının temelini atanlardandı. Oyun kuramı, gerek iktisat ve bilgisayar programlama gibi günlük yaşamda, gerekse askeri meselelerde karşılaşılan karmaşık sistemlerin içyüzünü kavrama olanağı sunuyordu. Modern bilgisayar mimarisine yönelik bir tasarım numunesi oluşturdu. Kuantum ve nükleer fizik alanlarında çalışıp II. Dünya Savaşı sırasındaki atom bombası projesine de katkı verdi.
Ayrıca bkz. Matematiğin mantığı 272–273 ▪ Turing makinesi 284–289

GRACE HOPPER
1906–92

New York City'de Grace Murray olarak dünyaya gelen Hopper öncü bir bilgisayar programcısıydı. 1934'te Yale Üniversitesinden doktora diplomasını aldıktan sonra II. Dünya Savaşı patlak verene kadar birkaç yıl öğretmenlik yaptı. ABD Donanmasına yazılmak için yaptığı başvuru reddedildi, bunun üstüne Donanma Subaylığına katılıp bilgisayar bilimciliği mesleğine ayak bastı. Savaşın ardından bir bilgisayar şirketinde uzman matematikçi olarak çalışmaktayken geliştirdiği Common Business-Oriented Language (COBOL; Ortak Ticaret Dili) kullanılan en yaygın programlama dili haline geldi. Hopper 1966'da Donanma Subaylığından emekli olmasına rağmen ertesi yıl tekrar vazife başına çağrıldı; emekliye ayrıldığı 1986 yılında rütbesi tuğamiralliğe kadar yükselmişti. Üstünde çalıştığı bilgisayarın devrelerine giren bir güvenin yol açtığı arızaya "*bug*" (bilgisayar terimcesinde "hata;" en yaygın anlamıyla, "böcek") adını koyarak bu terimin mucidi oldu.
Ayrıca bkz. Mekanik bilgisayar 222–225 ▪ Turing makinesi 284–289

MARJORİE LEE BROWNE
1914–79

Matematik doktora diploması alan üçüncü Afro-Amerikan kadın unvanını taşıyan Browne akademik kariyerin beyaz olmayan kadınlar için çetin olduğu bir zamanda Tennessee'de dünyaya geldi. Tren memuru babasının desteğiyle Washington'daki Howard Üniversitesinden 1935 yılında mezun oldu, New Orleans'ta kısa bir süre öğretmenlik yaptıktan sonra Michigan Üniversitesinde eğitim hayatını devam ettirip 1949'da doktor ilan edildi. İki yıl sonra, North Carolina Central Üniversitesinde matematik bölüm başkanlığına getirildi. Marjorie mükemmel öğretmenliğiyle ve yürüttüğü araştırmalarla

(özellikle topoloji araştırmalarıyla) adından söz ettirdi.
Ayrıca bkz. Topoloji 256–259

JOAN CLARKE
1917–96

Londra doğumlu Clarke, II. Dünya Savaşından hemen önce Cambridge Üniversitesinde iki aşamalı verilen matematik eğitimini iki aşamada da üstün başarı alarak tamamlamasına karşın tam derece almasına cinsiyeti engel oldu. Gerçi, olağanüstü matematik yeteneği gözden kaçmamıştı; Almanların Enigma kodunu çözmek amacıyla Bletchley Park projesi faaliyete geçirilince Clarke da işe alındı. Bletchley'deki önde gelen kriptoanalistlerden biri oldu. Bu süreçte dirsek temasında çalıştığı Alan Turing'le kısa bir süre nişanlı kaldı. Erkek kod kırıcılar olarak aynı işi yapmalarına karşın Clarke ve Bletchley'deki diğer kadınlara daha az ücret ödeniyordu. Bletchley Park Operasyonu muazzam bir başarıyla sonuçlandı; savaşın süresi kısaltılmış ve sayısız can kaybı önlenmişti. Savaşın ardından Clarke, İngiliz devletine bağlı gözetleme merkezi GCHQ'da çalıştı. Clarke'ın işinin çok büyük bir bölümü gizli tutulduğundan yerine getirdiği görevler halen tam olarak bilinmemektedir.
Ayrıca bkz. Turing makinesi 284–289 ▪ Kriptografi 314–317

KATHERİNE JOHNSON
1918–

Henüz çocukken matematik dâhisi olan Katherine Johnson (bekârlık soyadı Coleman'dı) bilgisayar programlamanın ve Amerikan uzay programının öncülerindendi. Uçuş güzergâhlarıyla ilgili hesaplamaları Alan Shepard'ın uzaya giden ilk Amerikalı olmasında (1961); John Glenn'in dünyanın yörüngesinde turlayan ilk Amerikalı olmasında (1962); Apollo 11'in aya inmesinde (1969) ve Uzay Mekiği programının açılış uçuşunda (1981) can alıcı bir etken oldu. Johnson 1937'de West Virginia Eyalet Kolejinden mezun olduktan sonra West Virginia Üniversitesinde bir lisansüstü programına kaydolan ilk Afro-Amerikanlardan biri oldu. 1953'ten itibaren Ulusal Havacılık Danışma Kurulunda (NACA), Afro-Amerikan kadın matematikçilerden oluşan bir grubun üyesi olarak görev aldı. Batı Bölgesi Hesaplamacıları olarak bilinen grup ilerleyen dönemlerde çekilecek *Hidden Figures* (*2016; Gizli Sayılar*) adlı filme konu oldu. Johnson ayrıca 1958'de girdiği Ulusal Havacılık ve Uzay Dairesine (NASA), kurumun Uzay Görevi Grubunda hizmet verdi. 2015'te Başkan Obama, Johnson'ı Başkanlık Özgürlük Madalyasıyla ödüllendirdi.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–183 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–229

JULİA BOWMAN ROBİNSON
1919–85

St. Louis'de Julia Bowman bekârlık adıyla dünyaya gelen Robinson matematik doktorasını Berkeley'deki Kaliforniya Üniversitesinde 1948'de tamamladı. 1951'de temel oyun kuramının esas aldığı bir teoremi (bkz. John von Neumann, s. 333) geliştirmesine rağmen adının duyulmasını daha ziyade 1900'de David Hilbert'in 23 matematik problemini sıraladığı listedeki 10. problemi çözmesine borçluydu. Çözdüğü bu problemde herhangi bir Diyofantus denklemine (tamsayıların ve sonlu bilinmeyenlerin kullanıldığı bir denkleme) çözüm bulabilecek bir algoritmanın olup olmadığı sorusunu yanıtlamıştı. Öylesi bir algoritmanın var olamayacağını, Robinson'ın yanı sıra Yuri Matiyasevich (bkz. karşı sayfada) ve başka matematikçiler de ispatladı. Robinson 1975'te Berkeley'de öğretim üyeliğine getirildi. 1976'da Amerikan Ulusal Bilimler Akademisine seçilen ilk kadın oldu.
Ayrıca bkz. Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ 20. yüzyıl için 23 problem 266–267

MARY JACKSON
1921–2005

Uzay mühendisi Mary Jackson (bekârlık soyadı Winston'dır) Amerikan uzay programında görev aldı; öte yandan kadınlara ve beyaz olmayan insanlara yönelik mühendislik olanaklarının iyileştirilmesi için mücadele etti. Virginia'daki Hampton Üniversitesinin matematik ve fen bilimleri bölümlerinden mezun olduktan sonra Jackson bir süre öğretmenlik yaptı, ardından 1951'de Ulusal Havacılık Danışma Kurulunun (NACA) bünyesindeki Batı Bölgesi Hesaplama Biriminde çalışmaya başladı. Batı Bölgesi Hesaplamacıları adıyla anılan bu birim, Katherine Johnson'ın da (bkz. solda) dahil olduğu Afro-Amerikan kadın matematikçilerden meydana geliyordu. Jackson NASA'nın ilk siyahi kadın mühendisi unvanını elde ettiği 1958 yılından 1963'e kadar, ilk Amerikalıların uzaya gönderildiği Merkür Projesi'nde çalıştı.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–183 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–229

ALEXANDER GROTHENDİECK
1928–2014

Pek çoklarının gözünde 20. yüzyılın ikinci yarısının en büyük soyut matematikçisi olan Grothendieck her bakımdan alışılmışın dışında biriydi. Almanya'da anarşist bir çiftin oğlu olarak dünyaya geldi, 10 yaşında Nazi rejiminden kaçıp Fransa'ya sığındı ve hayatının büyük bölümünü orada geçirdi. Çoğu hiç yayımlanmayan sayısız eseri cebirsel geometriye devrim getiren buluşlarını, şemalar kuramını icat edişini, ayrıca cebirsel topoloji, sayı kuramı ve kategori kuramına katkılarını içeriyordu. Grothendieck'in Vietnam Savaşında Hanoi bombalanırken şehrin hemen dışında matematik dersi vermek gibi köktenci siyasi eylemlerde bulunuyordu.
Ayrıca bkz. Öklitçi olmayan geometri 228–229 ▪ Topoloji 256–259

JOHN NASH
1928–2015

Amerikalı matematikçi John Nash ününü oyun kuramının temel ilkelerini (bkz. John von Neumann, s. 333) belirlemesine borçludur. 1948'te Carnegie Mellon Üniversitesinden mezun olup 1950'de Princeton Üniversitesinden doktora diplomasını aldıktan sonra Massachusetts Teknoloji Enstitüsüne (MIT) girdi. Oradaki görevi sırasında kısmi diferansiyel denklemleri araştırdı ve 1994'te Nobel Ekonomi Ödülü'nü kazanmasını sağlayan oyun kuramı üstünde çalışmaya başladı. Hayatının büyük bölümünde paranoid şizofreniyle boğuşan Nash'in bu hikâyesi *A Beautiful*

Mind (2001; Akıl Oyunları) filmiyle sinemaya uyarlandı.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Matematiğin mantığı 272–273

PAUL COHEN
1934–2007

David Hilbert'in listesindeki çözülmemiş 23 adet matematik probleminin 1.sini çözen (eleman sayısı, tamsayılar ile gerçel sayı kümelerinin eleman sayılarının arasında olan bir kümenin var olmadığını ispat eden) New Jersey doğumlu Cohen bu başarısıyla 1966 yılında Fields Madalyasını (Nobel Ödülünün matematik alanındaki eşdeğerini) kazandı. Cohen üniversiteden mezun olduktan sonra 1958'de Chicago Üniversitesinden doktora diplomasını aldı. Ardından Massachusetts Teknoloji Enstitüsüne (MIT), Princeton Üniversitesine, son olarak da Stanford Üniversitesine geçti ve orada 2004'te onursal profesör ilan edildi.
Ayrıca bkz. 20. yüzyıl için 23 problem 266–267

CHRİSTİNE DARDEN
1942–

Katherine Johnson ve Mary Jackson (bkz. s. 334) gibi matematikçilerin emeğiyle NASA'nın uzay programlarına çok önemli katkılar sunan Afro-Amerikan kadınlardan biri de Darden'dır. Hampton Üniversitesinden mezun olduktan sonra Darden Virginia Eyalet Üniversitesinde öğretmenlik yaptı, ardından 1967'de NASA'nın Langley Araştırma Merkezine yerleşti. Oradaki çalışma döneminde sesötesi uçuşta uzmanlaşmış uzay mühendisi kimliğiyle isim yaptı. 1989'da sesötesi uçuşun ses kirliliği ve diğer olumsuz etkilerini hafifletecek tasarımların üzerinde çalışan Ses Bombası Ekibinin başına getirildi.
Ayrıca bkz. Kalkülüs 168–175 ▪ Newton'ın hareket yasaları 182–183 ▪ Öklitçi olmayan geometri 228–229

KAREN KESKULLA UHLENBECK
1942–

2019 yılında Uhlenbeck, Abel Matematik Ödülü'ne layık bulunan ilk kadın oldu. 1942'de Ohio eyaletine bağlı Clevelend'da doğdu. 1968'de Massachusetts eyaletinin Waltham şehrindeki Brandeis Üniversitesinden matematik doktora diplomasını aldı. Ardından matematiksel fizik, geometrik analiz ve topolojide dikkate değer buluşlara imza attı. 1990'da bilim ve matematikte cinsiyet eşitliğini savunan biri olarak, Emmy Noether'den sonra, Uluslararası Matematik Kurultayının açılış konuşmasını yapan ilk kadın oldu. 1994'te New Jersey'ye bağlı Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsünde Kadın ve Matematik Programını başlattı.
Ayrıca bkz. Topoloji 256–259

EVELYN NELSON
1943–87

Kanadalı matematikçiler Evelyn Nelson ve Cecilia Krieger'ın anısını yaşatmak adına Kanada Matematik Bilim Akademisi üstün araştırmalar yürütmüş bir kadın matematikçiye Krieger-Nelson Ödülü'nü verir. 1970'te McMaster Üniversitesinde doktora derecesi alan Nelson kariyerine aynı okulda ders verip araştırma yaparak başladı. Kanser hastalığı nedeniyle erken sonlanan 20 yıllık kariyerinde 40'ın üzerinde araştırma makalesi yayımladı. Katkıda bulunduğu başlıca bilim dalları olan evrensel cebir (cebirsel kuramların ve onların modellerinin incelendiği alan) ve cebirsel mantığı, bilgisayar bilimi alanında uyguladı.
Ayrıca bkz. Cebrin temel teoremi 204–209 ▪ Matematiğin mantığı 272–273

YURİ MATİYASEVİCH
1947–

Leningrad'daki (günümüzde St. Petersburg) Steklov Matematik Enstitüsünde doktorasını yapmakta olan Matiyasevich, David Hilbert'in çözümsüz 10. problemiyle boğuşmaktan zevk alıyordu. Pes etmesine ramak kalmıştı ki Amerikalı matematikçi Julia Robinson'ın (bkz. s. 334) yazdığı "Unsolvable Diophantine Problems" ("Çözülemeyen Diyofantus problemleri") (1969) başlıklı makaleyi okudu ve bir çözüm kafasına dank etti. Matiyasevich 10. problemin çözümsüz olduğuna dair son ispatını, Diyofantus denklemlerinin çözümü olup olmadığını saptamaya dönük genel bir yöntem olmamasına dayandırarak 1970 yılında sundu. 1995'te öğretim üyesi olarak göreve başladığı St. Petersburg Üniversitesinde önce yazılım mühendisliği bölüm başkanlığı, ardından cebir ve sayı kuramı bölüm başkanlığı yaptı.
Ayrıca bkz. Diyofantus denklemleri 80–81 ▪ 20. yüzyıl için 23 problem 266–267

RADİA PERLMAN
1951–

Virginia doğumlu Perlman için "internetin annesi" tabiri kullanılır. Massachusetts Teknoloji Enstitüsündeki (MIT) öğrenciliği sırasında henüz 3 yaşındaki çocukları bilgisayar programlamayla tanıştırıyordu. 1976'da matematik yüksek lisans diplomasıyla mezun olduktan sonra Perlman yazılım geliştiren bir kamu müteahhitinde çalıştı. Daha sonra 1984'te Digital Equipment Corporation'da (DEC) çalıştığı dönemde iki ağ aygıtı arasında yalnızca tek bir etkin yol olmasını sağlayan Yayılan Ağaç Protokolünü (STP) icat etti; ilerleyen zamanlarda, internetin geliştirilmesi için bunun son derece önemli olduğu anlaşılacaktı. Perlman, MIT'nin yanı sıra Washington ve Harvard üniversitelerinde ders verdi, şu anda da bilgisayar ağı ve güvenlik protokolleri üzerine çalışmalarını sürdürmekte.
Ayrıca bkz. Mekanik bilgisayar 222–225 ▪ Turing makinesi 284–289

MARYAM MİRZAKANİ
1977–2017

Mirzakani 17 yaşındayken Uluslararası Matematik Olimpiyatında altın madalya kazanan ilk İranlı kadın oldu. Tahran'daki Şerif Teknoloji Üniversitesinden mezun oldu, ardından 2004'te Harvard Üniversitesinden doktora derecesi alıp Princeton Üniversitesinde öğretim üyesi olarak çalışmaya başladı. Bundan on yıl sonra Mirzakani, Riemann yüzeylerine yönelik araştırmalara katkısıyla Fields Madalyasını kazanan ilk kadın ve ilk İranlı oldu. Stanford Üniversitesinde çalıştığı dönemde 40 yaşında meme kanserine yenik düştü.
Ayrıca bkz. Öklitçi olmayan geometri 228–229 ▪ Riemann varsayımı 250–251 ▪ Topoloji 256–259

SÖZLÜK

Bu sözlükte, başka girdide belirtilen terimler *italik* yazı tipiyle vurgulanmıştır.

Açılım: *Cebirde*, bir *ifadenin* açılımı, *çarpanlarına ayırmanın* tersidir. Örneğin $(x + 2)(x + 3)$ ifadesi, birinci parantezin içindeki her terim ile ikinci parantezin içindeki her terimi çarparak $x^2 + 5x + 6$ şeklinde açılabilir.

Aksiyom: Kural; özellikle bir matematik alanının esasını oluşturan bir kural.

Alan: İki boyutlu bir şeklin kapladığı yerin miktarı. Alan, birim karelerle ölçülür; örneğin santimetrekareyle.

Algoritma: Belli bir sınıfa ait problemlerin çözülmesi için tasarlanan, tanımlı bir dizi matematiksel veya mantıksal yönerge ya da kural. Matematik ve bilgisayar bilimi hesaplamalarında, veri düzenleme işlemlerinde ve daha birçok görevde algoritmalar yaygın olarak kullanılır.

Altmışlık: Babillilerin kullandığı, 60 sayısını esas alan ve değiştirilmiş biçimleriyle saat, açı ve coğrafi koordinatlarda halen kullanılmakta olan bir sayı sistemi.

Analitik geometri: Bkz. *cebirsel geometri*.

Analiz: *Limitler* konusunun işlendiği ve sonsuz büyüklük ya da küçüklükteki niceliklerin kullanıldığı (özellikle *kalkülüs* problemlerinin çözümünde) matematik dalı.

Asal sayı: Yalnızca kendisine ve 1'e tam bölünebilen her sayma sayısı.

Aşkın sayı: Cebirsel sayı olmayan her irrasyonel sayı. *Pi* (π) sayısı ve Euler sayısı (e) aşkın sayılardır.

Bağdaşık sayılar: Her birinin *çarpanlarının* toplamı diğerine eşit olan bir *tamsayı* çifti. En küçük bağdaşık sayı çifti 220 ve 284'tür.

Basamak değerli sistem: Bir rakamın değerinin kendisinden büyük bir sayıdaki konumuna bağlı olduğu, standart sayı yazma sistemi. Örneğin 120'deki 2'nin basamak değeri 20'dir, ama 210'daki karşılığı 200'dür.

Baş nokta: *Grafiğin* x ve y eksenlerinin kesiştiği nokta.

Belit: Matematikte, doğruluğu sorgusuz sualsiz kabul edilen ya da bariz olduğu düşünülen ama *ispatla* desteklenmeyen ifade.

Bileşik sayı: *Asal* olmayan ve kendisinden küçük sayıların çarpılmasıyla oluşturulabilen *tamsayı*.

Binom: Birbirine eklenen iki *terimden* meydana gelen *ifade*; ör. $x + y$. Binom ifadesi bir *kuvvetine* yükseltildiğinde çıkan sonuç, mesela $(x + y)^3$, çarpma işlemiyle açılır (bu örnekte $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ elde edilir). Bu işleme binom açılımı, terimlerin çarpıldığı sayılara da (bu örnekteki 3'lere) binom *katsayıları* denir. Binom teoremi, karmaşık durumlarda binom katsayılarını bulmaya yönelik bir kuraldır. Ayrıca bkz. *polinomlar*.

Birleşme yasası: Bu yasaya göre, mesela $1 + 2 + 3$ sayılarını birbirlerine ekliyorsanız, sayıları herhangi bir sırayla toplayabilirsiniz. Basit toplama ve çarpmada geçerlidir, çıkarma ve bölmede değildir.

Bölen: Bir sayı veya niceliğin bölündüğü diğer sayı veya nicelik.

Bölüm: Bir sayı başka bir sayıya bölündüğünde elde edilen sonuç.

Cebir: Hesaplamalardaki bilinmeyen sayıların, yani *değişken* sayıların, harflerle simgelendiği matematik dalı.

Cebirsel geometri: $y = x^2$ gibi cebirsel fonksiyonları temsil eden doğru veya eğrilerin *grafikte* gösterilmesi.

Cebirsel sayılar: Rasyonel sayıların tamamı ve *rasyonel* sayıların *kökleri* hesaplanarak elde edilebilen *irrasyonel* sayılar, cebirsel sayılardır. Cebirsel olmayan irrasyonel sayılara (mesela *pi* veya e) aşkın sayı denir.

Çakışan: *Geometride*, üst üste bindirildiklerinde tüm noktaları ortak olan ve uzayda tamı tamına aynı yeri kaplayan iki veya daha fazla çizgi ya da şekil.

Çap: Çembere iki noktada temas eden ve merkezden geçen bir doğru.

Çarpan: Bir sayı veya *ifadenin* tam bölündüğü başka bir sayı veya *ifade*. Örneğin 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 sayılarının hepsi 12'nin birer çarpanıdır.

Çarpanlara ayırma: Bir sayı veya matematiksel *ifadeyi*, birbirleriyle çarpılınca başlangıçtaki sayıyı veya ifadeyi veren *çarpanları* üzerinden ifade etmek.

Çarpım: Sayı veya niceliklerin birbirleriyle çarpılmasının sonucu.

Çarpmaya göre ters: Bir sayı veya *ifadenin* tersi olan başka bir sayı veya ifade; bu, birbiriyle çarpılmalarının 1 sonucunu verdiği anlamına gelir. Örneğin 3'ün çarpmaya göre tersi $^1/_3$'tür.

Çeşitkenar üçgen: Hiçbir kenarı ve hiçbir açısı aynı büyüklükte olmayan bir üçgen.

Çevre: Bir dairenin sınırında tam bir tur atıldığında katedilen mesafe.

Çıktı: *Girdi* bir *fonksiyonla* birleştirildiğinde çıkan sonuç.

Çizge kuramı: Nokta ve çizgilerden oluşan *çizgelerin* nasıl bağlantılandırıldığını gösteren matematik dalı.

Çokgen: Üç veya daha çok düz kenarı olan herhangi bir yassı şekil; örneğin üçgen veya beşgen.

Çokkatlı: Herhangi bir küçük bölgesi, olağan üç boyutlu uzayı andıran bir tür soyut matematiksel uzay. *Topoloji* başlığı altında ele alınan bir kavramdır.

Çokyüzlü: Yüzleri *çokgen* şeklindeki üç boyutlu herhangi bir şekil.

Dar açı: 90 *dereceden* küçük açı.

Değişken: Farklı değerler alabilen bir matematiksel nicelik. Çoğunlukla x veya y gibi bir harfle simgelenir.

Değişme yasası: $1 + 2 = 2 + 1$ olduğunu ve sayıların yazıldığı sıranın önem taşımadığını tespit eden yasa. Basit toplama ve çarpmada geçerlidir, çıkarma ve bölmede değildir.

Denklem: İki matematiksel ifadenin veya niceliğin birbirine eşit olduğunu belirten bir anlatım. Matematiksel bir *fonksiyon* genellikle denklemle ifade edilir. Bir değişkenin tüm değerleri için geçerli olan bir denkleme (mesela $y \times y \times y = y^3$ denklemine) birim denklem denir.

Derece: (1) *Geometride* bir açı ölçüsü: Çember çevresinde atılan tam bir turun karşılığı 360 derecedir. (2) Bir *polinomun* derecesi veya *mertebesi*, polinomun içerdiği en büyük üslü *terimdir*. Örneğin bir polinomun en büyük kuvveti, x^3 gibi küpü alınmış bir terimse, "3'üncü derece" veya "3'üncü mertebedir". Benzer şekilde, *diferansiyel denklemlerde*, verili bir denklemin içerdiği terimlerin türevi en çok alınmış olanı, o denklemin derecesini veya diğer adıyla mertebesini belirler.

Devirli: Sonsuza dek tekrarlanan herhangi bir sayı. Örneğin $^1/_3$'ün ondalık sayı biçimindeki yazılışı şöyledir: 0,333333... "0 tam, 3 devreden" şeklinde sözel olarak da ifade edilebilir.

Diferansiyel: *Kalkülüste*, verili bir matematiksel *fonksiyonun* değişim hızını bulma işlemi. Hesaplamanın sonucunda elde edilen fonksiyona, birinci fonksiyonun diferansiyeli veya *türevi* denir.

Diferansiyel denklem: Verili bir değişkenin *türevini/türevlerini* içeren bir *fonksiyonu* temsil eden denklem.

Dik: Başka bir şeyle dik açı yapan.

Dik açı: Dikey ile yatay doğruların arasındaki açı gibi, 90 *derece* (çeyrek dönüş) açı.

Dizi: Art arda yerleştirilen ve genelde değişmeyen bir örüntüyü izleyen sayı veya matematiksel *terimlerin dizilişi*.

Doğal logaritma: Bkz. *logaritma*.

Doğrusal denklem: Kendisiyle çarpılmış değişken (örneğin x^2 veya x^3) içermeyen denklem. Doğrusal denklemler *grafikte* gösterildiğinde ortaya doğru çıkar.

Doğrusal dönüşüm: Doğrusal eşleme de denen, *vektör* uzayları arasındaki bir eşleme.

Dönüşüm: Verili bir şekli veya matematiksel *ifadeyi*, özel bir kuralı uygulayarak, ilişkili başka bir şekil veya ifade haline getirmek.

Dördey: *Karmaşık sayı* kavramının geliştirilmesinin bir sonucu olmakla beraber, iki yerine dört bileşenin birbirine eklendiği matematiksel nesne.

Dörtgen: Dört adet düz kenarı olan iki boyutlu herhangi bir düz şekil.

Dörtyüzlü: Dört üçgensel *yüzden* oluşan üç boyutlu bir *çokyüzlü*. Düz-

gün dörtyüzlü, beş *Platonik katıdan* biridir.

Düzlem: Düz bir yüzey.

Düzlem geometrisi: Düz bir yüzeydeki iki boyutlu şekillerin *geometrisi*.

Eğim: Bir doğrunun yatay eksene açısı veya bir eğrinin bir *teğetinin* yatay eksene açısıdır.

Eksen: Bir *grafikteki* dikey y ekseni ve yatay x ekseni gibi, belirli bir referans çizgisi.

Elips: Çemberimsi bir şekil, ancak çemberin tek bir doğrultuda simetrik olarak uzatılmışı.

Eşkenar dörtgen: Dört kenarı da aynı uzunluktaki bir *dörtgen*; konuşma dilinde baklava şekli de denir. Kare, her açısı 90 *derece* olduğundan, özel bir eşkenar dörtgen türüdür.

Eşkenar üçgen: Üç kenarı da aynı uzunlukta ve üç açısı da aynı büyüklükte olan üçgen.

Eşleme: Bir matematiksel *kümenin* üyeleri ile bir başkası arasında ilişki kurma. Her zaman değilse de çoğu zaman birebir eşleme anlamında kullanılır, yani bir kümenin her bir üyesinin diğer kümenin tek bir üyesiyle ilişkilendirilip aynı işlemin ters yönde de uygulanması anlamında.

Eşleşik: Aynı büyüklükte ve aynı şekilde. (Geometrik şekillerin karşılaştırılmasında kullanılır.)

Eşzamanlı denklemler: x, y ve z gibi bilinmeyen nicelikler içeren *denklemler* kümesi. Bilinmeyenlerin değerini bulabilmek için, denklemler çoğu zaman beraberce hesaplanmalıdır.

Etkisiz eleman: Bir sayı veya başka bir matematiksel nesne *kümesinde*, kümede yapılan çarpma veya toplama gibi bir *işlemin* etkisiz elemanı her zaman vardır. İşlem yapıldıktan sonra diğer *terimleri* değiştirmeyen bu etkisiz eleman, bir sayı veya *ifadedir*. Örneğin çarpma işlemindeki etkisiz eleman $1 \times x = x$ denkleminde görüldüğü gibi 1'dir; *gerçel* sayılarla toplama işlemindeki etkisiz eleman $0 + x = x$ denkleminde görüldüğü gibi 0'dır.

Faktöriyel: Herhangi bir pozitif *tamsayı* ile ondan küçük tüm pozitif tamsayıların *çarpımı*. Örneğin 5! (ünlem işaretiyle birlikte) biçiminde de yazılabilen 5 faktöriyel, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$'dir.

Fonksiyon: Özel olarak bir *değişkenin* değerinin, belli bir kural uygulanarak diğer sayıların değerinden bağımsız olarak bulunduğu bir matematiksel ilişki. Örneğin $y = x^2 + 3$ fonksiyonunda, y'nin değerini bulmak için x'in karesi alınır, ardından 3 eklenir. Aynı fonksiyon $f(x) = x^2 + 3$ biçiminde de yazılabilir; $f(x)$ "x fonksiyonu" demektir.

Formül: Niceliklerin arasındaki ilişkileri açıklayan matematiksel kural.

Fraktaller: Ne kadar büyütülürse büyütülsün genel görünümü aynı olan karmaşık örüntüleri meydana getiren kendine-benzer eğri veya şekiller. Bulutlar ve kaya oluşumları gibi birçok doğal olgu, fraktallere yaklaşır.

Geniş açı: 90 ile 180 *derece* arasındaki bir açı.

Geometri: Şekilleri, çizgileri, noktaları ve bu kavramların arasındaki ilişkileri inceleyen matematik dalı. Ayrıca bkz. *Öklitçi* olmayan geometri.

Gerçel sayı: Ya *rasyonel* sayı ya da *irrasyonel* sayı olan her *sayı*. Gerçel sayılar kesirleri ve negatif sayıları kapsar, *sanal* veya *karmaşık sayıları* kapsamaz.

Girdi: *Fonksiyonlarla* birleştirildiğinde çıktı veren her *değişken*.

Gradiyent: Doğrunun *eğimi*.

Grafik (çizge): (1) Verilerin, örneğin çizgi, nokta veya sütunlarla gösterildiği tablo. (2) *Çizge kuramında* çizge, çeşitli bilimsel ve sosyal alanlardaki hem kuramsal hem gerçek ağ, ilişki ve süreçleri modellemek için kullanılabilen, *köşe* adı verilen noktaların ve ayrıt adı verilen çizgilerin oluşturduğu bütün.

Grup: Bir matematiksel *kümenin* üyeleriyle yapılan bir işlemle, yine o kümenin üyesi olan yanıtlar elde ediliyorsa, ilgili küme ile işlem birlikte bir grubu meydana getirir. Örneğin *tamsayılar* kümesi, işlem toplama olduğunda, bir grubu meydan getirir. Gruplar sonlu da *sonsuz* da olabilir ve grup kuramı kapsamında incelenir.

Hacim: Üç boyutlu bir cismin kapladığı yerin miktarı.

Halka: *Gruba* benzemekle beraber bir yerine iki *işlem* içeren bir matematiksel yapı. Örneğin *tamsayıların* tamamından oluşan bir

küme, toplama ve çarpma *işlemleriyle* bir araya getirildiği zaman bir halkayı meydana getirir, çünkü kümenin üyeleriyle bu işlemler yapıldığında çıkan yanıt da kümenin bir üyesidir.

Harmonik seri: Şu matematiksel seri: 1 + ½ + ⅓ + ¼ + ⅕ +.... Serideki ayrı ayrı her terim, örneğin gergin bir telin ya da boru içerisindeki havanın, ses üreten farklı titreşimlerini tanımlar. Sonuçta elde edilen ses perdeleri serisi, gamın (müzik ölçeği) temelini oluşturur.

Hiperbol: *Parabole* benzeyen ancak ondan farklı olarak, iki uzantısı iki hayali doğruya giderek yakınlaşmakla birlikte doğrulara ne temas edecek ne de kesecek açılarla ilerleyen matematiksel bir eğri.

Hiperküp (tesseract): Her *köşesinde* dört ayrıtın buluştuğu dört boyutlu bir şekil. Buna karşılık, *küpün* her köşesinde üç, karenin her köşesinde iki ayrıt buluşur.

Hipotenüs: Bir dik üçgende, *dik açının* karşısında bulunan en uzun kenar.

Iraksaklık: Çoğu zaman, bir son sayıya giderek yaklaşmayan sonsuz *serilerle* ilgili bir terim. Ayrıca bkz. *yakınsaklık*.

İdeal: *Soyut cebirde*, büyük bir *halkanın* bileşeni olan matematiksel halka.

İfade: Matematiksel simgelerin anlamlı her birleşimi, örneğin $2x + 5$.

İkili notasyon: Sayıların, yalnızca 0 ve 1 rakamlarının kullanıldığı ikili sistemle yazılması. Örneğin 6 sayısının ikili sistemdeki yazılışı 110'dur. En soldaki 1'in değeri 4'tür (2 × 2); ortadaki 1'in anlamı, bir adet 2'dir; sıfırsa, hiç birim olmadığı anlamına gelir: 4 + 2 + 0, 6 eder.

İkinci derece denklem: Kendisiyle bir kere çarpılmış en az bir *değişken* (örneğin y^2 olarak da yazılan $y \times y$) içeren ve aynı zamanda, daha büyük *kuvvetlere* yükseltilmiş hiçbir değişken içermeyen bir denklem.

İkizkenar üçgen: İki kenarı aynı uzunlukta ve iki açısı aynı büyüklükte üçgen.

İndis: *Üs* anlamına gelen bir diğer sözcük.

İntegral: İntegral hesabında kullanılan matematiksel bir *ifade* veya *integrasyon* işleminin sonucu.

İntegral alma: İntegrasyon hesabında yapılan hesaplamaların süreci.

İrrasyonel sayı: Bir tamsayının başka bir tamsayıya bölünmesiyle ifade edilemeyen ve *sanal sayı* olmayan her sayı.

İspat: Matematiksel ifadelerin veya sonuçların doğruluğunu şüpheye yer bırakmaksızın gösteren her yöntem. *Tümevarım ve varlık ispatları* gibi farklı türleri vardır.

İstatistik: (1) Herhangi bir amaçla, kuralına uygun bir şekilde toplanan ölçülebilir veriler. (2) Bu tür verilerin analiz ve inceleme yöntemlerinin geliştirilip uygulandığı matematik dalı.

İşlem: Toplama, çarpma gibi standart bir matematik yordamı. Bu tür işlemlerde kullanılan simgelere işleç denir.

Kalkülüs: Sürekli olarak değişen niceliklerle ilgilenen matematik dalı. Değişim hızlarının ele alındığı türev hesabının yanı sıra, eğrilerin ya da eğri yüzeylerin altında kalan *alan* ve *hacimlerin* hesaplandığı integral hesabı, kalkülüsün alt başlıklarıdır.

Kardinal sayılar: 1, 2, 3 gibi, nicelik simgeleyen sayılar (*ordinal sayıların karşıtı*).

Karmaşık düzlem: *Karmaşık sayıların* grafikte gösterilebildiği iki boyutlu sonsuz *düzlem*.

Karmaşık sayı: *Bir gerçel sayı* ile bir *sanal sayının* birleşimi olan sayı.

Katsayı: Sayıların (özellikle *değişkenlerin*) önüne koyulup onlarla çarpılan, genellikle *sabit*, başka bir sayı veya *ifade*. Örneğin ax^2 ve $3x$ ifadelerindeki a ve 3, katsayılardır.

Kestirim: Ne doğruluğu ne de yanlışlığı henüz ispatlanmış matematiksel ifade veya iddia. Bağlantılı bir kestirim çifti güçlü ya da zayıf olabilir: Güçlü kestirim ispatlandığı takdirde zayıf kestirim de ispatlanır ancak bunun tersi geçerli değildir.

Kısmi diferansiyel denklem: Birkaç *değişken* içeren ve her seferinde tek bir değişken için *türevi alınan diferansiyel denklem*.

Kiriş: Çemberi, merkezden geçmeksizin kesen her doğru.

Kombinatorik: Kümelerdeki sayı, şekil veya başka matematiksel nesnelerin nasıl birleştirilebileceğini inceleyen matematik dalı.

Koni: Daire şeklindeki bir taban ve yukarıdaki bir noktaya doğru gitgide daralan bir yüzden oluşan üç boyutlu şekil.

Konumsal sayı: Değeri, kendisinden büyük bir sayıdaki konumuna bağlı, bağımsız bir rakam. Bkz. *basamak değerli sistem*.

Koordinatlar: Nokta, çizgi veya şekillerin *grafikteki* konumlarını ya da harita üzerindeki coğrafi konumları tanımlayan sayıların birleşimleri. Matematiksel bağlamlarda (x,y) şeklinde yazılırlar (iki boyut söz konusuysa); x yatay, y dikey konumdur.

Kosinüs (kısaltması cos): *Trigonometride*, *sinüse* benzeyen bir fonksiyon. Sinüsten farklı olarak, *dik açılı* bir üçgende, verilen bir açının komşu kenarının uzunluğunun, üçgenin *hipotenüsüne* oranı olarak ifade edilir.

Kök: (1) Bir sayının kökü, çarpıldığında ilk baştaki sayıyı veren bir diğer sayıdır. Örneğin 4 ve 8, 64'ün kökleridir; 8 karekök ($8 \times 8 = 64$), 4 küpköktür ($4 \times 4 \times 4 = 64$). (2) Bir denklemin kökü, aynı zamanda çözümüdür.

Köşe: İki veya daha fazla doğru, eğri veya ayrıtın buluştuğu bir köşe noktası veya açı.

Kuartik: 4'ten yüksek üs içermeyen (örneğin x^4) dördüncü derece *denklem* veya *ifadeleri* belirtir.

Kuintik: 5'ten yüksek üs içermeyen (x^5) beşinci derece *denklem* veya *ifadeleri* belirtir.

Kuvvet: Bir nicelik veya sayının kendisiyle çarpılma sayısı. Örneğin dört adet y'nin birbirleriyle çarpılmasına ($y \times y \times y \times y$) "$y$'nin 4'üncü kuvveti" denir ve y^4 olarak yazılır.

Kuvvet serisi: Her *terimin* üssünün bir öncekinden büyük olduğu matematiksel *seri*, örneğin $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

Kübit: Kadim dünyada kullanılan ve insanın önkolunu esas alan uzunluk ölçüsü.

Küme: Sayıların veya sayılara dayalı matematiksel yapıların bir araya geldiği öbek. Kümeler sonlu da (*tamsayıların* tamamını kapsayan küme gibi) sonsuz da olabilir.

Kümeler kuramı: Günümüzde matematiğin başka pek çok alanının temel aldığı, kümelerle ilgili kuram.

Küp: *Yüzleri* altı adet özdeş kare olan üç boyutlu şekil. Sayılar kendileriyle iki kere çarpılaraksa elde edilir; $2 \times 2 \times 2$ (2^3) eşit olan 8, tam küp sayıdır. Bu çarpma işlemi, küpün hacmini hesaplamaya benzer: uzunluk × yükseklik × derinlik.

Limit: Belli hesaplamalar sonsuz kere yinelendiğinde yaklaşılan son sayı.

Logaritma: Bir sayının logaritması, başka bir sayının (*taban* adı verilir, genelde 10 veya e sayısı olur) sonuç olarak ilk sayıyı verecek şekilde yükseltilmesi gereken kuvvettir. Örneğin $10^{0,301} = 2$'yse, 2'nin (10 *tabanına* göre) logaritması 0,301'dir. e tabanına göre bir logaritmaya *doğal logaritma* denir ve ln veya log_e önekiyle gösterilir. Logaritmaların faydası, bir çarpma işlemindeki sayıları çarpmak yerine, hesaplamayı basitleştirmek adına o sayıların logaritmalarının birbirine eklenebilmesidir.

Mantık: Verilen başlangıç bilgilerinden (öncüllerden), geçerli kurallar çerçevesinde, doğru vargılar çıkarabilmeye, yani akıl yürütmeye odaklanan inceleme alanı.

Matris: Sayı veya başka matematiksel niceliklerden oluşan, işlemlerde tek bir nesne olarak kullanılabilen kare veya dikdörtgensel bir dizi. Matrislerin toplama ve çarpma için özel kuralları vardır. Birkaç *denklemi* eşzamanlı olarak çözmek, *vektörleri* tanımlamak, geometrik şekillerin biçim ve konumlarındaki *dönüşümlerini* hesaplamak ve gerçek dünya verilerini temsil etmek gibi birçok farklı amaçla kullanılır.

Meridyen: Verili bir bölge üzerinden geçerek kuzey ve güney kutbunu birleştiren, Yer'in yüzeyindeki hayali çizgi. Meridyen çizgilerine *boylam* adı verilir.

Mertebe: Bkz. *derece*.

Mode: Bir veri kümesinde en sık rastlanan değer.

Modüler aritmetik: Belli bir noktaya kadar sayıldığında 0'a ulaşılıp baştan başlanan, saat aritmetiği olarak da adlandırılan aritmetik biçimi.

Olasılık: Gelecekte meydana gelecek farklı sonuçların olabilirliğini inceleyen matematik dalı.

Onikiyüzlü: 12 adet beşgensel (5 *kenarlı*) *yüzden* meydana gelen üç boyutlu bir *çokyüzlü*. Düzgün onikiyüzlü, beş *Platonik katıdan* biridir.

Orantı: Bir şeyin başka bir şeye kıyasla bağıl büyüklüğü. Örneğin ters orantılı iki nicelikten biri büyüyünce diğeri küçülür: Mesela bir nicelik 3'le çarpıldığında, diğeri 3'e bölünür.

Ordinal sayılar: 1'inci, 2'nci ya da 3'üncü gibi, sıralamadaki yeri simgeleyen sayılar. Ayrıca bkz. *kardinal sayılar*.

Ortalama (average): Bir veri kümesinin tipik veya orta değeri. Farklı ortalama türleri için bkz. ortalama (*mean*), ortanca (*medyan*) ve tepe değeri.

Ortalama (mean): Bir veri kümesindeki değerleri birbirlerine ekleyip değerlerin sayısına bölerek bulunan bir *ortalama*. Örneğin 1, 4, 6 ve 13 sayılarının ortalama değeri şöyle bulunur: $1 + 4 + 6 + 13 = 24$, $24/4 = 6$.

Ortanca (medyan): Bir veri kümesindeki değerler küçükten büyüğe sıralandığında, ortadaki değer.

Öklitçi olmayan geometri: Öklit'in antik dönemde açıkladığı gibi, *paralel* doğruların asla kesişmemesi (genelde ifade edilişiyle, sonsuzda kesişmeleri), geleneksel geometrinin esas *belitlerinden* biridir. Bu ve diğer Öklitçi belitlerin geçerli olmadığı geometriye, Öklitçi olmayan geometri denir.

Ölçekdeş olmayan büyüklük: Başka bir şeyle tam olarak ölçülemeyen bir şey.

Öteleme: Şeklini, büyüklüğünü ya da yönelimini etkilemeksizin bir cismi bir yönde belli bir uzaklığa taşıyan bir fonksiyon.

Parabol: Elipsin uç kısımlarına benzeyen eğri. Elipsten farklı olarak parabolün kolları ıraksar.

Parabolik: Parabole veya bir parabolü temel alan bir *fonksiyona* (mesela *grafikte* parabol şekliyle gösterilen ikinci derece bir fonksiyon gibi) ilişkin.

Paralel: Tamı tamına aynı doğrultuda ilerleyen iki doğrunun her birinin niteliği.

Paralelkenar: Her kenarı karşı kenarıyla aynı uzunlukta ve aynı zamanda birbirine paralel olan dörtgen. Kare, dökdörtgen ve *eşkenar dörtgen*, parelelkenar çeşitleridir.

Pay: Kesirlerin üstteki sayısı, örneğin ¾'teki 3.

Payda: Kesirlerde altta yer alan sayı, örneğin ¾ kesrindeki 4.

Periyodik fonksiyon: Tekrarlanan bir dalga silsilesi biçimindeki sinüs fonksiyonu *grafiğinde* görüldüğü gibi, değeri periyodik olarak tekrarlayan *fonksiyon*.

Pi (π): Çemberin *çevresinin*, *çapına* oranı. Değeri yaklaşık olarak $22/7$ ya da 3,14159'dur. Birçok matematik dalında karşılaşılan temel bir *aşkın* sayıdır.

Platonik katı: Tamamen düzgün ve simetrik şekillere biçimini veren beş *çokyüzlünün* her biri: Yüzlerin hepsi özdeş *çokgendir* ve *yüzlerin* arasındaki açılar aynıdır. Beş Platonik katı; *dörtyüzlü*, *küp*, *sekizyüzlü*, *onikiyüzlü* ve *yirmiyüzlüden* oluşur.

Polinom: İki veya daha çok terimin birbirine eklenemesiyle oluşan matematiksel *ifade*. Polinom ifadelerinde çoğunlukla bir değişkenin farklı *kuvvetlerine* ek olarak sabitler olur; örneğin $x^3 + 2x + 4$.

Radikal ifade: $\sqrt{2}$ gibi *irrasyonel sayı* olan bir *kök* içeren *ifade*. Sadeleştirilemediği ya da ondalık sayıyla tam olarak yazılamadığı için kök biçiminde bırakılır.

Radyan: Bir çemberin yarıçap ve *çevre* uzunluğunu temel alan, tercihen derece yerine kullanılan bir açı ölçüsü. $2 \times$ Pi (2π) radyan dönüş ile 360 derece dönüş (yani tam çember çizen bir dönüşle) aynı şeylerdir.

Rasyonel sayı: *Pay* ve *paydasında* iki *tamsayı* olan bir kesirle ifade edilebilen her sayı. Ayrıca bkz. *irrasyonel* sayılar.

Sabit: Matematiksel bir *ifadede*, değişmeyen bir nicelik; genellikle a, b ya da c gibi bir harfle simgelenir.

Salınım: Bir konumdan veya değerden diğerine gidip gelme şeklinde tekrarlanan düzenli bir hareket.

Sanal sayı: *Gerçel sayı* olmayan $\sqrt{-1}$'in katı olan her sayı. i simgesiyle gösterilir.

Sayma sayısı: Pozitif *tamsayıların* her biri. Ayrıca bkz. *tamsayı*.

Sayı doğrusu: Saymada ve hesaplamada kullanılan sayıların yazıldığı yatay doğru. Sayılar soldan sağa doğru büyür. Sayı doğrusuna tüm *gerçel sayılar* yerleştirilebilir.

Sayı kuramı: Sayıların (bilhassa tamsayıların) niteliklerini, örüntülerini ve ilişkilerini inceleyen matematik dalı. *Asal sayılar* da kapsamına girer.

Sayı sistemi: Sayıların yazıya geçirildiği ve ifade edildiği her sistem. Günümüzde kullanılan Hint-Arap sistemi 0'dan 9'a kadar rakamları temel alır: 10'a ulaşıldığında 1 rakamı tekrar yazılır ve sağına 0 koyulur. Bu hem bir *basamak değerli sistem* hem de 10-tabanlı, yani ondalık sistemdir.

Segment: (1) Belli uç noktalarla sınırlanan bir çizgi parçası. (2) Dairede, bir kiriş ile sınırın (*çevrenin*) arasında kalan alan.

Sekizyüzlü: Sekiz üçgensel *yüzden* oluşan üç boyutlu bir *çokyüzlü*. Düzgün sekizyüzlü, beş *Platonik katıdan* biridir.

Seri: Birbirlerine eklenen, yan yana dizili matematiksel *terimler*. Seriler çoğu zaman matematiksel bir kurala uyar ve seri *sonsuz* olsa bile toplamları sonlu bir sayı olabilir. Ayrıca bkz. *dizi*.

Silindir: İki ucundaki özdeş dairelerin birbirine eğri bir yüzeyle bağlandığı üç boyutlu şekil.

Sinüs (kısaltması sin): *Trigonometride* önemli bir *fonksiyondur*; bir *dik* üçgenin verilen bir açısının karşı kenarının, o üçgenin *hipotenüsüne* oranıdır. Bu oran 0'dan başlayıp, açının büyüklüğüyle birlikte değişir ve 360 *dereceden* sonra örüntüsünü tekrarlar. Işık dalgaları ve daha birçok dalganın şekli, sinüs fonksiyonunun *grafiğiyle* aynıdır.

Skaler: Şiddeti (büyüklüğü) olup, *vektörün* aksine, yönü olmayan bir nicelik.

Sonluötesi sayı: Bir *sonsuz* sayıyı ifade eden bir diğer terim. Özellikle, farklı büyüklükteki sonsuzlukların veya sonsuz nesne öbeklerinin karşılaştırılmasında kullanılır.

Sonsuz: Anlaşılamaz büyüklükte ve sınırsız. Matematikte farklı sonsuzluk türleri vardır: Örneğin *sayma sayıların kümesi* sayılabilir sonsuzdur (teker teker sayılabilmesine karşın sona asla gelinmez), *gerçel sayılarsa* sayılamaz sonsuzdur.

Sonsuz küçükler kalkülüsü: *Kalkülüs anlamına* gelen bir diğer terim. Genel olarak, *kalkülüsün, sonsuz küçüklerin* (sonsuz derecede küçük ama sıfır olmayan niceliklerin) birbirine eklenmesi olarak görüldüğü eski dönemlerde kullanılırdı.

Sonsuz seriler: Sonsuz sayıda *terimi* olan matematiksel bir seri: Bkz. *seri*.

Soyut cebir: *Gruplar* ve *halkalar* gibi soyut matematiksel yapıların mercek altına alındığı *cebir* dalı. Büyük bölümü 20. yüzyılda geliştirildi.

Soyut matematik: Eyleme dönüşecek uygulamalarındansa kuramsal boyutta geliştirilmesi hedefiyle araştırılan matematik konuları. Ayrıca bkz. *uygulamalı matematik*.

Şifre: İletilerin deşifre edilmeksizin anlaşılamamasını sağlayan sistemli ileti kodlama yöntemlerinin tümü.

Şifreleme: Verileri veya bir iletiyi güvenli, kodlanmış bir biçime dönüştürme işlemi.

Taban: (1) Bir *sayı sisteminde* taban, sistemin düzenlenişinin merkezindeki sayıdır. Günümüzde kullandığımız başlıca sayı sistemi, ondalık adıyla da bilinen 10-tabanlı sistemdir. Ondalık sistemde 0'dan 9'a kadar sayılar kullanılır; hemen sonraki sayının yazılışıysa 10'dur, yani bir adet on ve sıfır adet bir. Ayrıca bkz. *basamak değerli sistem*. (2) *Logaritmalarda* belirli bir taban (genellikle 10 ya da Euler sayısı e) kullanılır; verili bir x sayısının logaritması, x'i elde etmek için ilgili tabanın yükseltilmesi gereken *kuvvettir*.

Tam kare sayı: Nispeten küçük bir *tamsayının* kendisiyle bir kere çarpılmasıyla oluşabilen bir tamsayı. Örneğin 25, 5×5 (5^2'ye) eşit olduğundan tam kare sayıdır.

Tamsayı: Negatif sayma sayıları ve doğal sayıların her biri. Örneğin -1, 0, 19, 55 vb. (*Kesirler* tamsayı değildir.)

Tanjant: *Trigonometride* tanjant *fonksiyonun* (kısaltması tan) tanımı, bir *dik* üçgende, verilen bir açının karşı kenarının uzunluğunun, o açının komşu kenarınun uzunluğuna oranıdır.

Teğet: Bir eğriyi, tek bir noktada temas etmek suretiyle dışa bakan tarafından sıyıran bir doğru.

Teorem: Bilhassa belirsiz bir matematik konusunda ulaşılan anlamlı bir sonucun ispatı. İspatlanmamış bir ifade, *kesitirim* olarak adlandırılır.

Tepe: Üç boyutlu bir şekilde, tabana en uzak *köşe*.

Terim: Cebirsel bir *ifadedeki*, genelde birbirlerinden artı (+) ve eksi (−) işaretleriyle ayrılan (dizi düzenindeyse virgülle), bir veya daha çok sayı ya da *değişken*. Örneğin $x + 4y - 2$ ifadesinde x, $4y$ ve 2'nin hepsi birer terimdir.

Ters: Başka bir *ifade* ya da *işlemin* tersi olup o işlemi geri alan matematiksel bir ifade.

Tesselasyon: İki boyutlu düz bir yüzeyi hiç boşluk bırakmadan kaplayan bir veya daha çok düzgün geometrik şeklin, tekrarlanan tıpkılarıyla o yüzeyde oluşturduğu bir örüntü. Döşeme olarak da anılır.

Topoloji: Yüzey ve nesneleri, kati geometrik şekilleri üzerinden değil parçalarının birbirleriyle nasıl bağlantılı olduğunu irdeleyerek ele alan matematik dalı. Örneğin tatlı çörek ile çay fincanı topolojik açıdan benzerdir çünkü ikisinde de boydan boya açık birer delik vardır (çay fincanındaki delik, sapın içindedir).

Trigonometri: Aslında, bir *dik üçgende*, üçgenin öbür açıları değiştiği zaman farklı kenarların arasındaki oranların nasıl değiştiğini inceleyen bir dalken, sonraları tüm üçgenler kapsamına girdi. Oranların nasıl değiştiğinin açıklanması artık matematiğin birçok dalının temel direği olan trigonometrik *fonksiyonlarla* yapılmakta.

Tümevarım: Matematikte, işlemin bir adımı için doğru olan ifadenin, işlemdeki bir sonraki adım ve geri kalan diğer tüm adımlar için de doğru olduğunu saptamak suretiyle genel bir vargıya ulaşma yolu. Ayrıca bkz. *tümdengelim*.

Tümdengelim: Bilinen veya varsayılan matematiksel ilkelere başvurarak problem çözme işlemi. Ayrıca bkz. *tümevarım*.

Türev: Bkz. *diferansiyel*.

Uygulamalı matematik: Matematiğin bilim ve teknolojideki problemleri çözmek için kullanılması. Belirli *denklem* türlerini çözmeye yönelik teknikleri kapsar.

Üçüncü derece denklem: Kendisiyle iki kere çarpılmış en az bir *değişken* (örneğin y^3 olarak da yazılan $y \times y \times y$) içeren, öte yandan kendisiyle bundan daha çok çarpılmış değişken içermeyen *denklem*.

Üs: Bir sayı veya niceliğin hangi *kuvvete* yükseltildiğini belirten üst im sayısı, örneğin x^2'deki x^2 $(x \times x)$. *İndis* de denir.

Üstel fonksiyon: Bir niceliği büyüdükçe artış hızının da arttığı bir matematiksel *fonksiyon*. Sonuca genel olarak *üstel büyüme* denir.

Varlık ispatı: Kurgulanan bir örnek veya genel *tümevarım* yoluyla bir şeyin var olduğunun ispatı.

Vektör: Şiddeti ve yönü olan matematiksel veya fiziksel bir nicelik. Vektörler şemalarda genellikle kalın oklarla temsil edilir.

Vektör uzayı: *Vektörlerin* birbirleriyle ve *skalerlerle* çarpıldığı karmaşık bir soyut matematiksel yapı.

Venn diyagramı: Veri kümelerinin üst üste binen dairelerle gösterildiği bir şema. Üst üste binen kısımlarla kümelerin neleri paylaştığı gösterilir.

Yakınsaklık: Hem her *terimin* bir son terimden küçük olduğu hem de terimlerin toplamının sonlu bir yanıta yaklaştığı sonsuz matematiksel *serilerin* bir niteliği. *Pi* gibi sayıların değerleri yakınsak serilerden yararlanılarak bulunabilir.

Yarıçap: Çember veya kürenin merkezinden *çevresine* uzanan herhangi bir doğru.

Yay: Çemberlerde, *çevrenin* bir parçasını oluşturan eğri çizgi.

Yer tutucu: *Basamak değerli sistemlerde*, mesela 1 ile 100'ü birbirinden ayırt edebilmek için kullanılan bi rakam (genelde sıfır); yalnız, bu rakam her zaman, "aşağı yukarı 100 km ileride" gibi ifadelerdeki tam ölçü anlamını belirtmez.

Yineleme (iterasyon): İstenen sonucu elde etmek üzere aynı *işlemi* tekrar tekrar uygulamak.

Yirmiyüzlü: 20 üçgensel yüzden oluşan üç boyutlu bir çokyüzlü. Düzgün yirmiyüzlü, beş *Platonik katıdan* biridir.

Yüz: Üç boyutlu bir şeklin düz yüzeyi.

Yüzey alanı: Düz veya eğri bir yüzeyin ya da üç boyutlu bir cismin dış tarafının *alanı*.

TEŞEKKÜR

Dorling Kindersley, tasarım konusundaki yardımlarından ötürü Gadi Farfour, Meenal Goel, Debjyoti Mukherjee, Sonali Rawat ve Garima Agarwal'a, yayına hazırlık yardımlarından ötürü Rose Blackett-Ord, Daniel Byrne, Kathryn Hennessy, Mark Silas ve Shreya Iyengar'a, yapım aşamasındaki yardımlarından ötürü Gillian Reid, Amy Knight, Jacqueline Street-Elkayam ve Anita Yadav'a teşekkür eder.

FOTOĞRAFLAR

Yayınevi, fotoğraflarının kullanılmasına izin verdikleri için aşağıdakilere teşekkür eder.

(Anahtar: a-yukarı; b-aşağı; c-orta; f-uzak; l-sol; r-sağ; t-üst)

25 Getty Images: Universal History Archive / Universal Images Group (crb). **Science Photo Library:** New York Public Library (bl). **27 Alamy Stock Photo:** Artokoloro Quint Lox Limited (tr); NMUIM (clb). **29 Alamy Stock Photo:** Historic Images (cra). **31 SuperStock:** Stocktrek Images (crb). **32 Getty Images:** Werner Forman / Universal Images Group (cb). **33 Getty Images:** DEA PICTURE LIBRARY / De Agostini (crb). **35 Getty Images:** Print Collector / Hulton Archive (cla). **38 Alamy Stock Photo:** World History Archive (tr). **41 Alamy Stock Photo:** Peter Horree (br). **42 Getty Images:** DEA Picture Library / De Agostini (br). **43 Alamy Stock Photo:** World History Archive (tl). **SuperStock:** Album / Oronoz (tr). **45 Alamy Stock Photo:** The History Collection (tr). **47 Rijksmuseum, Amsterdam:** Gift of J. de Jong Hanedoes, Amsterdam (bl). **49 Dreamstime.com:** Vladimir Korostyshevskiy (bl). **51 Dreamstime.com:** Mohamed Osama (tr). **54 Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (bl). **55 Science Photo Library:** Royal Astronomical Society (cra). **59 Alamy Stock Photo:** Science History Images (br). **63 Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (bl). **65 Alamy Stock Photo:** National Geographic Image Collection (tl). **NASA:** Images courtesy of NASA / JPL-Caltech / Space Science Institute (crb). **67 Alamy Stock Photo:** Ancient Art and Architecture (tr). **73 Alamy Stock Photo:** Science History Images (bl, cra). **75 Dreamstime.com:** Gavin Haskell (tr). **77 Getty Images:** Steve Gettle / Minden Pictures (crb). **79 Alamy Stock Photo:** Granger Historical Picture Archive (b). **81 Alamy Stock Photo:** The History Collection (cra). **82 Alamy Stock Photo:** Art Collection 2 (cr). **89 Alamy Stock Photo:** The History Collection (bl). **90 Alamy Stock Photo:** Ian Robinson (clb). **91 SuperStock:** fototeca gilardi / Marka (crb). **94 SuperStock:** Melvyn Longhurst (bl). **98 Getty Images:** DEA PICTURE LIBRARY / De Agostini (t). **99 Getty Images:** DEA / M. SEEMULLER / De Agostini (br). **103 Bridgeman Images:** Pictures from History (cra). **105 Alamy Stock Photo:** Idealink Photography (cra). **108 Alamy Stock Photo:** David Lyons (bl). **110 Alamy Stock Photo:** Acorn 1 (bc). **111 Alamy Stock Photo:** Flhc 80 (clb); RayArt Graphics (tr). **112 Getty Images:** Smith Collection / Gado / Archive Photos (bc). **121 Alamy Stock Photo:** Art Collection 3 (bl). **122 Alamy Stock Photo:** Painting (t). **123 Dreamstime.com:** Millafedotova (crb). **126 Alamy Stock Photo:** James Davies (bc). **127 Getty Images:** David Williams / Photographer's Choice RF (tr). **131 Science Photo Library:** Science Source (b). **134 iStockphoto.com:** sigurcamp (bl). **136 Alamy Stock Photo:** George Oze (br). **137 Alamy Stock Photo:** Hemis (tl). **139 Alamy Stock Photo:** Classic Image (tr). **140 Science Photo Library:** Oona Stern (clb). **141 Alamy Stock Photo:** Pictorial Press Ltd (tl). **Getty Images:** Keystone Features / Stringer / Hulton Archive (bc). **143 Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (tr). **146 Alamy Stock Photo:** IanDagnall Computing (bl). **147 Science Photo Library:** Royal Astronomical Society (br). **150 Getty Images:** Etienne DE MALGLAIVE / Gamma-Rapho (tr). **159 Rijksmuseum, Amsterdam:** (bl). **160 Alamy Stock Photo:** James Nesterwitz (clb). **Gwen Fisher:** Bat Country was selected as a 2013 Burning Man Honorarium Art Project. (tl). **163 123RF.com:** Antonio Abrignani (tr). **Alamy Stock Photo:** Chris Pearsall (clb, cb, cb/blue). **164 Alamy Stock Photo:** i creative (br). **171 Alamy Stock Photo:** Stefano Ravera (ca). **172 Getty Images:** DE AGOSTINI PICTURE LIBRARY (bl). **173 Alamy Stock Photo:** Granger Historical Picture Archive (br). **174 Alamy Stock Photo:** World History Archive (tc). **175 Alamy Stock Photo:** INTERFOTO (tr). **177 Alamy Stock Photo:** Chronicle (crb). **182 Getty Images:** Science Photo Library (bc). **183 Library of Congress, Washington, D.C.:** LC-USZ62-10191 (b&w film copy neg.) (bl). **185 Alamy Stock Photo:** Interfoto (tr). **Getty Images:** Xavier Laine / Getty Images Sport (bc). **188 Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (bl). **190 Alamy Stock Photo:** Peter Horree (clb). **191 Alamy Stock Photo:** James King-Holmes (tr). **193 Alamy Stock Photo:** Heritage Image Partnership Ltd (bl). **196 Getty Images:** Steve Jennings / Stringer / Getty Images Entertainment (crb). **201 Alamy Stock Photo:** Classic Image (bl). **203 Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (tr). **206 Alamy Stock Photo:** Science History Images (tr). **208 Alamy Stock Photo:** Science History Images (tr). **Getty Images:** Bettmann (tl). **209 Alamy Stock Photo:** NASA Image Collection (clb). **217 Getty Images:** AFP Contributor (br). **Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (cla). **218 Getty Images:** Jamie Cooper / SSPL (bc). **219 Getty Images:** Mondadori Portfolio / Hulton Fine Art Collection (tr). **220 Alamy Stock Photo:** The Picture Art Collection (crb). **223 Alamy Stock Photo:** Chronicle (cla). **224 Dorling Kindersley:** The Science Museum (tl). **Getty Images:** Science & Society Picture Library (bc). **225 The New York Public Library:** (tr). **227 Getty Images:** Stocktrek Images (cb). **SuperStock:** Fine Art Images / A. Burkatovski (tr). **229 Daina Taimina:** From Daina Taimina's book *Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes* (cb); Tom Wynne (tr). **231 Getty Images:** Bettmann (tr). **232 Getty Images:** Boston Globe / Rubik's Cube® used by permission of Rubik's Brand Ltd www.rubiks.com (bc). **233 Alamy Stock Photo:** Massimo Dallaglio (tl). **235 Alamy Stock Photo:** The History Collection (tr); Jochen Tack (cla). **237 Alamy Stock Photo:** Painters (tr). **239 Alamy Stock Photo:** Beth Dixson (bl). **Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (tr). **245 Wellcome Collection http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/:** (bl). **247 Alamy Stock Photo:** sciencephotos (tl). **249 Alamy Stock Photo:** Chronicle (tr); Peter Horree (cla). **251 Alamy Stock Photo:** The History Collection (tr). **Science Photo Library:** Dr Mitsuo Ohtsuki (cb). **253 Alamy Stock Photo:** INTERFOTO (bl). **255 Dreamstime.com:** Antonio De Azevedo Negrão (cr). **257 Alamy Stock Photo:** Science History Images (tr). **259 Alamy Stock Photo:** Wenn Rights Ltd (tr). **261 Getty Images:** ullstein bild Dtl. (tr). **267 Alamy Stock Photo:** History and Art Collection (tr). **270 Alamy Stock Photo:** Chronicle (tl). **271 Science Photo Library:** (bl). **273 Getty Images:** John Pratt / Stringer / Hulton Archive (cla). **274 NASA:** NASA's Goddard Space Flight Center (br). **275 Getty Images:** Keystone / Stringer / Hulton Archive (tr). **277 Alamy Stock Photo:** Granger Historical Picture Archive (tr). **279 Getty Images:** Eduardo Munoz Alvarez / Stringer / Getty Images News (cra); ullstein bild Dtl. (bl). **281 Alamy Stock Photo:** FLHC 61 (cra). **283 Bridgeman Images:** Private Collection / Archives Charmet (cla). **287 Alamy Stock Photo:** Granger Historical Picture Archive (tr). **Getty Images:** Bletchley Park Trust / SSPL (bl). **289 Alamy Stock Photo:** Ian Dagnall (tl). **291 Alamy Stock Photo:** Science History Images (cr). **296 Alamy Stock Photo:** Jessica Moore (tr). **Science Photo Library:** Emilio Segre Visual Archives / American Institute of Physics (bl). **297 Alamy Stock Photo:** Science Photo Library (br). **301 Alamy Stock Photo:** Aflo Co. Ltd. (clb). **303 Dorling Kindersley:** H. Samuel Ltd (cra). Institute for Advanced Study: Randall Hagadorn (bl). **308 Getty Images:** PASIEKA / Science Photo Library (tr). **309 Science Photo Library:** Emilio Segre Visual Archives / American Institute Of Physics (tr). **310 Alamy Stock Photo:** Steve Taylor ARPS (bc). **311 Getty Images:** Fine Art / Corbis Historical (clb). **313 Getty Images:** f8 Imaging / Hulton Archive (crb). **315 Dorling Kindersley:** Royal Signals Museum, Blandford Camp, Dorset (bc). **316 Alamy Stock Photo:** Interfoto (bl). **317 Getty Images:** Matt Cardy / Stringer / Getty Images News (clb). **323 Science Photo Library:** Frederic Woirgard / Look At Sciences (bl). **325 Avalon:** Frances M. Roberts (tr)

Diğer bütün görseller © Dorling Kindersley
Daha fazla bilgi için bkz. **www.dkimages.com**

SAYILARI ADETA KALBURDAN GEÇİRİR GİBİ ELERİZ



RAKAMLAR BASAMAKLARINA YERLEŞİR





KALKÜLÜSLE GELECEĞİ TAHMİN EDEBİLİRİM



SIFIRDAN VARLIK ÇIKARILINCA FARK OLARAK BORÇ ELDE EDİLİR

Karmaşık sayı nedir? İki paralel çizgi birleşebilir mi? Matematik geleceği tahmin etmemize nasıl yardımcı olur? Matematikçiler tarih boyunca bunun gibi pek çok büyük soru sormuş ve doğadaki desenlerden modern bilgisayar teknolojisine kadar her şeyi anlamamızı sağlayan cevaplar vermişlerdir.

Teknik dilin anlaşılmasını kolaylaştırarak kısa ve öz açıklamalar yapan, karmaşık teorileri şemalarla adım adım çözen, unutulmaz alıntılara yer veren ve sayılar hakkındaki düşüncelerimizle oynayan esprili çizimleriyle *Matematik Kitabı*, herkesin anlayabileceği bir dilde yazılmıştır.

İster hevesli bir öğrenci olun ister matematiğe merakı olan biri; bu kitapta sizi şaşırtacak ve ilginizi uyandıracak pek çok şey bulacaksınız.



FEVKALADE BİR İCAT

Dizinin diğer kitapları





ALFA



9 786254 490378

BAŞVURU

DK